Модели в виде систем одновременных уравнений

Проблемы построения моделей из одновременных уравнений

1. Авторегрессия

Рассмотрим элементарную макроэкономическую модель

$$\left.\begin{aligned} &C_t = a_0 + a_1 Y_t + u_t \\ &Y_t = C_t + I_t \\ &M(u_t) = 0 \\ &\sigma^2(u_t) = \sigma_u^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

В приведенной форме модель (1.1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &C_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{a_1}{1-a_1} I_t + \frac{2-a_1}{1-a_1} u_t \\ &Y_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_1} I_t + \frac{1}{1-a_1} u_t \\ &M(u_t) = 0 \\ &\sigma^2(u_t) = \sigma_u^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Из (1.2) видно, что $COV(Y_t, u_t) \neq 0$

Проблемы построения моделей из одновременных уравнений

2. Проблема идентификации уравнений

Пример. Имеем элементарную модель конкурентного рынка

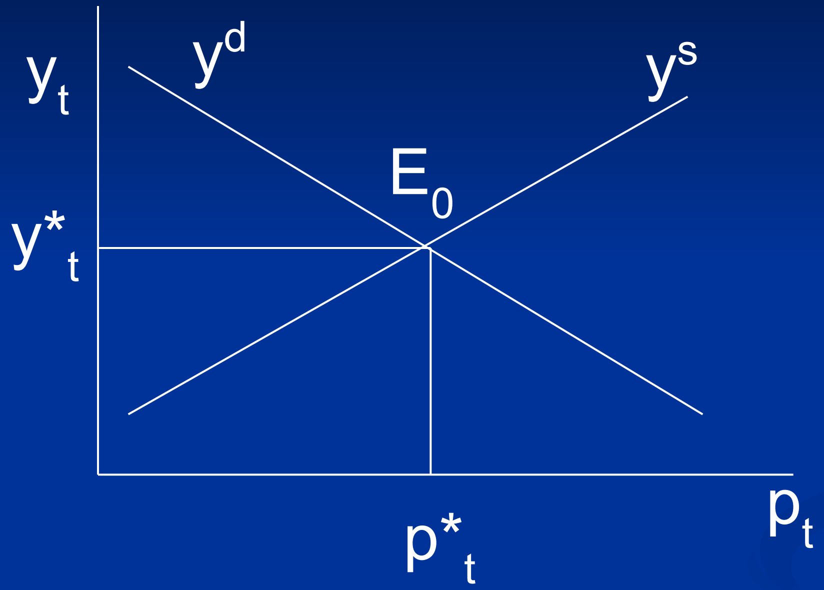
$$\left.\begin{array}{l} y_t^d = a_0 + a_1 \cdot p_t \\ y_t^s = b_0 + b_1 \cdot p_t \\ y_t^d = y_t^s, \\ a_1 < 0, b_1 > 0 \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

По результатам наблюдений необходимо получить оценки параметров a_0, a_1, b_0, b_1

Что доступно для наблюдений? Равновесная цена p*t и соответствующие ей уровни спроса и предложения, причем $Y^s_t = Y^d_t = Y^*_t$

Проблема идентификации уравнений

Графически это выглядит так



Из приведенной формы уравнений модели видно

$$\left.\begin{aligned} p_t^* &= \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} \\ y_t^* &= \frac{a_0 b_1 - b_0 b_1}{b_1 - a_1} \end{aligned}\right\}$$

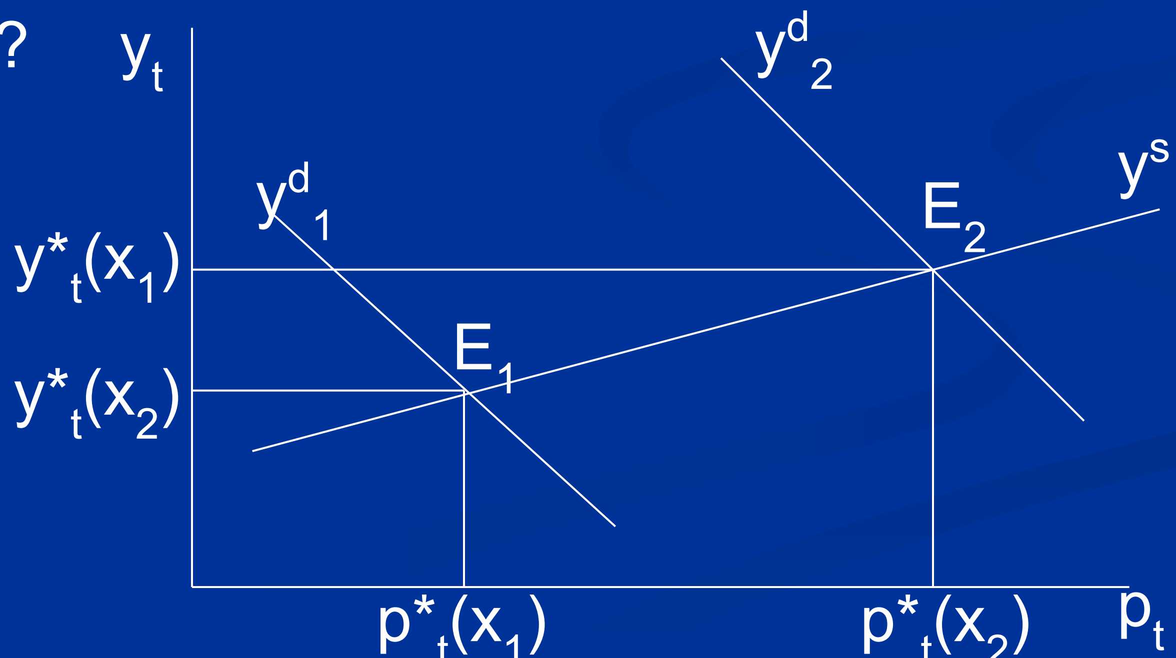
Проблема идентификации уравнений

Вопрос. Как преодолеть эту проблему?

Вспомним, что на спрос влияет располагаемый доход

$$\left.\begin{aligned} & y_t^d = a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 x_t \\ & y_t^s = b_0 + b_1 \cdot p_t \\ & y_t^d = y_t^s, \\ & a_1 < 0, b_1 > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

Что это дает?



Проблема идентификации уравнений

<u>Вывод.</u> Введение в первое уравнение системы (2.1) дополнительной экзогенной переменной x_t привело к тому, что второе уравнение стало идентифицируемо.

<u>Правило.</u> Для устранения проблемы идентификации необходимо:

1. Дополнить уравнения системы дополнительными предопределенными переменными

2. Дополнительные переменные включаются в уравнения смежные с неидентифицируемыми

Идентифицируемая модель конкурентного рынка

$$\left.\begin{array}{l} y_t^d = a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 x_t + u_t \\ y_t^s = b_0 + b_1 \cdot p_{t-1} + v_t \\ y_t^d = y_t^s, \\ a_1 < 0, b_1 > 0 \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

Проблема идентификации уравнений

Остаются вопросы:

1. Как определить, какие уравнения в модели являются неидентифицируемые

2. Как определить, какие уравнения в модели идентифицируемые

Проблема идентификации уравнений

Ответ на первый вопрос дает теорема, которая имеет название «правило порядка» и формулирует необходимое условие идентифицируемости i-го уравнения модели

Общий вид каждого уравнение модели в структурной форме можно записать как:

$$a_{i1} \cdot y_{1t} + \ldots + a_{ii} \cdot y_{it} + \ldots + a_{iG} \cdot y_{Gt} + \\ + b_{i1} \cdot x_{1t} + \ldots + b_{iK} \cdot x_{Kt} = u_{it} \qquad (2.4)$$

где: G – количество эндогенных переменных в модели

K – количество предопределенных переменных в модели

Проблема идентификации уравнений

Необходимое условие идентифицируемости

Теорема 1. Пусть *i*-ое уравнение модели (2.4) идентифицируемо. Тогда справедливо неравенство

$$M_i\ (\text{пред}) \geq G - M_i\ (\text{энд}) - 1. \qquad (2.5)$$

В нём:

M_i (пред) – количество предопределённых переменных модели, *не включённых* в *i*-ое уравнение;

M_i (энд) – количество эндогенных переменных модели, *не включённых* в *i*-ое уравнение.

Проблема идентификации уравнений

Замечание. Справедливость неравенства (2.5) является *необходимым условием* идентифицируемости *i*-го уравнения. Это значит, что, когда неравенство (2.5) несправедливо, то *i*-ое уравнение заведомо *неидентифицируемо*. Однако при выполнении неравенства (2.5) ещё нельзя сделать вывод о идентифицируемости данного уравнения.

Условие (2.5), именуемое *правилом порядка*, позволяет выявлять неидентифицируемые уравнения модели, но не даёт возможности отмечать её идентифицируемые уравнения.

Определение неидентифицируемых уравнений производится методом «от противного»: если условие (2.5) не выполняется для i-го уравнения, то оно неидентифицируемо

Проблема идентификации уравнений

Задача. Показать, что оба уравнения модели (2.3) не являются неидентифицируемыми

$$\left.\begin{aligned} y_t^d &= a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 x_t + u_t \\ y_t^s &= b_0 + b_1 \cdot p_{t-1} + v_t \\ y_t^d &= y_t^s, \\ a_1 &< 0, b_1 > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Здесь:

(y^d_t, y^s_t, p_t) – эндогенные переменные (G=3)

(1, x_t, p_{t-1}) – предопределенные переменные (K=3)

Для первого уравнения: M(пред)=1, M(энд)=1, M(пред)=G-M(энд)-1

Для второго уравнения: M(пред)=1, M(энд)=2, M(пред)>G-M(энд)-1 (1>3-2-1)

$R_i \cdot \overline{a}_i = 0$,

Проблема идентификации уравнений

Введем еще несколько понятий, связанных с уравнением (2.4)

$\overline{a}_i = (y_{1t}, \ldots, y_{Gt}; x_{1t}, \ldots, x_{Kt})^T$ (2.6) - Набор переменных модели

Матрица A = (a_{ij}) является не вырожденной и будем считать, что любое уравнение (2.4) может быть решено относительно y_i и приведено к нормализованному виду (a_i=1)

Определение. Ограничениями называется система из L_i линейных однородных алгебраических уравнений

$$R_i \cdot \overline{a}_i = 0 \qquad (2.7)$$

которым априорно удовлетворяет вектор набора переменных (2.6) коэффициентов *i*-го уравнения

Проблема идентификации уравнений

Пример. Модель конкурентного рынка (2.3)

$$\left.\begin{array}{l} y_t^d = a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 x_t + u_t \\ y_t^s = b_0 + b_1 \cdot p_{t-1} + v_t \\ y_t^d = y_t^s, \\ a_1 < 0, b_1 > 0 \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

Коэффициенты её первого уравнения, такие:
$a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = -a_1$, $b_{11} = -a_0$, $b_{12} = -a_2$.
Следовательно, вектор этих коэффициентов

$$a_1=(1, 0, -a_1, -a_0, -a_2)^T \qquad (2.8)$$

заведомо удовлетворяет одному ($L_1 = 1$) ограничению которое можно представить в форме линейного однородного уравнения (2.7) относительно компонентов вектора (2.6) с матрицей $R_1 = (0, 1, 0, 0, 0)$

$$R_1 \bullet a_1 = (0,1,0,0,0) \bullet (1,0,-a_1,-a_0,-a_2)^T = 0$$

Проблема идентификации уравнений

Обозначим символом Ā расширенную матрицу коэффициентов структурной формы модели

$$\overline{A} = (A \mid B) \qquad (2.8)$$

Теорема. (Правило ранга) *i*-ое уравнение модели (2.4) идентифицируемо тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\mathrm{rk}(\overline{A} \cdot R_i^T) = G - 1. \qquad (2.9)$$

В нём символом rk обозначен ранг произведения матриц (2.8) и R_i^T

Условие (2.9) является необходимым и достаточным для идентифицируемости i-го уравнения модели

Проблема идентификации уравнений

Пример. Проиллюстрируем процедуру использования критерия (2.9) на примере уравнений модели (2.11).

$$\left.\begin{array}{l} y_t^d = a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 x_t + u_t \\ y_t^s = b_0 + b_1 \cdot p_t + v_t \\ y_t^d = y_t^s, \\ a_1 < 0, b_1 > 0 \end{array}\right\} \qquad (2.11)$$

Ее расширенная матрица

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -a_1 & -a_0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (2.10)$$

Отметим, что для третьего уравнения модели (2.3) условие нормализации не выполняется. Однако это уравнение является тождеством, к которому проблема идентификации не имеет отношение.

Проблема идентификации уравнений

Для первого уравнения модели (2.11) :

Вычисляем значение критерия (2.9)

$$\overline{A} \bullet R_1^T = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -a_1 & -a_0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad rk \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \qquad (2.12)$$

Проверяем условие (2.9): rk=G-1 1≠3-1=2, следовательно, первое уравнение модели (2.11) неидентифицируемо

Проблема идентификации уравнений

Для второго уравнения модели (2.11) имеем:

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем значение критерия (2.9)

$$\overline{A} \bullet R_1^T = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -a_1 & -a_0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad rk \begin{pmatrix} 1 & -a_2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Проверка условия (2.9): rk=G-1 2=3-1=2, следовательно, второе уравнение модели (2.11) идентифицируемо

Проблема идентификации уравнений

Замечания.

1. Если условие (2.9) выполняется точно:

$$rk(\bar{A}R^T_i)=G-1,$$

то уравнения модели точно идентифицированы

2. Если условие (2.9) выполняется не точно:

$$rk(\bar{A}R^T_i)>G-1,$$

то уравнения модели сверхидентифицированы