

Координатный метод в решении задач на плоскости

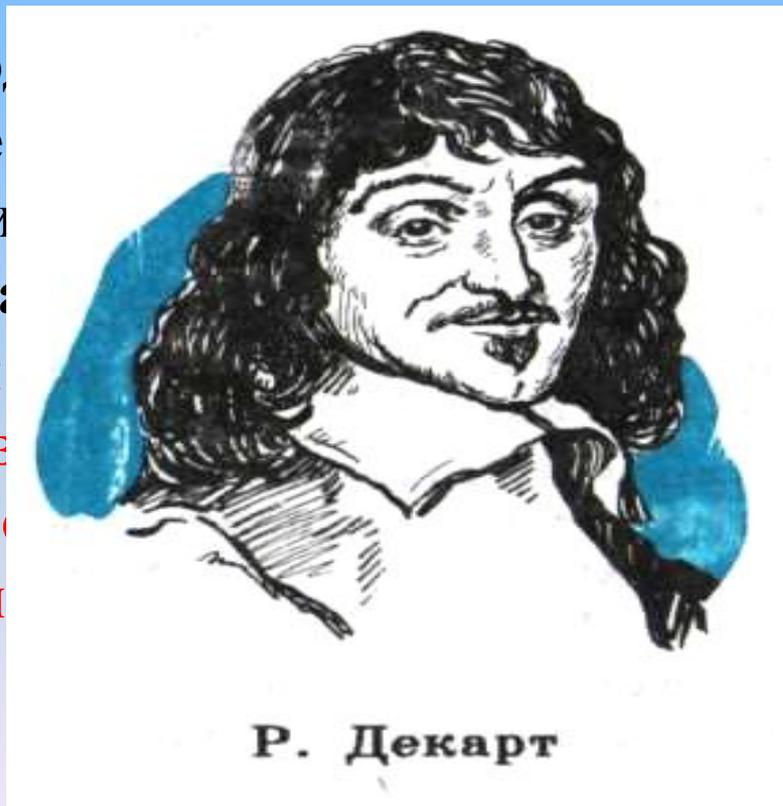
**Белобородова Н. Е.,
учитель математики
МАОУ «СОШ №2»**

Чернушка 2012

Г.

Координатный метод, возникновение которого обычно связывают с именем великого французского математика и философа Рене Декарта, жившего в первой половине 17 века, произвел настоящий переворот в геометрии и не только в ней.

**Метод коор
в соответствие
линиям, те или
метод координ
языка на язык
проблемы прев
получаем возм
геометрически**

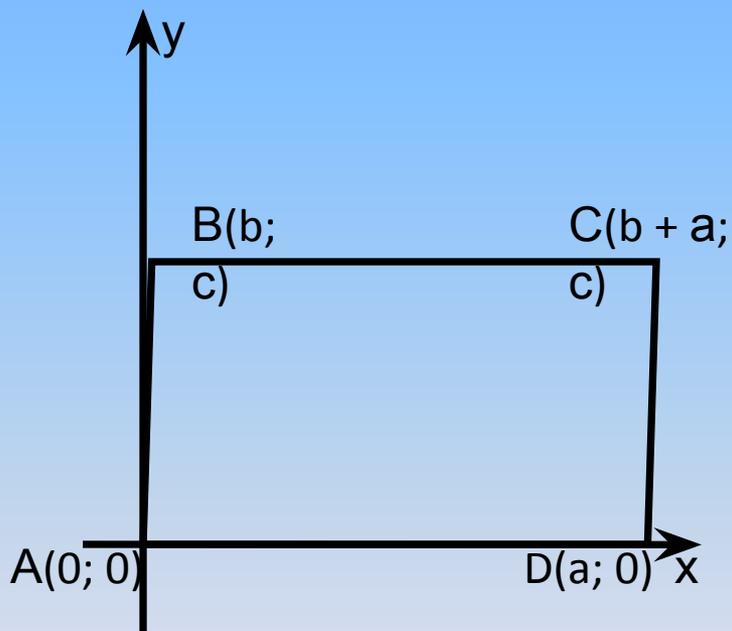


**способ поставить
– фигурам,
отношения. Иначе,
геометрического
трические
ие, и мы
решения
годы.**

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

■ Применение прямоугольных координат к решению задач

Задача 1: Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.



Решение: 1. Пусть ABCD – данный параллелограмм. Введем систему координат так, как показано на рисунке. Если $AD = BC = a$, а точка B имеет координаты $(b; c)$, то $D(a; 0)$, точка C $(a + b; c)$.

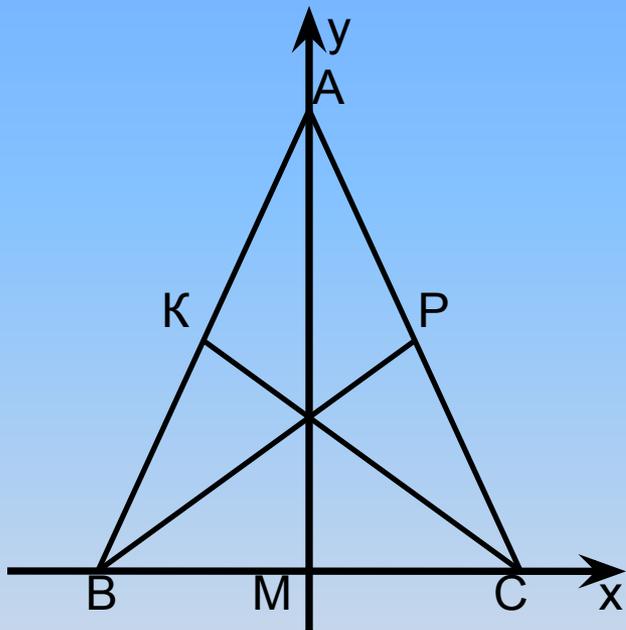
2. Используя формулу расстояний между точками, находим $AB^2 = b^2 + c^2$, $AD^2 = a^2$, $AC^2 = (b + a)^2 + c^2$, $BD^2 = (a - b)^2 + c^2$, тогда

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AB^2 + AD^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$AC^2 + BD^2 = (b + a)^2 + c^2 + (a - b)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

Таким образом, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$, что и требовалось доказать.

Задача 2: Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника равна 160 см, а основание треугольника равно 80 см. Найдите две другие медианы этого треугольника.



Решение: 1. Пусть треугольник ABC – данный равнобедренный треугольник, AM – медиана. Введём систему координат таким образом, что $M(0; 0)$, точка A лежит на оси Oy, основание BC – на оси Ox. Так как $BC = 80$ см, то $B(-40; 0)$, $C(40; 0)$; $AM = 160$, значит, $A(0; 160)$.

2. По формуле координат середины отрезка найдём середины двух других сторон треугольника:

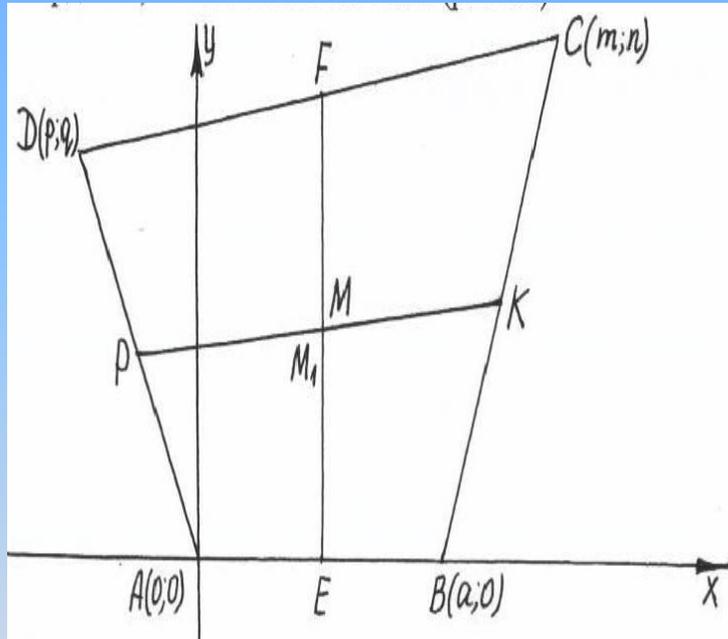
P – середина AC, $P(20; 80)$

K – середина AB, $K(-20; 80)$

3. Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем, что $BP = \sqrt{(-40 - 20)^2 + (80 - 0)^2} = 100$ см, $CK = \sqrt{(-20 - 40)^2 + 80^2} = 100$ см

Ответ: $BP = CK = 100$ см

Задача 3: Докажите, что середины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, совпадают.



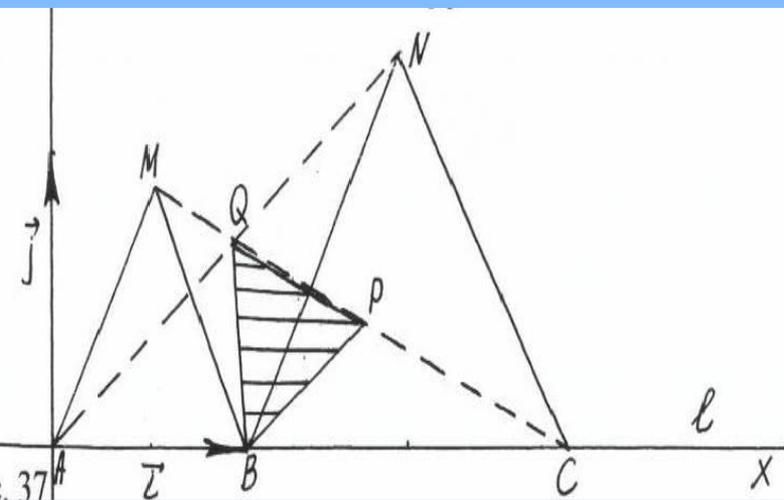
Решение: 1. Пусть дан произвольный четырехугольник ABCD. Расположим его на координатной плоскости так, чтобы точка A совпала с началом координат, а B оказалась на оси x.

2. Введем координаты вершин данного четырехугольника: $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(m; n)$, $D(p; q)$. Тогда координаты середин сторон четырехугольника будут следующие: $E(a/2; 0)$, $F((m + p)/2; (n + q)/2)$, $K((a + m)/2; n/2)$, $P(p/2; q/2)$.

3. Координаты середины M отрезка EF:
 $M((a + m + p)/4; (n + q)/4)$.
Координаты середины M_1 отрезка KP:
 $M_1((a + m + p)/4; (n + q)/4)$.

4. Координаты точек M и M_1 совпадают. Значит, середина отрезка EF совпадает с серединой отрезка KP, что и требовалось доказать

Задача 4: На прямой l даны три точки A, B, C так, что точка B лежит между A и C . По одну сторону от прямой l построены равносторонние треугольники AMB и BNC . Докажите, что середина отрезка MC , середина отрезка NA и точка B являются вершинами равностороннего треугольника.



Решение: 1. Пусть P – середина отрезка MC , а Q – середина отрезка AN .

2. Введем прямоугольную систему координат. Если

$BC = a$, то легко убедиться в том, что вершины данных треугольников имеют координаты: $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1 + a; 0)$, $M(1/2; \sqrt{3}/2)$, $N(1 + a/2; \sqrt{3}a/2)$.

3. Определим координаты точек $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$:

$$x_1 = (1/2 + 1 + a)/2 = (3 + 2a)/4, \quad y_1 = \sqrt{3}/4, \quad \text{т.е.}$$

$$P\left(\frac{3 + 2a}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$x_2 = (2 + a)/4, \quad y_2 = \sqrt{3}a/4, \quad \text{т.е. } Q\left(\frac{2 + a}{4}; \frac{\sqrt{3}a}{4}\right).$$

4. Пользуясь формулой для вычисления длины отрезка по координатам концов, получаем:

$$BQ = \sqrt{\left(\frac{2 + a}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 - a + 1}{4}},$$

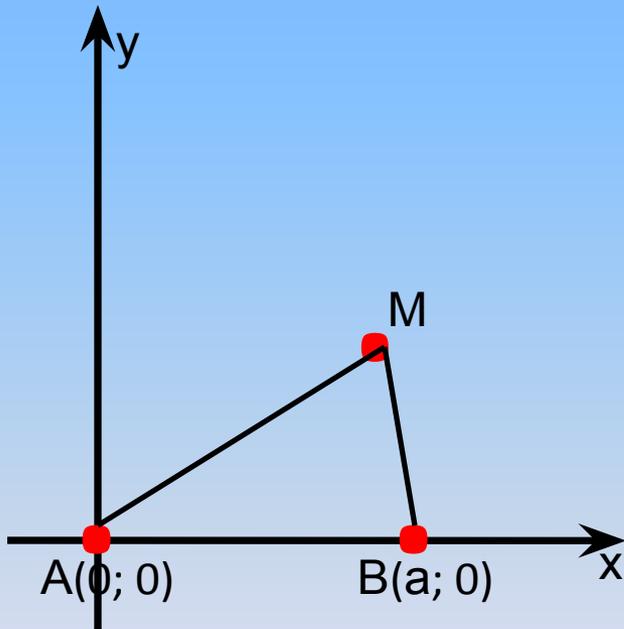
$$PQ = \sqrt{\left(\frac{2 + a}{4} - \frac{3 + 2a}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 - a + 1}{4}},$$

$$PB = \sqrt{\left(1 - \frac{3 + 2a}{4}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 - a + 1}{4}},$$

т.е. $BQ = PQ = PB$.

Задачи на нахождение геометрических мест точек

Задача 5: Даны две точки А и В. Найдите множество всех точек, для каждой из которых расстояние от точки А в два раза больше расстояния от точки В.



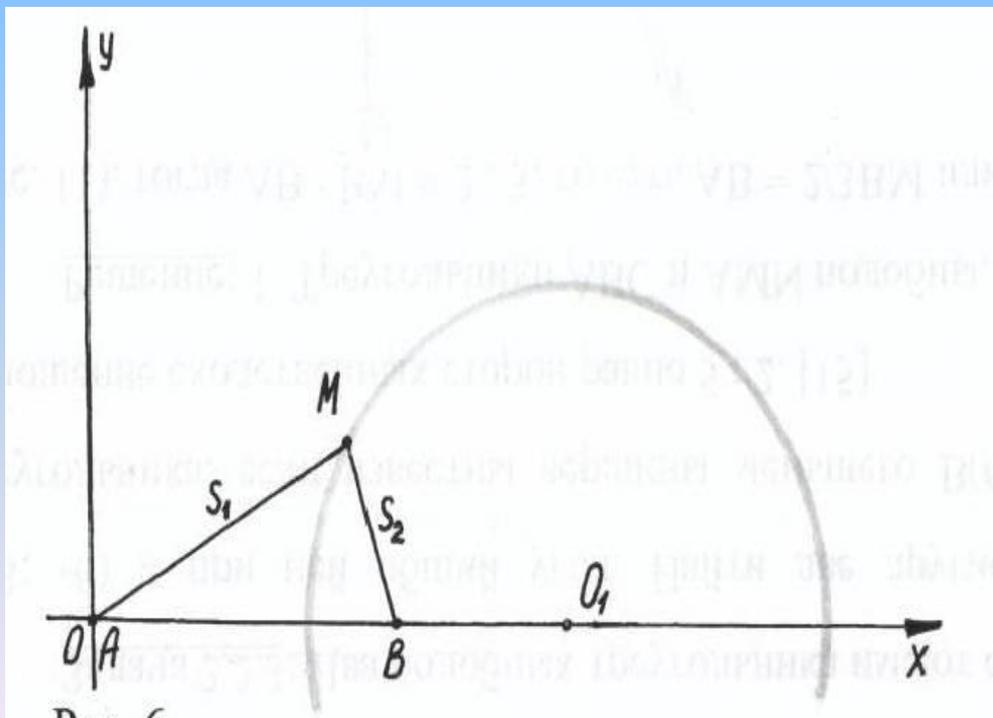
Решение: 1. Введем прямоугольную систему координат так, что $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, где $a = AB$.

2. Найдём расстояние от произвольной точки $M(x; y)$ до точек А и В: $AM = \sqrt{x^2 + y^2}$; $BM = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$.

3. Если точка $M(x; y)$ принадлежит искомому множеству, то $AM = 2BM$ или $AM^2 = 4BM^2$. Поэтому её координаты удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 4((x - a)^2 + y^2)$. Если точка $M(x; y)$ не принадлежит искомому множеству, то её координаты не удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, полученное уравнение и есть уравнение искомого множества.

4. Преобразуя $x^2 + y^2 = 4((x - a)^2 + y^2)$, $3x^2 + 3y^2 - 8ax + 4a^2 = 0$, получаем $(x - (4/3)a)^2 + y^2 = ((2/3)a)^2$. То есть искомым множеством является окружность радиуса $(2/3)a$ с центром в точке $C((4/3)a; 0)$.

Задача 6: Два предприятия А и В производят продукцию с одной и той же ценой m за одно изделие. Однако автопарк, обслуживающий предприятие А, оснащен более современными и более мощными грузовыми автомобилями. В результате транспортные расходы на перевозку одного изделия составляют для предприятия А 10 руб. на 1 км, а для предприятия В 20 руб. на 1 км. Расстояние между предприятиями 300 км. Как территориально должен быть разделен рынок сбыта между двумя предприятиями для того, чтобы расходы потребителей при покупке изделий были минимальными?



Решение: Для решения данной задачи воспользуемся методом координат. Введем систему координат так, чтобы ось x проходила через пункты А и В, а ось y – через точку А. Пусть M – произвольная точка, $M(x, y)$, s_1 и s_2 – расстояния от точки M до предприятий А и В.

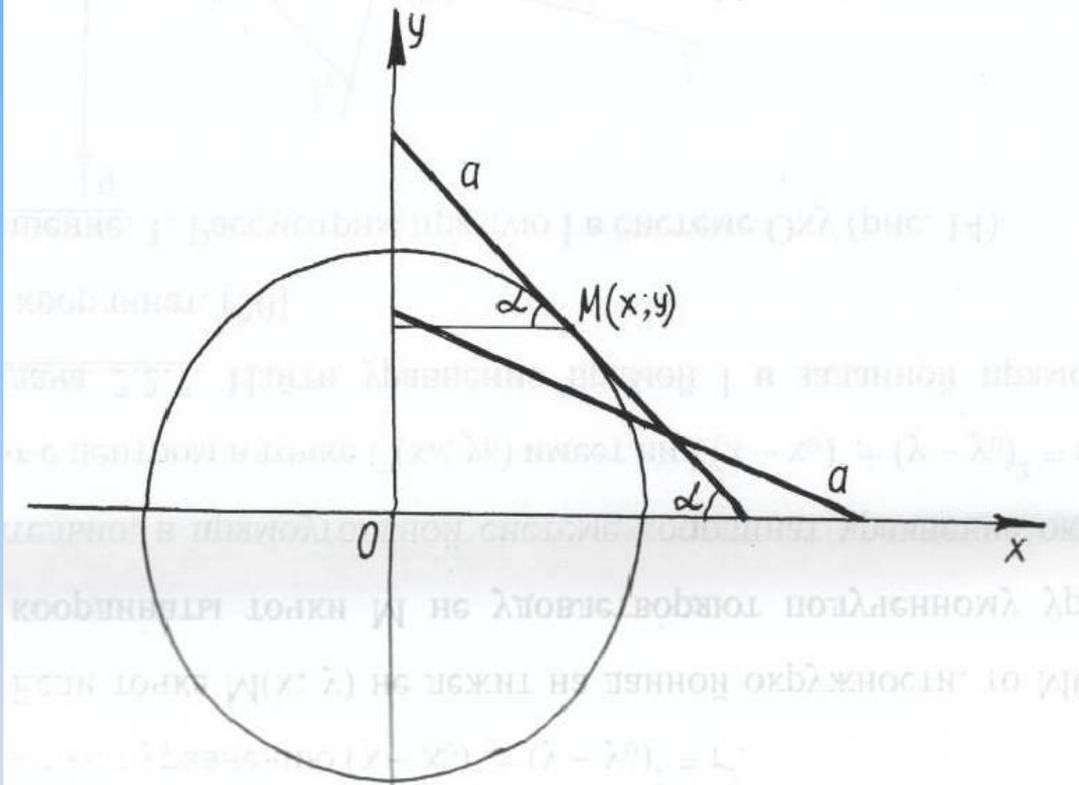
При доставке груза из пункта А расходы равны $m + 10s_1$. При доставке груза из пункта В расходы равны $m + 20s_2$. Если для пункта М выгоднее доставлять груз с предприятия А, то $m + 10s_1 < m + 20s_2$, откуда $s_1 < 2s_2$, в обратном случае получим $s_1 > 2s_2$.

Таким образом, границей области для каждой точки, до которой расходы на перевозку груза из пунктов А и В равны, будет множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $s_1 = 2s_2$.

Выразим s_1 и s_2 через координаты: $s_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $s_2 = \sqrt{(300-x)^2 + y^2}$.
Имея в виду $s_1 = 2s_2$, получим $(x-400)^2 + y^2 = 200^2$.

Это есть уравнение окружности. Следовательно, для всех пунктов, попадающих во внутреннюю область круга, выгоднее привозить груз из пункта В, а для всех пунктов, попадающих во внешнюю часть круга, - из пункта А.

Задача 7: Лестница, стоящая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котенок, сидящий на середине лестницы?

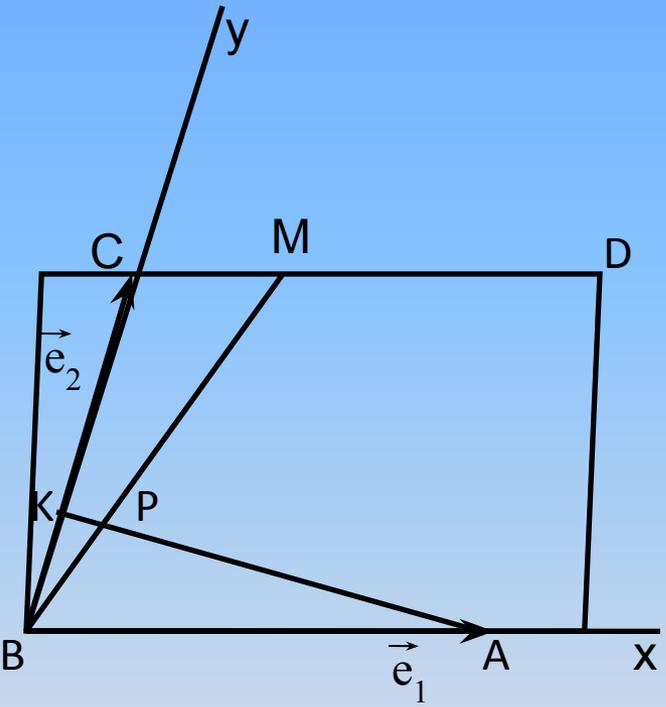


Решение: Выберем прямоугольную систему координат, где ось x находится на полу, а ось y – на стене. Допустим, что лестница имеет длину, равную $2a$, тогда из рисунка видно, что точка $M(x, y)$, находясь все время в середине лестницы, имеет координаты $x = a \cos \alpha$, $y = a \sin \alpha$.

$OM^2 = x^2 + y^2 = (a \cos \alpha)^2 + (a \sin \alpha)^2 = a^2$, т.е. $x^2 + y^2 = a^2$. Следовательно, котенок будет двигаться по дуге окружности

■ Применение аффинных координат к решению задач

Задача 8: Точки К и М делят стороны ВС и CD параллелограмма ABCD в отношении $BK:KC = 1:2$, $CM:MD = 1:2$. В каком отношении делятся отрезки АК и ВМ точкой пересечения?



Решение: 1. Введем аффинную систему координат с началом в точке В и координатными векторами $\vec{e}_1 = \overrightarrow{BA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}$ (рис. 45). Тогда точки К и М имеют координаты: $K(0; 1/3)$, $M(1/3; 1)$.

2. Составим уравнения прямых ВМ и АК, как прямых, проходящих через две точки. Уравнения прямых ВМ и АК имеют вид: ВМ: $3x - y = 0$, АК: $x + 3y - 1 = 0$.

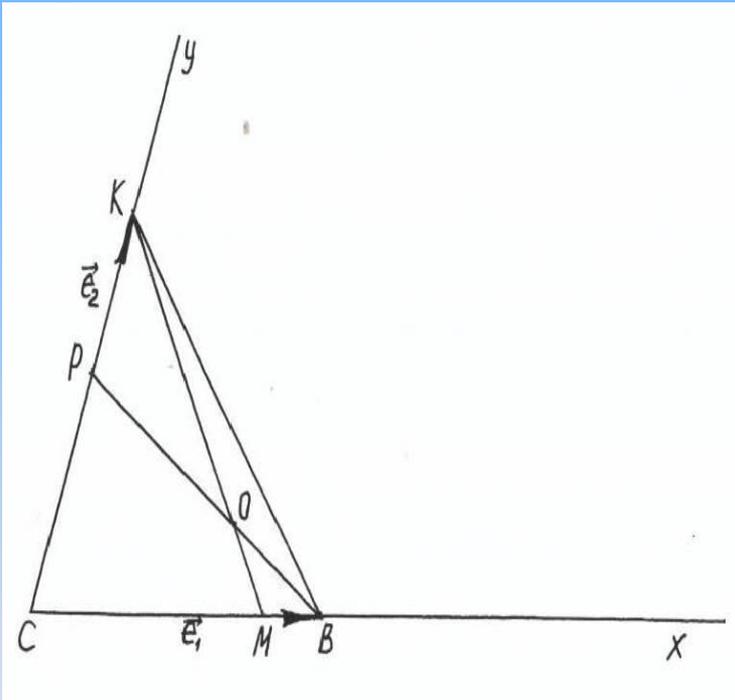
3. Найдем координаты точки Р пересечения этих прямых. Для этого решим оба уравнения в системе. Получим $P(0,1; 0,3)$.

4. Вычислим отношение λ , в котором точка Р делит отрезки КА и ВМ.

$\lambda_1 = (x - x_1)/(x_2 - x) = (y - y_1)/(y_2 - y) = (0,1 - 0)/(1 - 0,1) = 1/9$, т.е. точка Р делит отрезок КА в отношении 1/9.

$\lambda_2 = (x - x_1)/(x_2 - x) = (y - y_1)/(y_2 - y) = (0,1 - 0)/(1/3 - 0,1) = 3/7$, т.е. точка Р делит отрезок ВМ в отношении 3/7.

Задача 9: На сторонах СК и СВ треугольника СКВ взяты соответственно точки Р и М, которые делят эти стороны в отношении: $CP:PK = 3:2$, $CM:MB = 4:1$. В каком отношении делят друг друга отрезки КМ и ВР?



Решение: 1. Введем аффинную систему координат с началом в точке С и координатными векторами $\vec{e}_1 = \vec{CB}$, $\vec{e}_2 = \vec{CK}$, тогда вершины треугольника СКВ будут иметь координаты: $C(0; 0)$, $K(0; 1)$, $B(1; 0)$ и $P(0; 3/5)$, $M(4/5; 0)$.

2. Найдем координаты точки О пересечения ВР и КМ. Для этого составим уравнения прямых ВР и КМ.

$$BP: 3x + 5y - 3 = 0, \quad KM: 5x + 4y - 4 = 0.$$

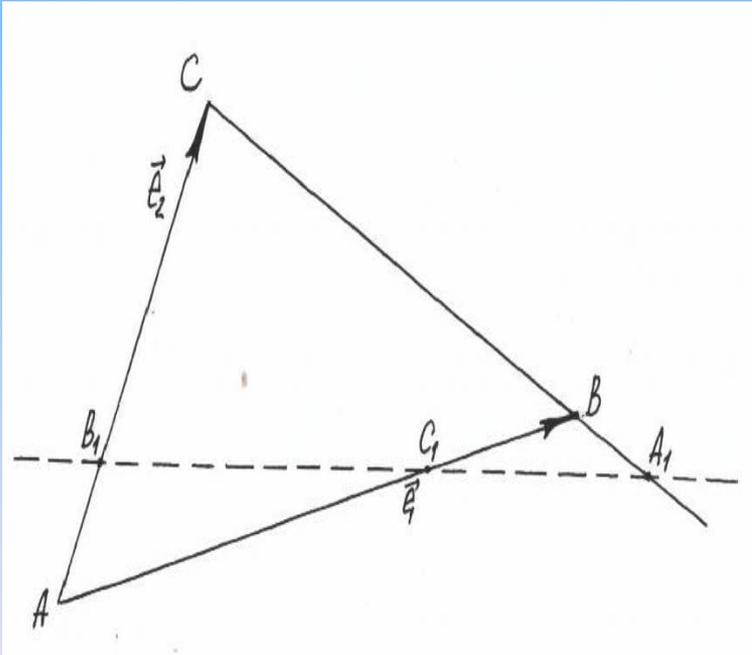
Решив в системе уравнения, получим $O(8/13; 3/13)$.

3. Вычислим отношение λ , в котором отрезки делят друг друга.

$$\lambda = (x - x_1)/(x_2 - x) = (y - y_1)/(y_2 - y) = (3/13 - 0)/(1 - 3/13) = 3/10, \text{ т.е. точка } O \text{ делит отрезок } MK \text{ в отношении } 3/10.$$

$$\lambda = (x - x_1)/(x_2 - x) = (y - y_1)/(y_2 - y) = (8/13 - 1)/(0 - 8/13) = 5/8, \text{ т.е. точка } O \text{ делит отрезок } BP \text{ в отношении } 5/8.$$

Задача 10: (Теорема Менелая) Для того, чтобы три точки A_1, B_1, C_1 , лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (или на их продолжениях), принадлежали одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы $\overrightarrow{AC_1} / \overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{BA_1} / \overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} / \overrightarrow{AB_1} = 1$ (символом $\overrightarrow{AC_1} / \overrightarrow{BC_1}$ назовем отношение направленных отрезков, лежащих на одной прямой, которое положительно, если они сонаправлены, и отрицательно, если они противоположно направлены; $|\overrightarrow{AC_1} / \overrightarrow{BC_1}| = |\overrightarrow{AC_1}| / |\overrightarrow{BC_1}|$).



Решение: 1. Введем аффинную систему координат с началом в точке A и координатными векторами $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$.
 2. Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ отношения такие, что $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 \overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{BA_1} = \lambda_1 \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{CB_1} = \lambda_2 \overrightarrow{B_1A}$, и определим координаты точек A_1, B_1, C_1 . В выбранной системе координат вершины треугольника ABC будут иметь координаты $A(0; 0), B(1; 0), C(0; 1)$. Если $A_1(x_1, y_1), B_1(x_2, y_2), C_1(x_3, y_3)$, то
 $x_1 = (1 + \lambda_1 \cdot 0) / (1 + \lambda_1) = 1 / (1 + \lambda_1)$,
 $y_1 = (0 + \lambda_1 \cdot 1) / (1 + \lambda_1) = \lambda_1 / (1 + \lambda_1)$;
 $x_2 = 0, y_2 = 1 / (1 + \lambda_2)$; $x_3 = \lambda_3 / (1 + \lambda_3), y_3 = 0$.

3. Для того, чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 1/(1+\lambda_1) & \lambda_1/(1+\lambda_1) & 1 \\ 0 & 1/(1+\lambda_2) & 1 \\ \lambda_3/(1+\lambda_3) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

откуда $1/(1+\lambda_1)(1+\lambda_2) + \lambda_3/(1+\lambda_3) \cdot [\lambda_1/(1+\lambda_1) - 1/(1+\lambda_2)] = 0$.

После элементарных преобразований получаем: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 + 1 = 0$. Таким образом,

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1 \text{ или}$$

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} = 1.$$

Возможности использования метода координат в школьной практике

Использование координатного метода в школьной практике возможно:

- На математических кружках, факультативах;
- На индивидуальных занятиях с более увлеченными математикой учащимися;
- В проектной деятельности.

Темы проектов с использованием координатного метода:

- Аффинные координаты;
- Деление отрезка в данном отношении;
- Комплекс задач, связанных с нахождением суммы квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин правильного многоугольника, которая постоянна, если центр окружности совпадает с центром многоугольника (прил. 3).

Задач планиметрии, решаемых введением системы координат, на данный момент в школьном курсе геометрии недостаточно. Метод координат на плоскости значительно упрощает решение задач.

- Решение задач, как в прямоугольных, так и в аффинных координатах на плоскости значительно упрощается, в связи с тем, что геометрическая проблема сводится к алгебраической;
- Введение системы координат позволяет находить длины отрезков, геометрические места точек и решать задачи на установление свойств фигур;
- Использование метода координат расширяет множество задач, решаемых в школе, его применение возможно в исследовательской деятельности учащихся.

Внедрение метода координат на плоскости в школьную практику необходимо.