Тригонометрические уравнения Методы решений

История тригонометрии

- Тригонометрия – слово греческое и в буквальном переводе означает измерение треугольников (trigwnon - треугольник, а metrew- измеряю)
- Возникновение тригонометрии связано с землемерением, астрономией и строительным делом
- Название науки возникло сравнительно недавно, многие относимые сейчас к тригонометрии понятия и факты были известны ещё две тысячи лет назад
- Впервые способы решения треугольников были найдены древнегреческими астрономами Гиппархом (2 в. до н. э.) и Клавдием Птолемеем (2 в. н. э.)
- Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли:

  ~Аль-Батани

  ~Абу-ль-Вафа

  ~Мухамед-бен Мухамед

  ~Насиреддин Туси Мухамед

Тригонометрические уравнения

- Тригонометрические уравнения - это равенство тригонометрических выражений, содержащих неизвестное(переменную) под знаком тригонометрических функций
- Решить тригонометрическое уравнение, значит, найти все его корни

Уравнения вида *sin x=a*

- Уравнение sin x=a имеет решение при a принадлежащем [-1; 1]
- Общая формула для решения подобных уравнений:

  $x=(-1)^{n}\arcsin a + \pi n$, где n принадлежит Z и $\arcsin a$ принадлежит $[-\pi/2; \pi/2]$
- Примеры:

  sin2x=0,5

  sin x=-0,3

Уравнения вида $\cos x=a$

- Уравнение $\cos x=a$ имеет решение при a принадлежащем $[-1; 1]$
- Общая формула для решения подобных уравнений:

  $x=+/-\arccos a + 2\pi n$, где n принадлежит Z и $\arccos a$ принадлежит $[0; \pi]$
- Полезно знать, что $\arccos(-a)= \pi-\arccos a$
- Примеры

  $\cos 4x=-1$

  $\cos 0{,}5x=0$

Уравнения вида *tg x=a*

- Уравнение tg x=a имеет решение при всех значениях a
- Общая формула для решения подобных уравнений:

  x=arc*tg* a + Пn, где n принадлежит Z
- Полезно помнить, что arc*tg*(-a)=-arc*tg* a
- Примеры

  tg7x=25

  tg x=0,7

Уравнения вида $ctg\ x=a$

- Уравнение ctg x=a имеет решение при всех значениях a
- Общая формула для решения подобных уравнений:

  x=arcctg a + **П**n, где n принадлежит Z и arcctg a принадлежит [0; **П**]

Полезно помнить, что arcctg(-a)=-arcctg a

- Примеры

  ctg9x=-0,1

  ctg 0,6x=127

Метод подстановки

- Уравнения вида $a\sin^2x+b\sin x+c=0$, $a\cos^3x+b\cos x+c=0$,

  $a\,tg^2x+b\,tg\,x+c=0$, $a\,ctg^4x+b\,ctg^2x+c=0$ сводятся к одной и той же функции относительно одного и того же выражения, входящего только под знак функции

  То есть при замене sinx=q, cosx=w, tgx=e, ctgx=r получаются алгебраические уравнения:

Уравнения вида $aq^2x+bqx+c=0$, $aw^3x+bwx+c=0$,

$ae^2x+bex+c=0$, $ar^4x+br^2x+c=0$

После нахождения корней уравнений необходимо вернуться к sinx=q, cosx=w, tgx=e, ctgx=r

не забыв что sinx=a, cosx=a, при a принадлежащем [-1; 1]

Однородные уравнения

- Уравнения вида $a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=0$, $a\sin x+b\cos x+c=0$ и т.д. называются однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$
- Делением на $\cos x^*$, где *-степень уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно функции $tg x$
- Рассмотрим уравнение $a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=0$ и разделим

  его на $\cos^2x$, получим: $a\,tg^2x+b\,tg x+c=0$ при a не равном 0 оба уравнения равносильны, т.к. $\cos x$ не равен 0, если же $\cos x=0$, то из первого уравнения видно, что $\sin x=0$, что невозможно т.к. теряет смысл основное тригонометрическое тождество.