Системы счисления

Определение. Непозиционные и позиционные системы счисления.
Развернутая форма записи числа в позиционной системе счисления.
Правило счета. Таблица эквивалентов чисел.
Двоичная система счисления.
Перевод чисел между двоичной, восьмеричной, десятичной и шестнадцатеричной системами счисления.
Максимальное значение числа при известной длине разрядной сетки.
Двоичная арифметика.
Упражнения.

© Бычков А.В., 2005

Система счисления

- **Система счисления** — это способ представления чисел цифровыми знаками и соответствующие ему правила действий над числами.

- Системы счисления можно разделить:
  - непозиционные системы счисления;
  - позиционные системы счисления.

Непозиционные системы счисления

- В непозиционной системе счисления значение (величина) символа (цифры) не зависит от положения в числе.
  - Пример 1. У многих народов использовалась система, алфавит которой состоял из одного символа — палочки. Для изображения какого-то числа в этой системе нужно записать определенное множество палочек, равное данному числу: ||||| — число пять.
  - Пример 2. Самой распространенной непозиционной системой счисления является римская. Алфавит римской системы записи чисел состоит из символов: I — один, V — пять, X — десять, L — пятьдесят, C — сто, D — пятьсот, M — тысяча.
    - Величина числа определяется как сумма или разность цифр в числе (например, II — два, III — три, XXX — тридцать, CC — двести).
    - Если же большая цифра стоит перед меньшей цифрой, то они складываются (например, VII — семь),
    - если наоборот — вычитаются (например, IX — девять).

Позиционные системы счисления

- В позиционных системах счисления значение (величина) цифры определяется ее положением в числе.
- Любая позиционная система счисления характеризуется своим основанием.
- **Основание позиционной системы счисления** — количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.
    - Основание 10 у привычной десятичной системы счисления (десять пальцев на руках). Алфавит: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.
    - Основание 60 придумано в Древнем Вавилоне: деление часа на 60 минут, минуты — на 60 секунд, угла — на 360 градусов.
    - Основание 12 распространили англосаксы: в году 12 месяцев, в сутках два периода по 12 часов, в футе 12 дюймов.
    - Основание 5 широко использовалось в Китае.
- За основание можно принять любое натуральное число — два, три, четыре и т.д., образовав новую позиционную систему: двоичную, троичную, четверичную и т.д.

Развернутая форма записи числа

- Позиция цифры в числе называется **разрядом**.

- $\mathbf{A}_q = \mathbf{a}_{n-1} \times q^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_1 \times q^1 + \mathbf{a}_0 \times q^0 + \mathbf{a}_{-1} \times q^{-1} + \ldots + \mathbf{a}_{-m} \times q^{-m}$, где

  q — основание системы счисления (*количество используемых цифр*)

  $\mathbf{A}_q$ — число в системе счисления с основанием q

  a — цифры многоразрядного числа A_q

  n (m) — количество целых (дробных) разрядов числа A_q

- Пример:

2 1 0 -1 -2

$239{,}45_{10} = 2\times10^2 + 3\times10^1 + 9\times10^0 + 4\times10^{-1} + 5\times10^{-2}.$

$a_2\ a_1\ a_0,\ a_{-1}\ a_{-2}$

Правило счета

- **Продвижением** цифры называют замену её следующей по величине.
- Продвижение старшей цифры (например, цифры 9 в десятичной системе) означает замену её на 0.
- **Правило счёта**: для образования целого числа, следующего за любым данным целым числом, нужно продвинуть самую правую цифру числа; если какая-либо цифра после продвижения стала нулем, то нужно продвинуть цифру, стоящую слева от неё.

Таблица эквивалентов чисел

A_{10}	A_2	A_8	A_{16}
0	0	0	0
1	1	1	1
2		2	2
3		3	3
4		4	4
5		5	5
6		6	6
7		7	7
8			8
9			9

A_{10}	A_2	A_8	A_{16}
10			A
11			B
12			C
13			D
14			E
15			F
16			
17			
18			
19			

Двоичная система счисления

- Официальное «рождение» двоичной системы счисления (в её алфавите два символа: 0 и 1) связывают с именем Готфрида Вильгельма Лейбница. В 1703 г. он опубликовал статью, в которой были рассмотрены все правила выполнения арифметических действий над двоичными числами.
- Преимущества:
  – для её реализации нужны технические устройства с двумя устойчивыми состояниями:
    - сеть ток — нет тока;
    - намагничен — не намагничен;
  – представление информации посредством только двух состояний надежно и помехоустойчиво;
  – возможно применение аппарата булевой алгебры для выполнения логических преобразований информации;
  – двоичная арифметика намного проще десятичной.
- Недостаток:
  – быстрый рост числа разрядов, необходимых для записи чисел.

Перевод чисел (8) → (2), (16) → (2)

- Перевод восьмеричных и шестнадцатеричных чисел в двоичную систему: каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной *триадой* (тройкой цифр) или *тетрадой* (четверкой цифр).
- Примеры:

$$5371_8 = \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{001}_{1}{}_2;$$

$$1A3F_{16} = \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1111}_{F}{}_2$$

- Переведите:

$$3754_8 = \qquad\qquad {}_2$$

$$2ED_{16} = \qquad\qquad {}_2$$

Перевод чисел (2) → (8), (2) → (16)

- Чтобы перевести число из <u>двоичной</u> системы в <u>восьмеричную</u> или <u>шестнадцатеричную</u>, его нужно разбить влево и вправо от запятой на *триады* (для восьмеричной) или *тетрады* (для шестнадцатеричной) и каждую такую группу заменить соответствующей восьмеричной (шестнадцатеричной) цифрой.
- Примеры:

  $1101010000111_2 = 1\ 5\ 2\ 0\ 7_8$;

  1 101 010 000 111

  $110111000001101_2 = 6\ E\ 0\ D_{16}$

  110 1110 0000 1101
- Переведите:

  $101111010101100_2 = \quad {}_8$

  $101101010000110_2 = \quad {}_{16}$

Перевод чисел (q) → (10)

- Запись числа в развернутой форме и вычисление полученного выражения в десятичной системе.
- Примеры:

  $110110_2 = \mathbf{1}\times2^5 + \mathbf{1}\times2^4 + \mathbf{0}\times2^3 + \mathbf{1}\times2^2 + \mathbf{1}\times2^1 + \mathbf{0}\times2^0 = 54_{10}$;

  $237_8 = \mathbf{2}\times8^2 + \mathbf{3}\times8^1 + \mathbf{7}\times8^0 = 128 + 24 + 7 = 159_{10}$;

  $3FA_{16} = \mathbf{3}\times16^2 + \mathbf{15}\times16^1 + \mathbf{10}\times16^0 = 768 + 240 + 10 = 1018_{10}$.
- Переведите:

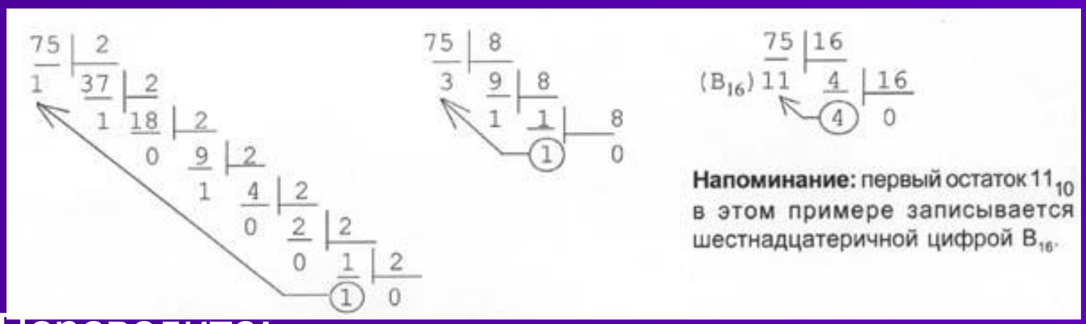
  $1100011010_2 = \qquad {}_{10}$

  $162_8 = \qquad {}_{10}$

  $E23_{16} = \qquad {}_{10}$

Перевод чисел (10) → (q)

- Последовательное целочисленное деление десятичного числа на основание системы q, пока последнее частное не станет равным нулю.
- Число в системе счисления с основанием q — последовательность остатков деления, изображенных одной q-ичной цифрой и записанных в порядке, обратном порядку их получения.
- Примеры:



- Переведите:

$141_{10} = \qquad {}_{2}$

$141_{10} = \qquad {}_{8}$

$141_{10} = \qquad {}_{16}$

Максимальное значение числа

- Для записи одного и того же значения в различных системах счисления требуется разное число позиций или разрядов:

  96_{10} (2 разряда) = 60_{16} (2 разряда) = 140_8 (3 разряда) = 1100000_2 (7 разрядов)
- Чем меньше основание системы, тем больше длина числа (длина разрядной сетки).
- Если длина разрядной сетки задана, то это ограничивает максимальное по абсолютному значению число, которое можно записать.
- $\mathbf{A_{q(max)} = q^N - 1}$, где N — длина разрядной сетки (любое положительное число).
- Пример. Если в двоичной системе счисления длина разрядной сетки N=8, то $A_{2(max)} = 2^8 - 1 = 255$ — максимальное число, которое можно записать в этих восьми разрядах (11111111_2).

Двоичная арифметика

Таблица сложения
0 + 0 = 0
1 + 0 = 1
0 + 1 = 1
1 + 1 = 10

Таблица вычитания
0 – 0 = 0
1 – 0 = 1
1 – 1 = 0
10 – 1 = 1

Таблица умножения
0 × 0 = 0
1 × 0 = 0
1 × 1 = 1

$$\begin{array}{r} 11011 \\ +\ 101101 \\ \hline 1001000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1001000 \\ -\ 101101 \\ \hline 11011 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 110101001 & 10001 \\ \cline{2-2} -10001 & 11001 \\ \cline{1-1} -10011 & \\ 10001 & \\ \cline{1-1} -10001 & \\ 10001 & \\ \cline{1-1} 00000 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11001 \\ \times\ 10001 \\ \hline 11001 \\ 00000 \\ +\ 00000 \\ 00000 \\ 11001 \\ \hline 110101001 \end{array}$$

Упражнения

- Во сколько раз увеличится число $10{,}1_2$ при переносе запятой на один знак вправо?
- При переносе запятой на два знака вправо число $11{,}11_x$ увеличилось в 4 раза. Чему равен x?
- Какое минимальное основание может иметь система счисления, если в ней записано число 23?
- $48_{10} \rightarrow \quad {}_{2}$.
- $16_{10} \rightarrow \quad {}_{8}$.
- $891_{10} \rightarrow \quad {}_{16}$.
- $1101111011_2 \rightarrow \quad {}_{10}$.
- $257_8 \rightarrow \quad {}_{10}$.

Упражнения

- $7B8_{16} \rightarrow \quad {}_{10}$.
- Двоичное число записано в виде многочлена: $1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0$. Какой вид имеет число в двоичной, десятичной записи? $\quad {}_{2} \quad {}_{10}$
- Сравните числа: $11101_2 \quad 1D_{16}$.
- $111101001000_2 \rightarrow \quad {}_{16}$.
- $1100001111_2 \rightarrow \quad {}_{8}$.
- $4F3D_{16} \rightarrow \quad {}_{2}$.
- $713_8 \rightarrow \quad {}_{2}$.
- Составьте таблицу эквивалентов чисел от 0 до 22 для q=10 и q=6.

Литература

- Семакин И.Г., Вараксин Г.С. Информатика. Структурированный конспект базового курса.
- Под ред. Семакина И.Г. Информатика. Задачник-практикум в 2 т. Том 1.
- Шауцукова Л.З. Информатика: Учебное пособие для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.
- Угринович Н.Д. Информатика и информационные технологии. Учебник для 10-11 классов.
- Соловьёва Л.Ф. Информатика в видеосюжетах.