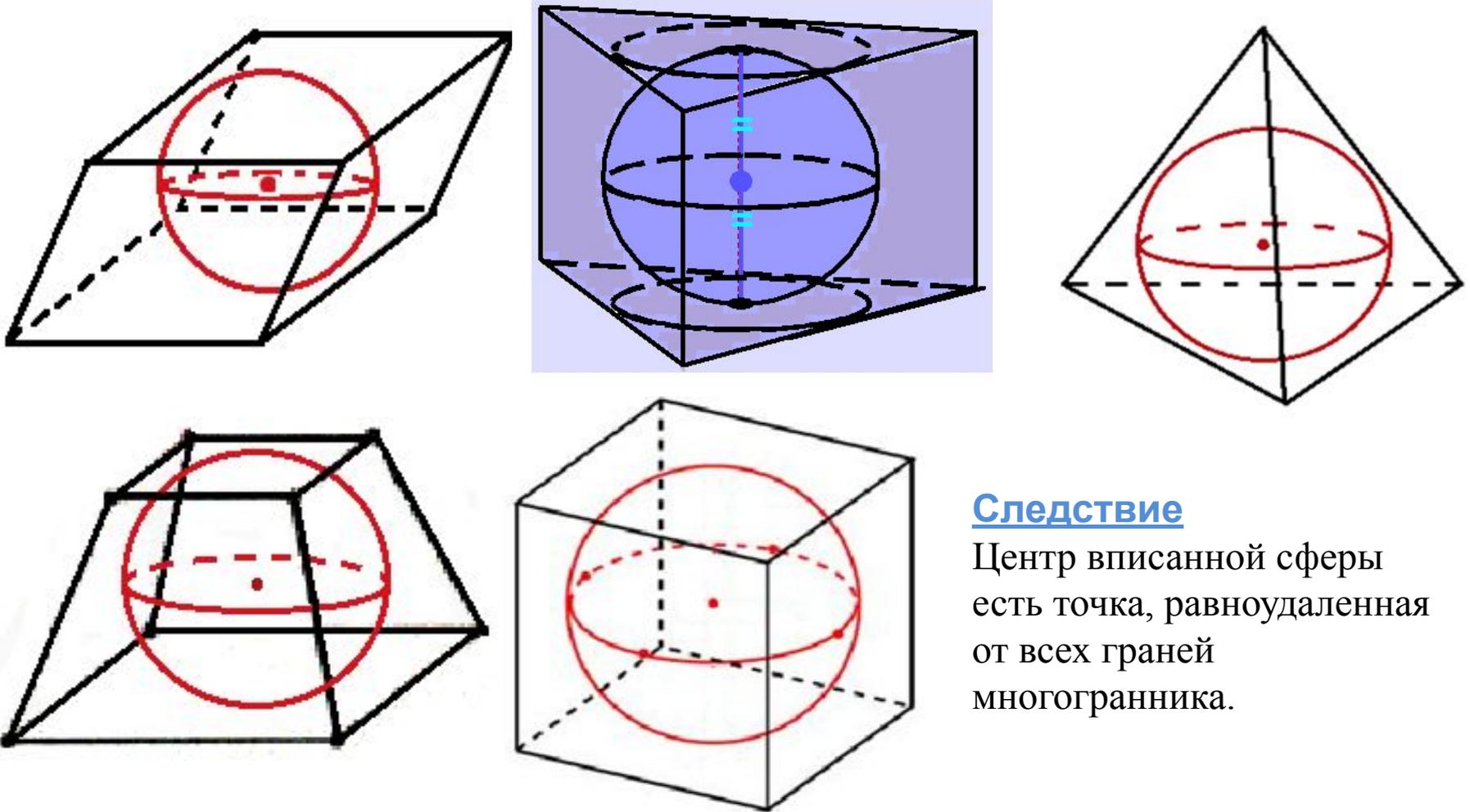


# **Сфера, вписанная в многогранник**

# Сфера, вписанная в многогранник

## Определение

Многогранник называется **описанным около сферы** (а сфера **вписанной в многогранник**), если все грани многогранника касаются этой сферы.



## Следствие

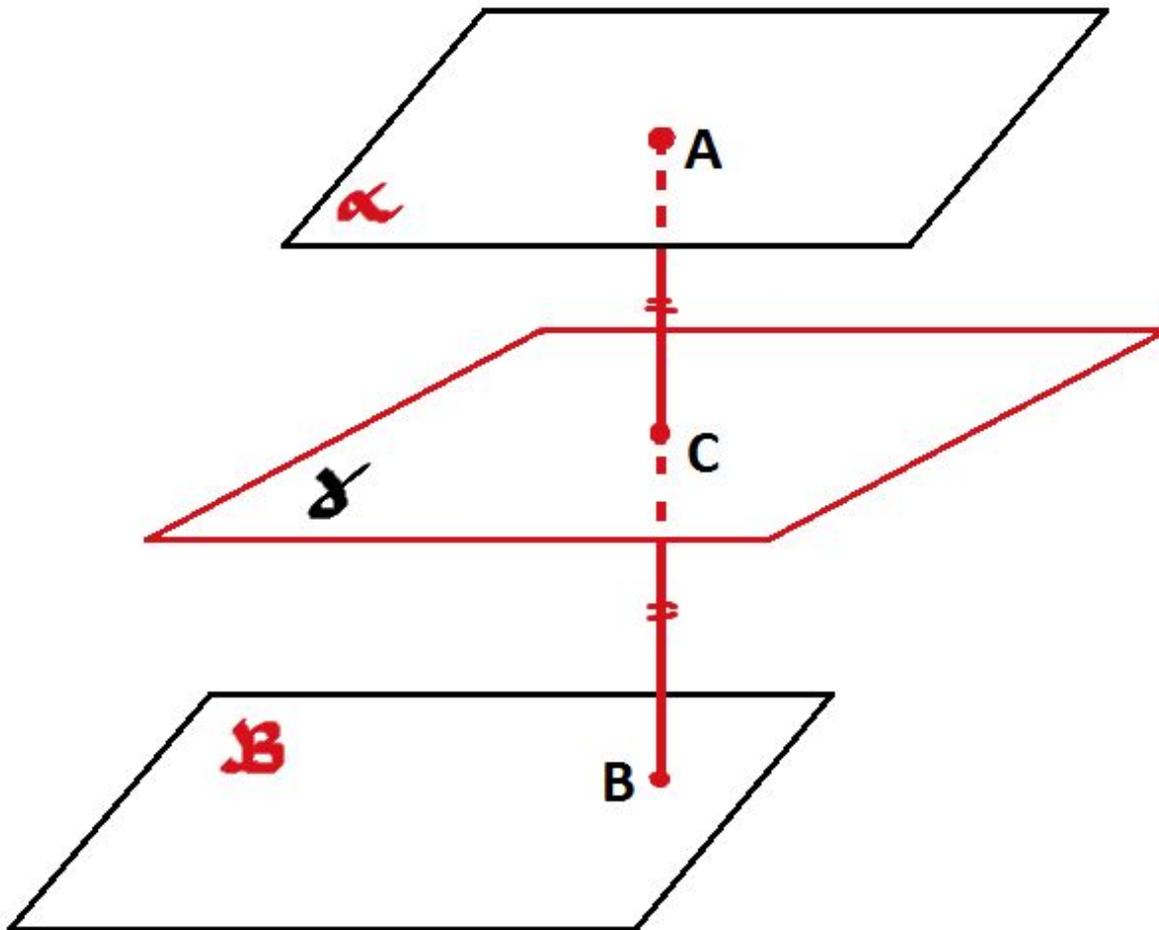
Центр вписанной сферы есть точка, равноудаленная от всех граней многогранника.

# Подготовительные задачи

1. Где расположено множество точек пространства, равноудаленных от двух плоскостей?

## Теорема 1

Множество точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей, есть плоскость, параллельная данным плоскостям и проходящая через середину общего перпендикуляра этих плоскостей.



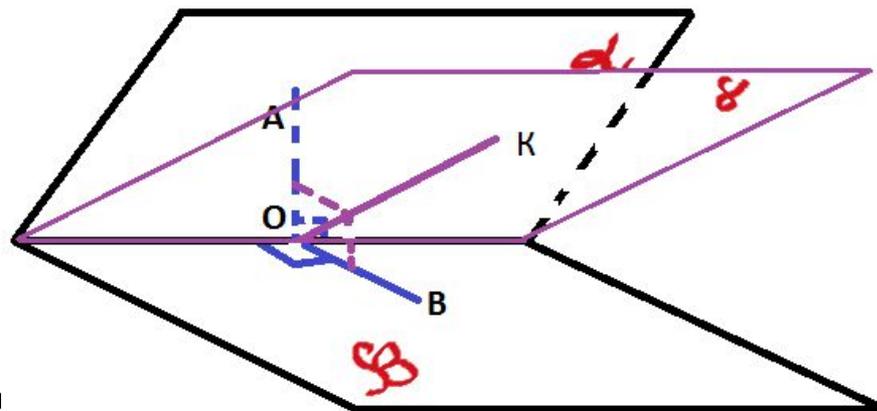
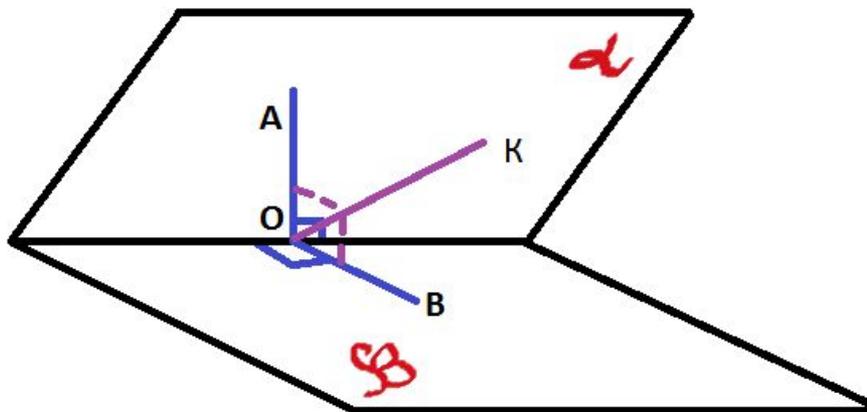
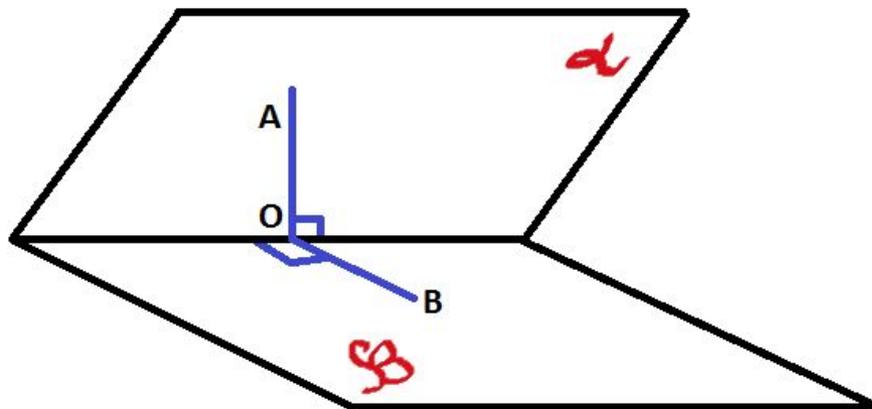
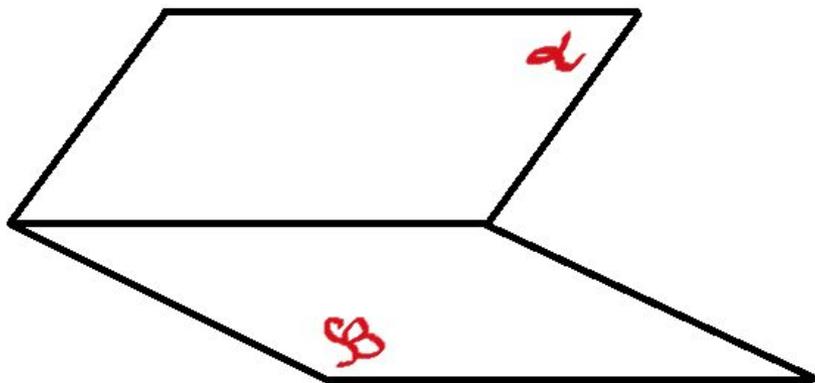
Дано:  
 $\alpha \parallel \beta$ ;

---

$\gamma \parallel \alpha$ ;  $\gamma \parallel \beta$ ;  
 $AC = CD$ ;  $AB \perp \alpha$ ;  $AB \perp \beta$

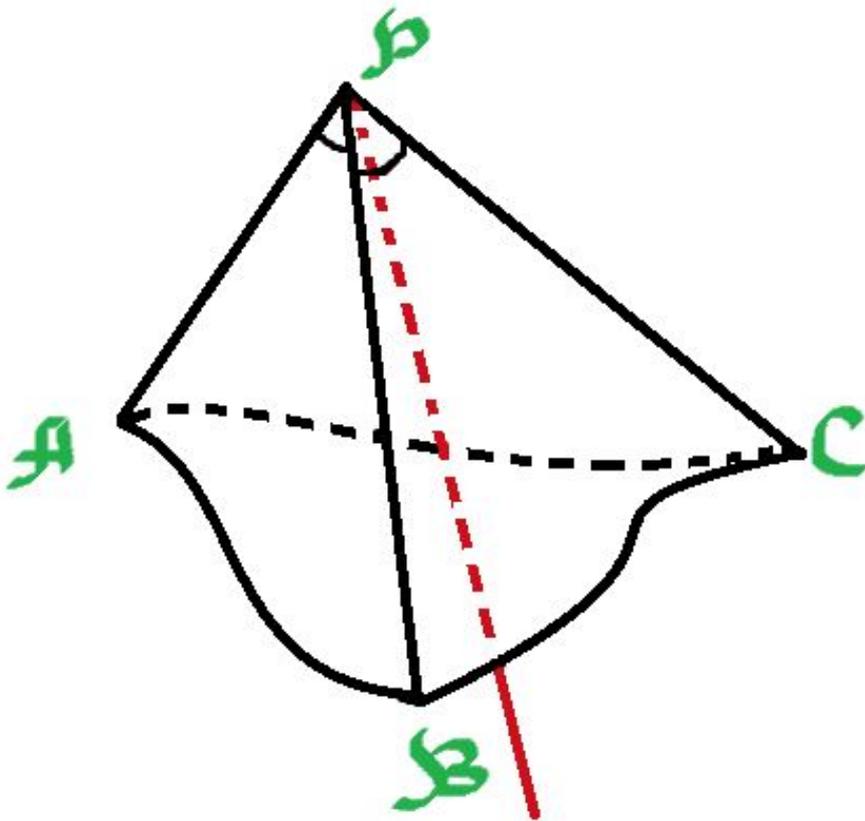
## Теорема 2

Множество точек, равноудаленных от граней двугранного угла, есть биссектриса (биссекторная плоскость) этого двугранного угла.



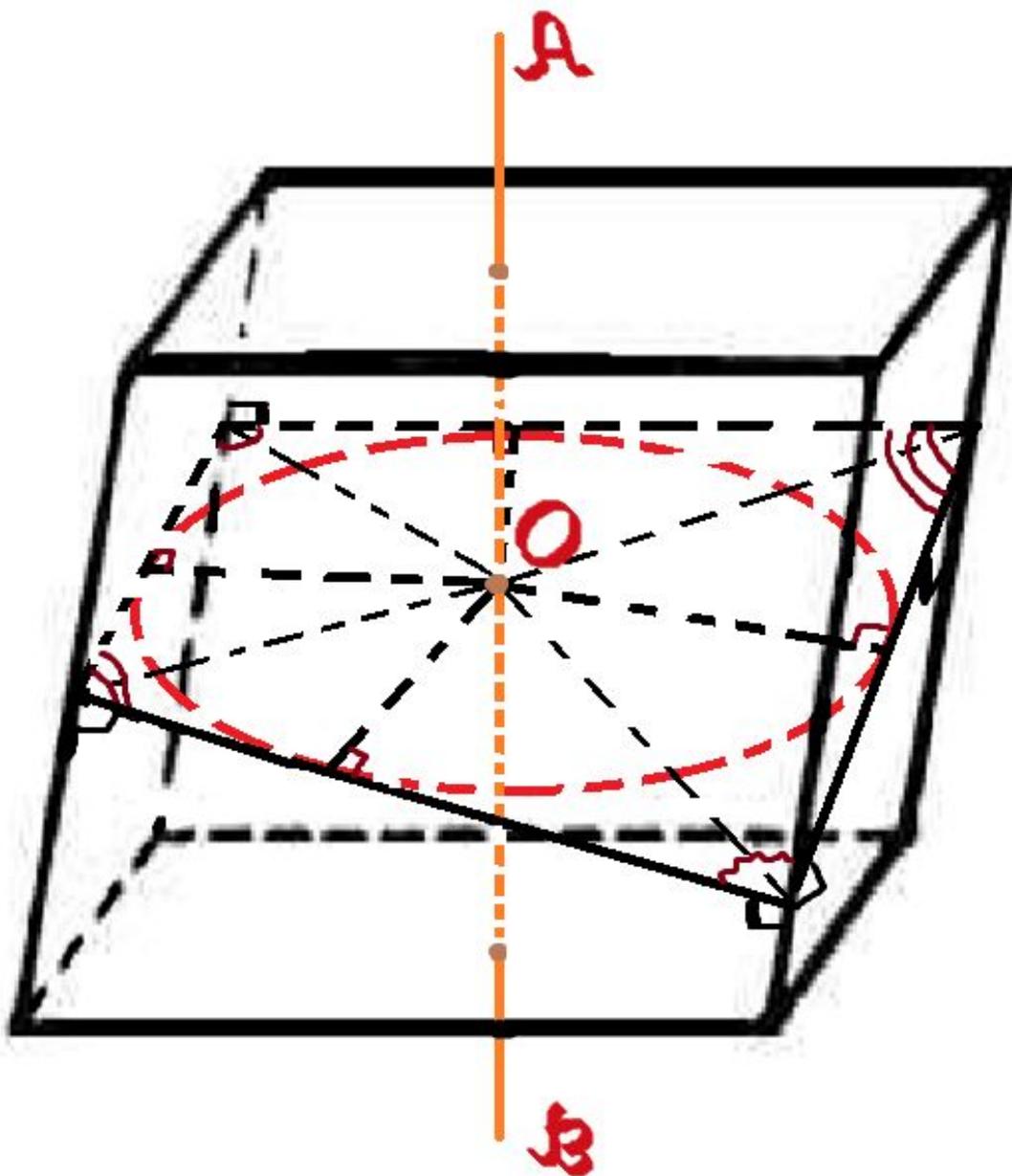
### Теорема 3

Множество точек, равноудаленных от граней трехгранного угла, есть биссектриса этого трехгранного угла.



**Биссектрисой трехгранного угла** называется луч с началом в вершине данного трехгранного угла, который образует равные углы с гранями этого трехгранного угла.

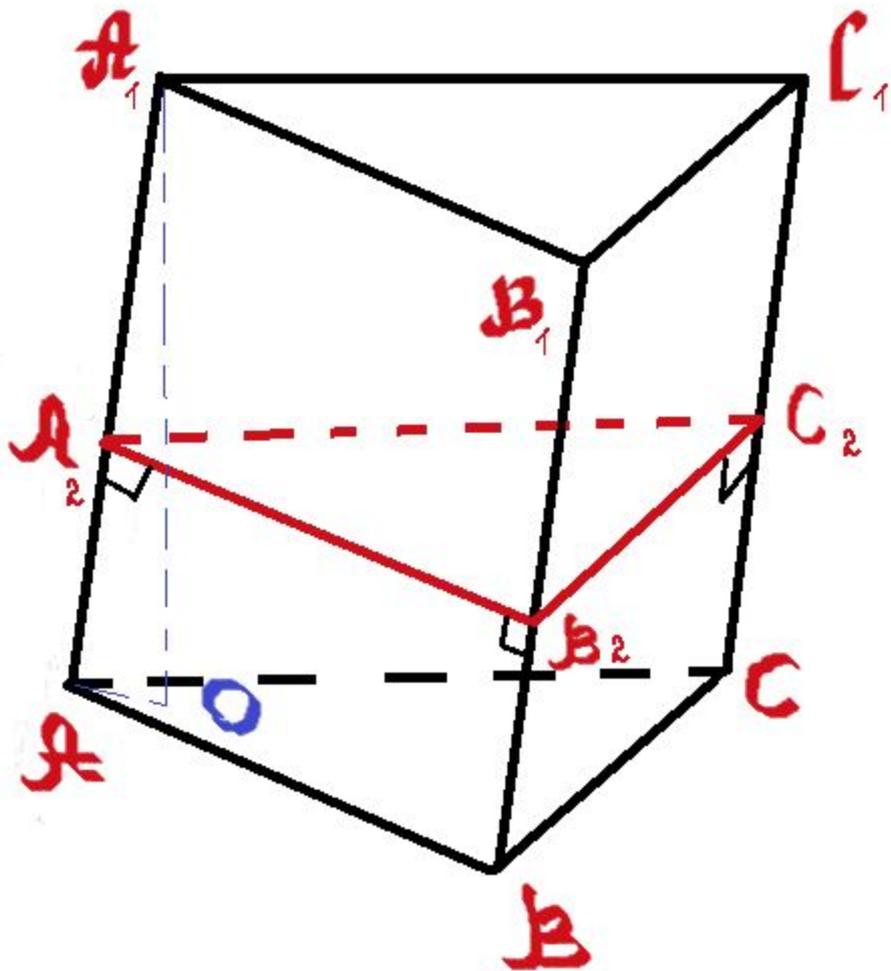
# Сфера, вписанная в призму



## Теорема 4

В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение этой призмы можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности (диаметру вписанной сферы).

2. Расстояние между боковыми ребрами треугольной призмы 13,14,15. В призму вписан шар. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти объем призмы и объем шара.



**Решение.**

$(A_2B_2C_2)$ -перпендикулярное сечение.

$$V_{ш.} = \frac{4}{3}\pi R_{ш.}^3$$

$$S = \frac{1}{2}Pr_{окр}$$

$$1) R_{ш.} = r_{впис.окр.} = S_{A_2B_2C_2} / p$$

$$p = 21;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S_{A_2B_2C_2} = 84;$$

$$R_{ш.} = 84/21 = 4;$$

$$V_{ш.} = \frac{4}{3}\pi R_{ш.}^3; V_{ш.} = 256\pi/3;$$

$$2) V_{пр.} = S_{перп.сеч.} * AA_1;$$

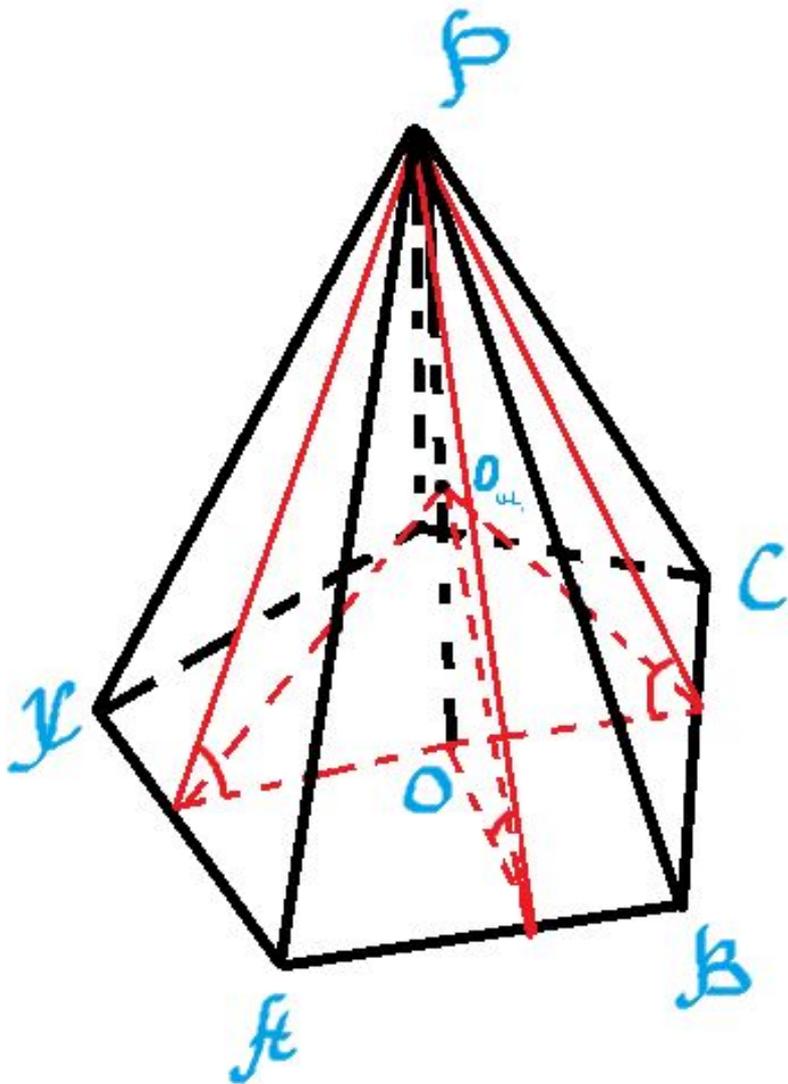
$$AA_1 = A_1O / \sin \alpha = 8 / \sin \alpha;$$

$$V_{пр.} = 84 * 8 / \sin \alpha = 672 / \sin \alpha.$$

Ответ:  $256\pi/3$ ;  $672 / \sin \alpha$ .

# Сфера, вписанная в пирамиду

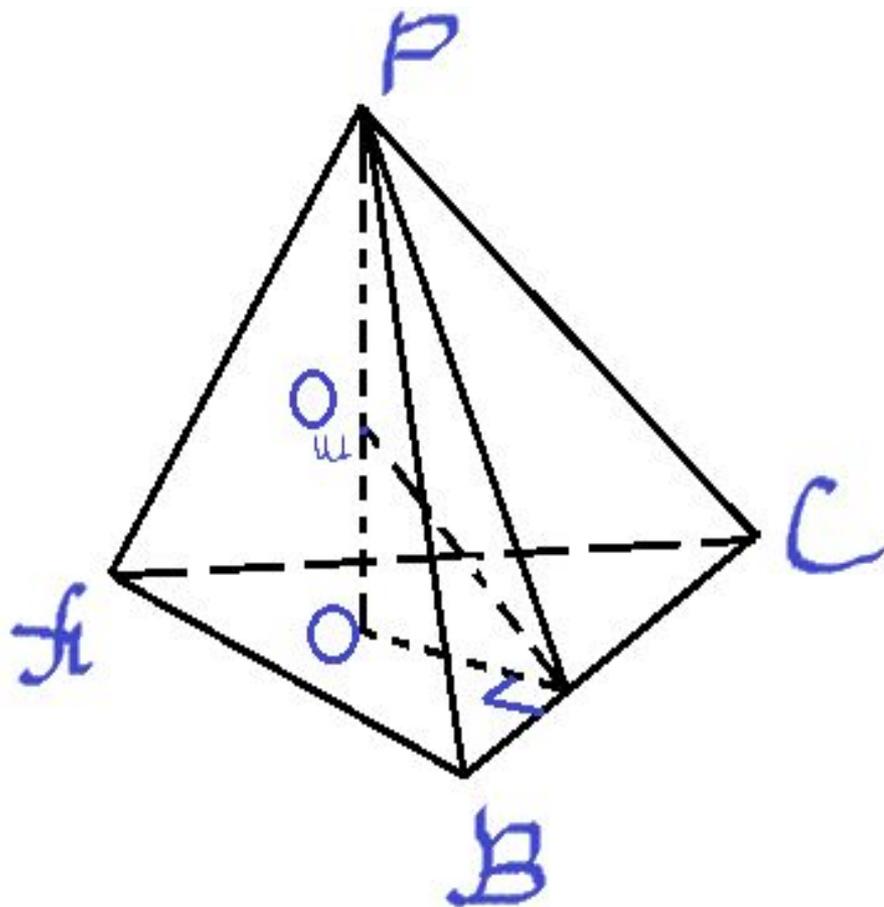
Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию.



## Теорема 5

Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию (двугранные углы при основании пирамиды равны), то в пирамиду можно вписать сферу, центр которой находится в точке пересечения высоты пирамиды и биссектрисы двугранного угла при основании пирамиды.

3. Основание пирамиды - треугольник со сторонами 9, 10 и 17. Все боковые грани наклонены под углом  $45^\circ$  к основанию пирамиды. Найти радиус вписанного шара.



Решение.

$$1) OK = r_{\text{впис.окр.}} = S/p;$$

$$S = p * r_{\text{впис.окр.}}; p = 18;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S_{\Delta ABC} = 36; OK = 2.$$

2)  $\Delta POK$ :  $KO_{\text{ш.}}$  - биссектриса,  $m.o.$

$$OO_{\text{ш.}}/O_{\text{ш.}}p = OK/PK = \cos 45^\circ;$$

$$OO_{\text{ш.}}/O_{\text{ш.}}p = 1/\sqrt{2};$$

$$\angle PKO = 45^\circ, \text{ м.е. } OK = OP = 2$$

$$\frac{1}{2}R_{\text{ш.}} - R_{\text{ш.}} = 1/\sqrt{2};$$

$$\sqrt{2} R_{\text{ш.}} = 2 - R_{\text{ш.}};$$

$$R_{\text{ш.}} = 2/(1 + \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1).$$

$$\text{Ответ: } 2(\sqrt{2} - 1).$$

## Теорема 6

В любой тетраэдр можно вписать сферу.

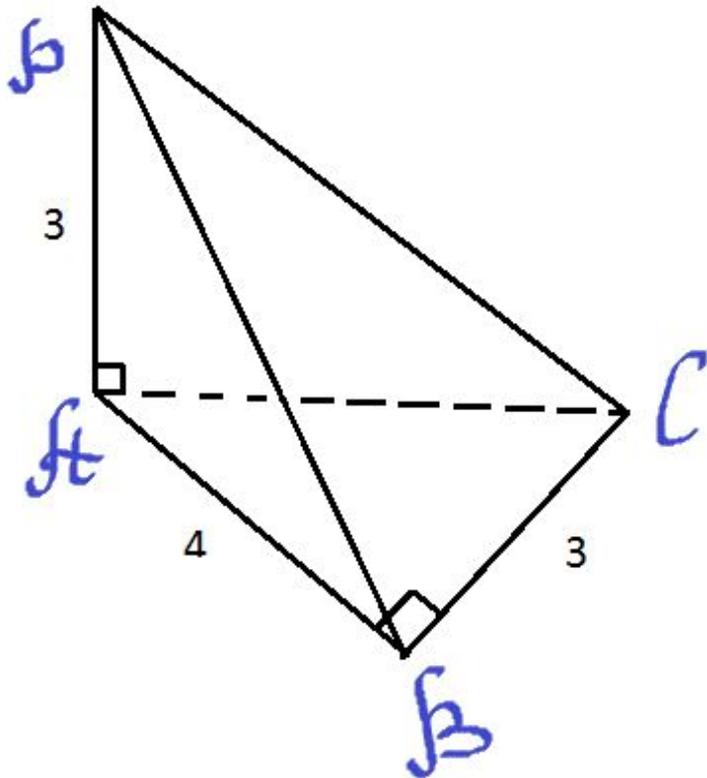
## Теорема 7

Если в многогранник, объем которого равен  $V$ , а площадь поверхности равна  $S$ , вписан шар радиуса  $R$ , то имеет место соотношение:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot R$$

3. Основание пирамиды - треугольник  $ABC$ , в котором  $AB \perp BC$ ,  $AB=4$ ,  $BC=3$ . Боковое ребро  $PA$  перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно 3. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

*Решение.*



$$1) V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot AP;$$
$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

2)  $PB \perp BC$  (по теореме о трех перпендикулярах);  $AC = PB = 5$ .

$$3) S_{\Delta PAB} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

$$S_{\Delta PBC} = S_{\Delta PAC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7,5.$$

$$S_{\text{полн.}} = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7,5 = 12 + 15 = 27.$$

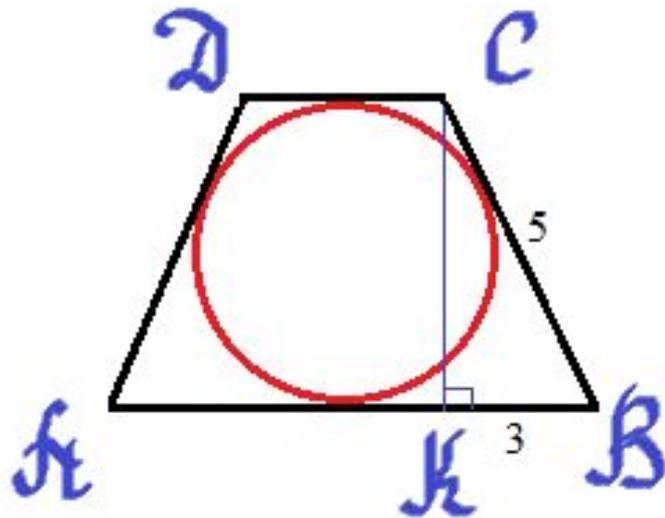
$$4) R_{\text{ш.}} = 3 V_{\text{пир.}} / S;$$

$$R_{\text{ш.}} = 3 \cdot 6 / 27 = \frac{2}{3};$$

$$V_{\text{ш.}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32\pi}{81}.$$

Ответ:  $\frac{32\pi}{81}$ .

4. Шар вписан в прямую призму, основание которой - равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 8. Найдите объем шара и объем призмы.



Решение.

- 1)  $R_{ш.} = r_{впис.окр.}$ ;  $H_{пр.} = D_{впис.окр.} = CK.$
  - 2)  $DC + AB = AD + CB;$   
 $2BC = 2 + 8; BC = 5.$
  - 3)  $BC = \frac{1}{2}(AB - DC); BK = \frac{1}{2}(8 - 2) = 3;$
  - 4)  $\triangle BCK: CK = 4; R_{ш.} = 2.$
  - 5)  $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot H_{пр.};$   
 $V_{пр.} = 80;$   
 $V_{ш.} = \frac{4}{3}\pi R^3;$   
 $V_{ш.} = \frac{4}{3}\pi 2^3 = 32\pi/3.$
- Ответ:  $32\pi/3.$

***Спасибо за внимание***