

Метод площадей при решении геометрических задач

Выполнил: ученик 10 Б
класса

МОУ «Лицей №15»

им. акад. Ю.Б. Харитона

Сулоев Илья

Руководитель: Теленгатор

Саров -

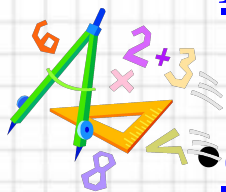
2011г.

С.В.

Содержание



- Введение



- Свойства площадей



- Задачи

- Литература





Введение



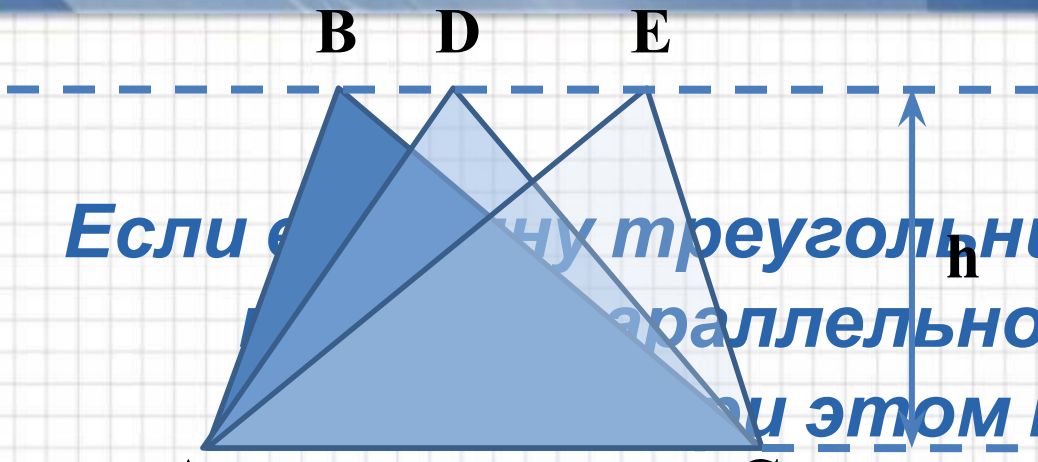
В элементарной математике, самыми трудными считаются геометрические задачи.

При решении геометрических задач, как правило, алгоритмов нет, и выбирать наиболее подходящую к данному случаю теорему не просто. Поэтому, желательно в каждой теме выработать какие-то общие положения, которые полезно знать всякому решающему геометрические задачи. Один из алгоритмов решения многих геометрических задач – метод площадей, т. е. решение задач с использованием свойств площадей.



Свойство

1



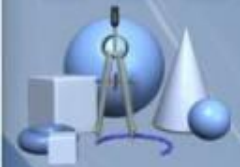
Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь при этом не изменится.

Доказательство: Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$. Они имеют общее основание и равные высоты, так как прямые AC и BD параллельные, то расстояние между ними равно h - высоте $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$. Если площадь треугольника находится по формуле $5 \cdot a \cdot h$, то $S_{ABC} = 0,5 \cdot AC \cdot h$, $S_{ADC} = 0,5 \cdot AC \cdot h$, $S_{AEC} = 0,5 \cdot AC \cdot h$.



Значит,

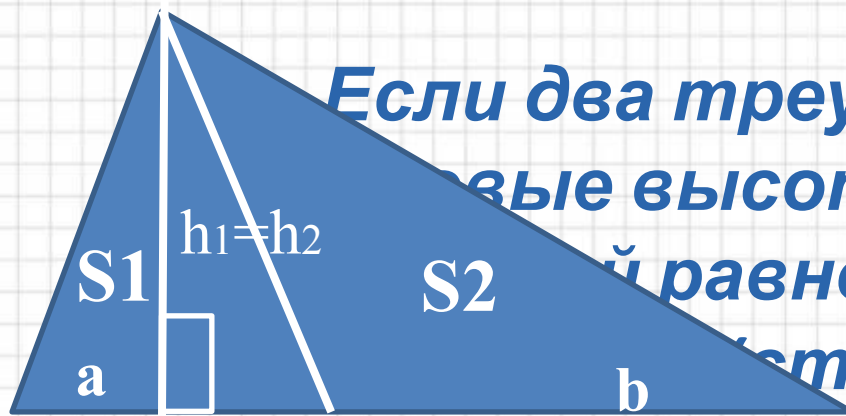
$$S_{ABC} = S_{ADC} = S_{AEC}$$



Свойст

2

во



Если два треугольника имеют равные высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований, на которые опущены эти высоты).

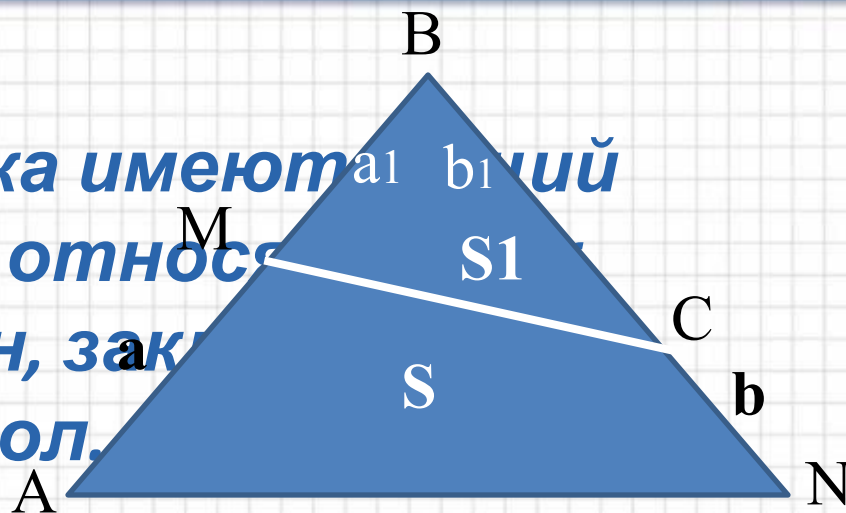
Доказательство: Пусть $h_1 = h_2$ в двух треугольниках с основаниями a и b . Рассмотрим отношение площадей этих треугольников $S_1:S_2=(0,5 \cdot a \cdot h_1):(0,5 \cdot b \cdot h_2)$. Упростив, получим $S_1:S_2=a:b$.



Свойств

3

Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведение сторон, заключенных в этот угол.



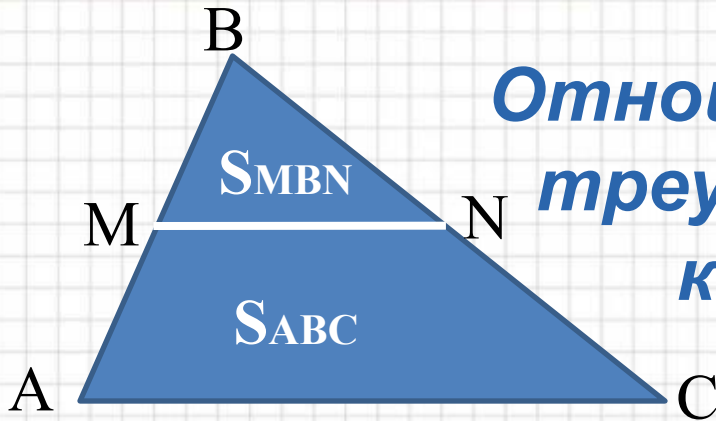
Доказательство: Рассмотрим $\triangle ABN$ и $\triangle MBN$ с общим углом B , где $AB = a$, $BN = b$, $MB = a_1$ и $BN = b_1$. Пусть $S_1 = S_{MBN}$ и $S = S_{ABN}$. Используя формулу площади треугольника вида $S = 0,5ab \sin \gamma$, рассмотрим отношение площадей $\triangle ABN$ и $\triangle MBN$. Тогда $S_1:S = (0,5 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \sin \angle B) : (0,5 \cdot a \cdot b \cdot \sin \angle B)$. Упростив, получим $S_1:S = (a_1 \cdot b_1) : (a \cdot b)$.





Свойств

4



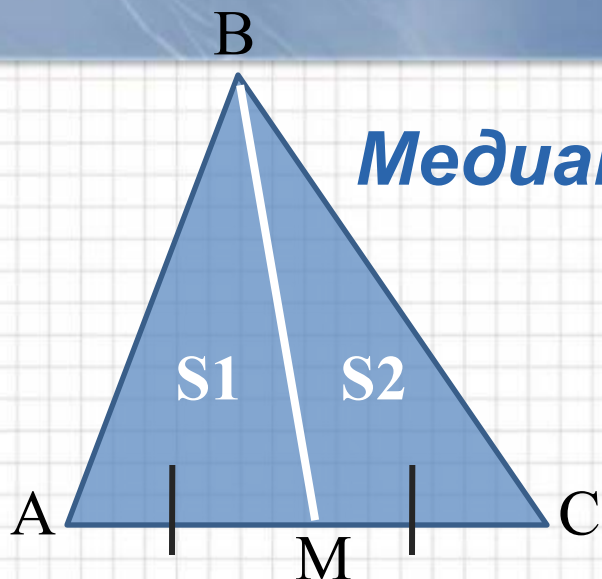
Отношение площадей подобных треугольников равны квадрату коэффициента подобия.

Доказательство: Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$. Пусть $AB = k \cdot MB$, $BC = k \cdot NB$ и $\angle ABC = \angle MBN$. Используя формулу площади треугольника вида $S = 0,5 \cdot a \cdot b \cdot \sin \angle \gamma$, рассмотрим отношение площадей $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$. Тогда $S_{ABC} : S_{MBN} = (0,5 \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B) : (0,5 \cdot MB \cdot NB \cdot \sin \angle B) = (k \cdot NB \cdot k \cdot MB) : (MB \cdot NB) = k^2$.



Свойство

5



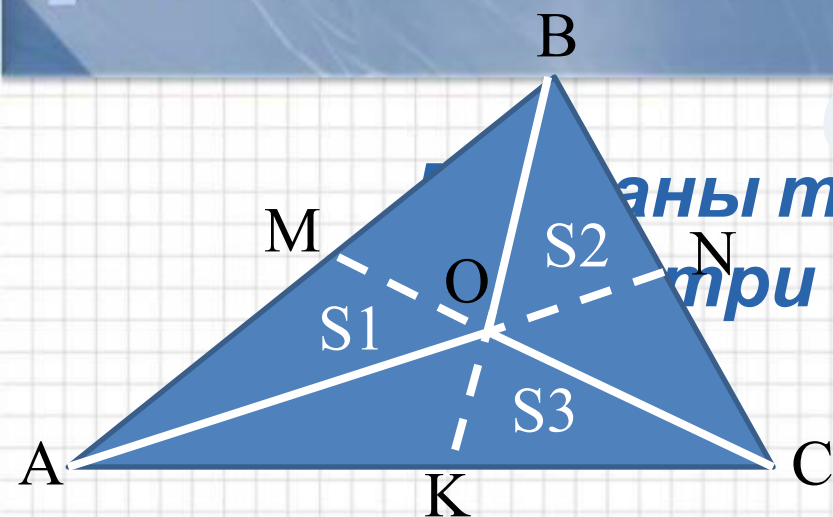
Медиана треугольника делит его на две равновеликие части.

Доказательство: Рассмотрим $\triangle ABC$, где BM – медиана, тогда $AM=MC=0,5 \cdot AC$. Медиана делит треугольник на два равновеликих. Найдем площади треугольников $\triangle ABM$ и $\triangle BMC$ по формуле $S=0,5 \cdot a \cdot h$. Получим, $S_{ABM}=0,5 \cdot AM \cdot h$ и $S_{MBC}=0,5 \cdot MC \cdot h$. Значит, $S_{ABM}=S_{MBC}$.



Свойст

6



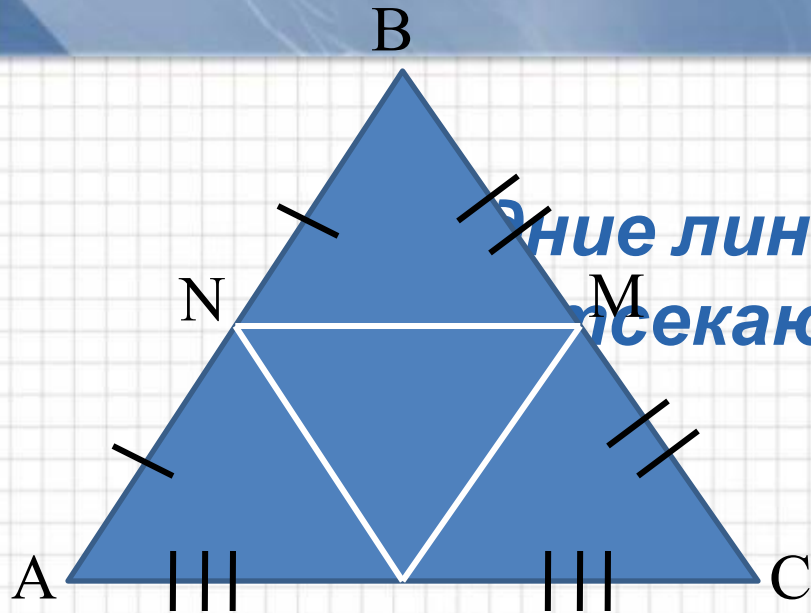
Медианы треугольника делят его на три равновеликие части.



Доказательство: Рассмотрим $\triangle ABC$. Проведем медианы из всех вершин, которые пересекаются в точке O . Получим треугольники $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle AOC$. Пусть их площади равны соответственно S_1 , S_2 , S_3 . А площадь $\triangle ABC$ равна S . Рассмотрим $\triangle ABK$ и $\triangle CBK$, они равной площади, т.к. BK медиана. В треугольнике $\triangle AOC$ OK - медиана, значит, площади треугольников $\triangle AOK$ и $\triangle COK$ равны. Отсюда следует, что $S_1 = S_2$. Аналогично можно доказать, что $S_2 = S_3$ и $S_3 = S_1$.

Свойство

7



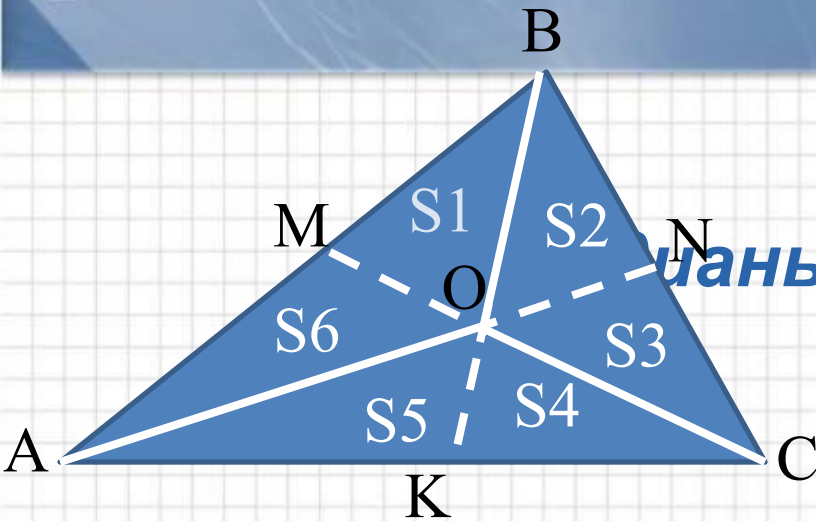
Средняя линия треугольника площади S отсекает от него треугольники площади $\frac{1}{4} \cdot S$.

Доказательство: Рассмотрим $\triangle ABC$. NM - средняя линия в треугольнике и она равна половине основания AC . Если $S_{ABC} = S$, то $S_{NBM} = 0,5 \cdot NM \cdot h_1 = 0,5 \cdot (0,5 \cdot AC) \cdot (0,5 \cdot h) = 0,25 \cdot S$. Аналогично, можно доказать, что площади всех треугольников равны одной четвертой части площади $\triangle ABC$.



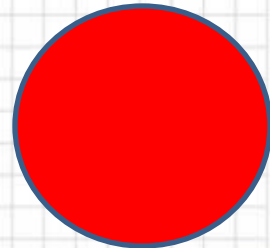
Свойств

8



Медианы треугольника делят его на равновеликих частей.

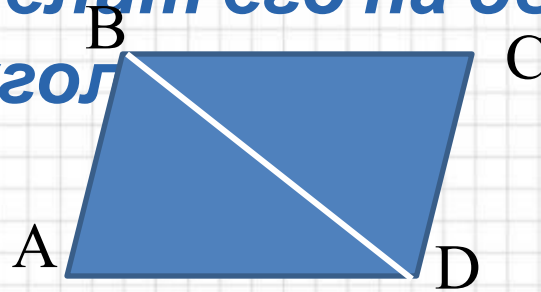
Доказательство: По свойству №7 площади $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle AOC$ равны. По свойству №5 площади $\triangle AOM$, $\triangle BOM$ равны. Значит $S_1 = S_6$. Аналогично $S_2 = S_3$. Если $S_1 + S_6 = S_2 + S_3$ и $2S_1 = 2S_2$ значит $S_1 = S_2$. И так далее. Получим, что все шесть треугольников имеют равные площади и они составляют шестую часть от площади $\triangle ABC$.



Утверждение 1


Два треугольника являются равновеликими, если равны их высоты и основания.

Задача 1. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника.

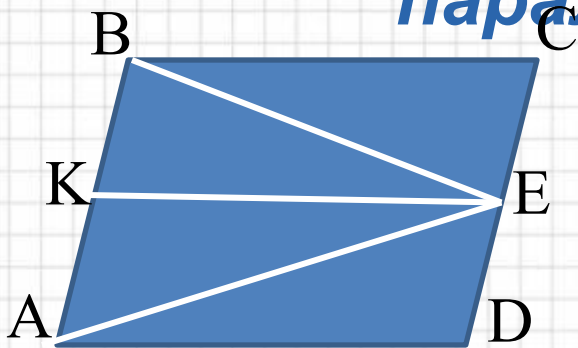


Решение. Высоты треугольников ABD и BCD равны. $AD = BC$ (по свойству параллелограмма). Тогда в силу утверждения 1 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCD}$



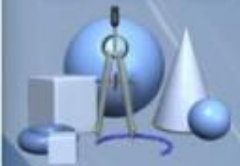


Задача 2. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка E . Зная, что $S_{\triangle ABE} = S$, найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

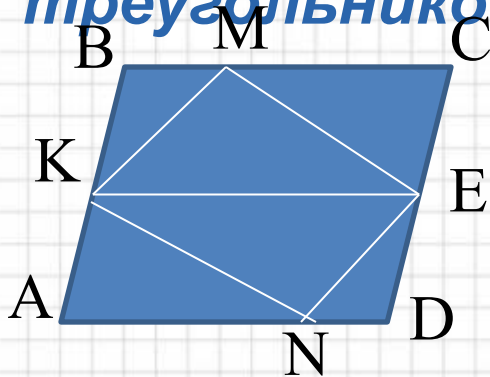


Решение. Проведем дополнительное построение: $KE \parallel AD$. Тогда из задачи 1 следует, что $S_{\triangle KBE} = S_{\triangle CBE}$, а $S_{\triangle AKE} = S_{\triangle ADE}$. Отсюда, $S_{ABCD} = 2S$.





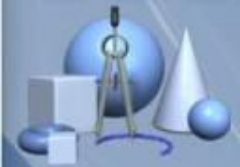
Задача 3. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и CD взяты произвольные точки M и N . Докажите, что площадь четырехугольника $KMEN$ равна площади четырех образовавшихся треугольников.



Решение. Проведем отрезок KE . Тогда в силу задачи 2 $S_{\Delta KME} = S_{\Delta KMB} + S_{\Delta MEC}$, а $S_{\Delta KNE} = S_{\Delta KAN} + S_{\Delta EDN}$.

Отсюда, $S_{\Delta KMEN} = S_{\Delta KMB} + S_{\Delta MEC} + S_{\Delta KNE} + S_{\Delta EDN}$.

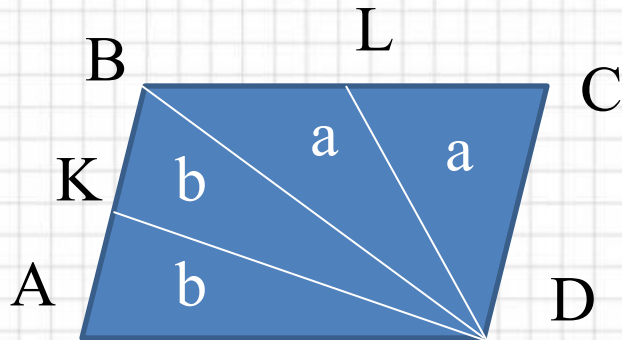




Утверждение 2.

Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.

Задача 4. В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина AB , а L – середина BC . Зная, что $S_{KBLD} = S$, найдите S_{ABCD} .



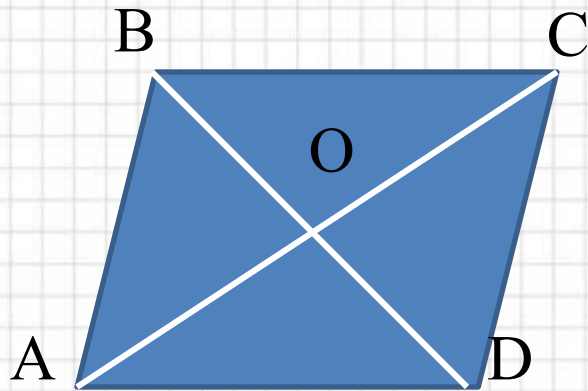
Решение.

Проведем диагональ BD . Тогда, исходя из утверждения 2, получим, что $S_{ABCD} = S$.





Задача 5. Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.

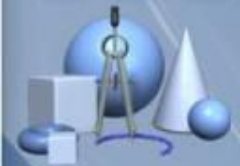


Решение.

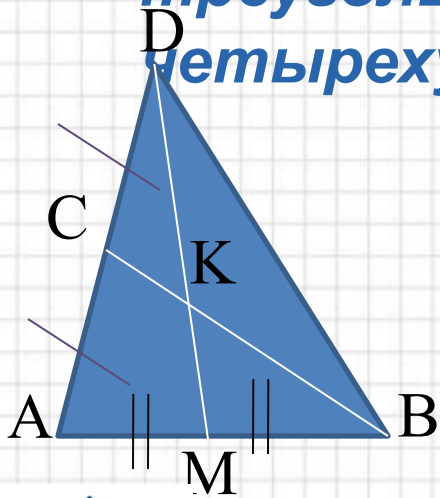
В силу задачи 1 и утверждения 2
будем иметь

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle COD} = S_{\triangle DOA}$$





Задача 6. На продолжении стороны треугольника ABC взята точка D так, что $AC = CD$. Пусть M – середина стороны AB , а K – точка пересечения отрезков BC и MD . Докажите, что площадь треугольника BKD равна площади четырехугольника $AMKC$.



В треугольнике ABD DM и BC – медианы. Поэтому $S_{\triangle AMD} = S_{\triangle BMD}$ и $S_{\triangle ACB} = S_{\triangle CDB}$.

Эти равенства можно записать так: $S_{AMKC} + S_{\triangle CKD} = S_{\triangle CDK} + S_{\triangle BKD}$, $S_{AMKC} + S_{\triangle MBK} = S_{\triangle CKD} + S_{\triangle BKD}$

Сложив эти равенства и упростив выражение, получим $S_{AMKC} = S_{\triangle BKD}$.



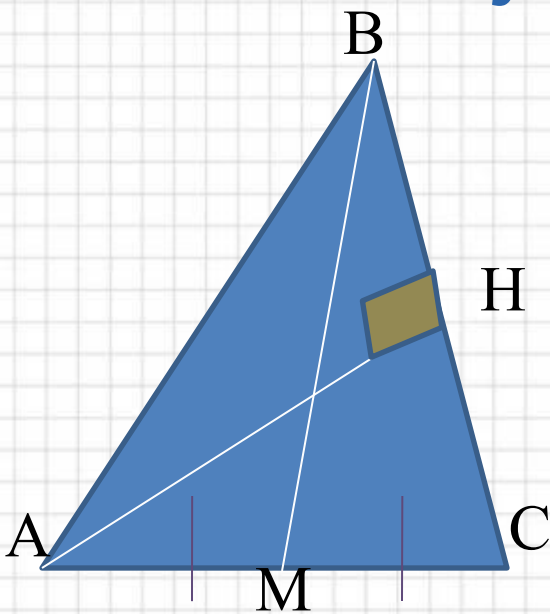


Задача типа С4 на ЕГЭ



Медиана BM $\triangle ABC$ равна его высоте $АН$.

Найдите угол MBC .



Решение. Пусть $\angle MBC = \alpha$. Найдем площадь треугольника ABC двумя способами. Так как медиана BM треугольника ABC разбивает его на два равновеликих треугольника, то $S_{ABC} = 2S_{CBM} = 2 \cdot 0,5 \cdot BC \cdot BM \cdot \sin \alpha = BC \cdot BM \cdot \sin \alpha$. С другой стороны, $S_{ABC} = 0,5 \cdot BC \cdot AH$. Учитывая, что $AH = BM$, приравняем площади $BC \cdot BM \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot BC \cdot AH$. Получаем, что $\sin \alpha = 0,5$. Отсюда $\alpha = 30^\circ$ или $\alpha = 150^\circ$.





Список литературы.

- <http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=440813>
- <http://artgrafica.net/2010/05/14/free-power-point-templates.html>
- <http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=814114>
- <http://www.etudes.ru/>

