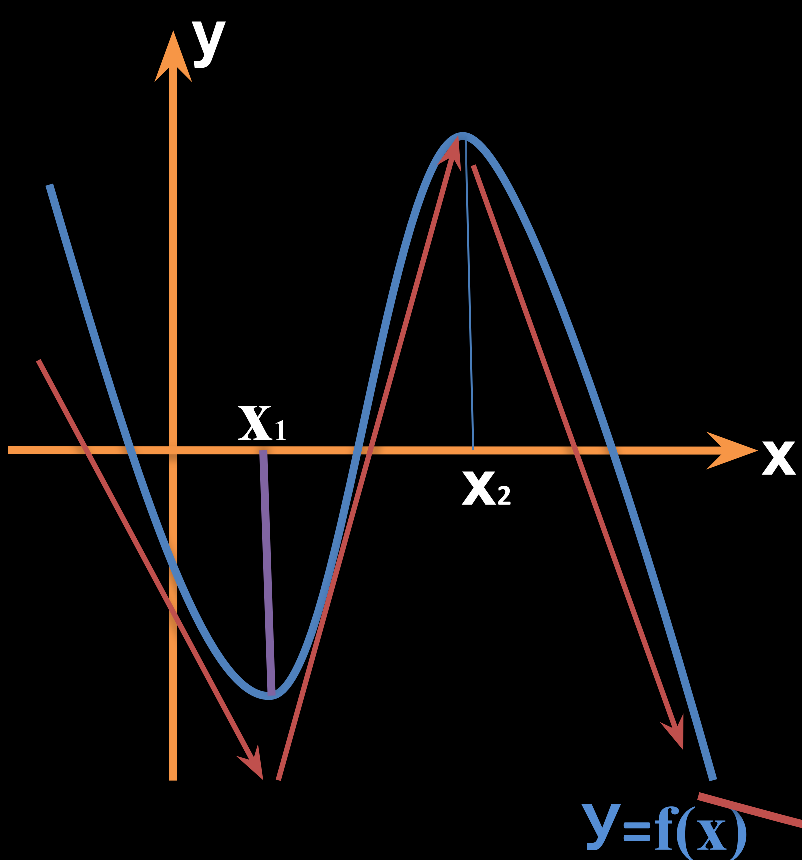
Применение производной для исследования функций.

1. Нахождение промежутков возрастания функции.
2. Нахождение промежутков убывания функции.
3. Нахождение промежутков постоянства функции.
4. Нахождение экстремумов.
5. Решение уравнений.
6. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной на отрезке.

Монотонность функции



Убывает на

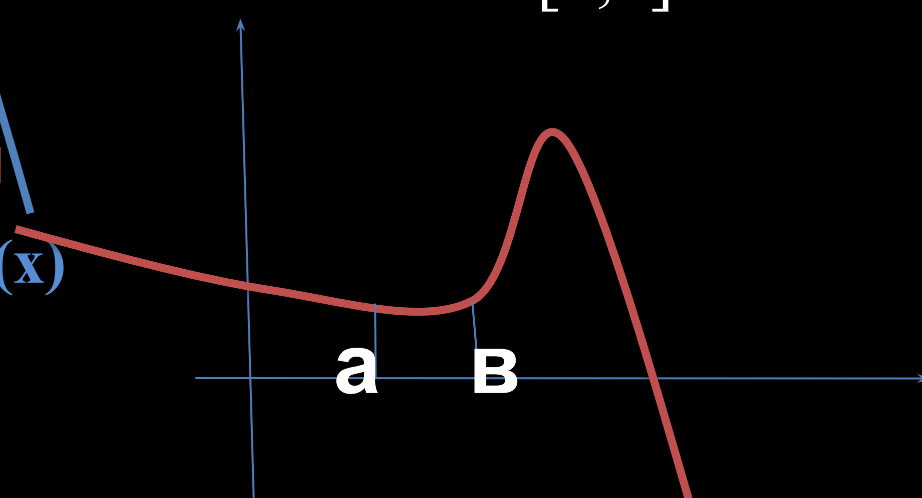
$(-\infty;x_1]$, $[x_2;+\infty)$

Возрастает на

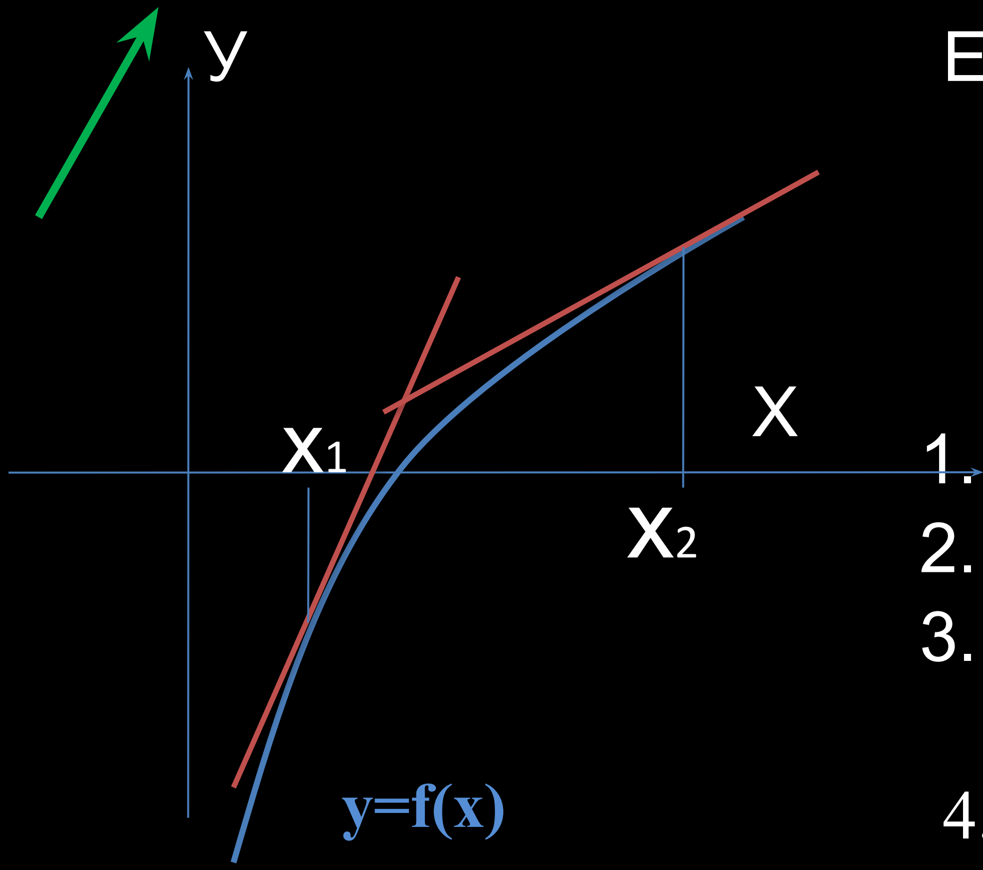
$[x_1; x_2]$.

Постоянна на

[а;в]



Исследование функции на возрастание



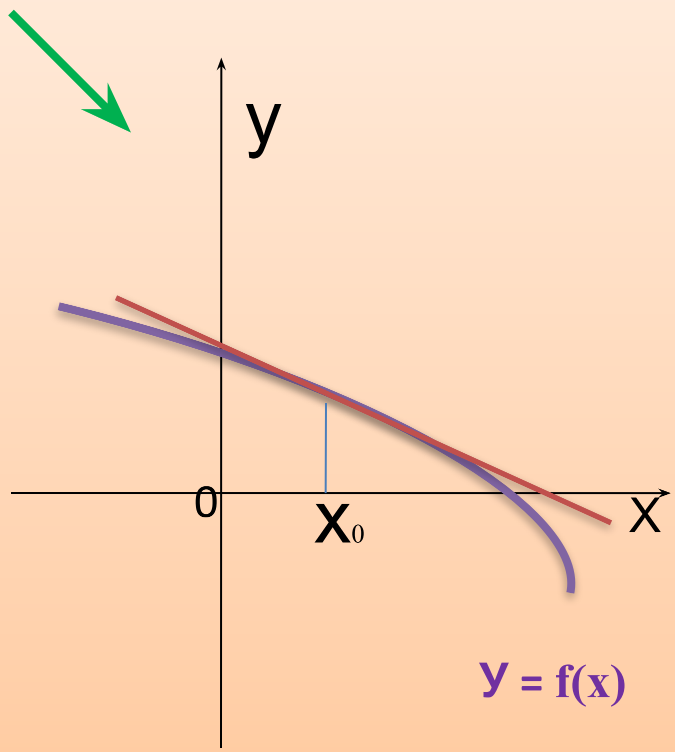
Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f монотонно возрастает на интервале I.

<u>АЛГОРИТМ</u>

1. D(f)
2. $f'(x)$
3. Решить неравенство

   $f'(x)>0$
4. Выписать промежутки, где производная имеет знак «+».

Исследование функции на убывание



Если в каждой точке интервала I $f'(x)<0$, то функция $y = f(x)$ монотонно убывает на этом промежутке.

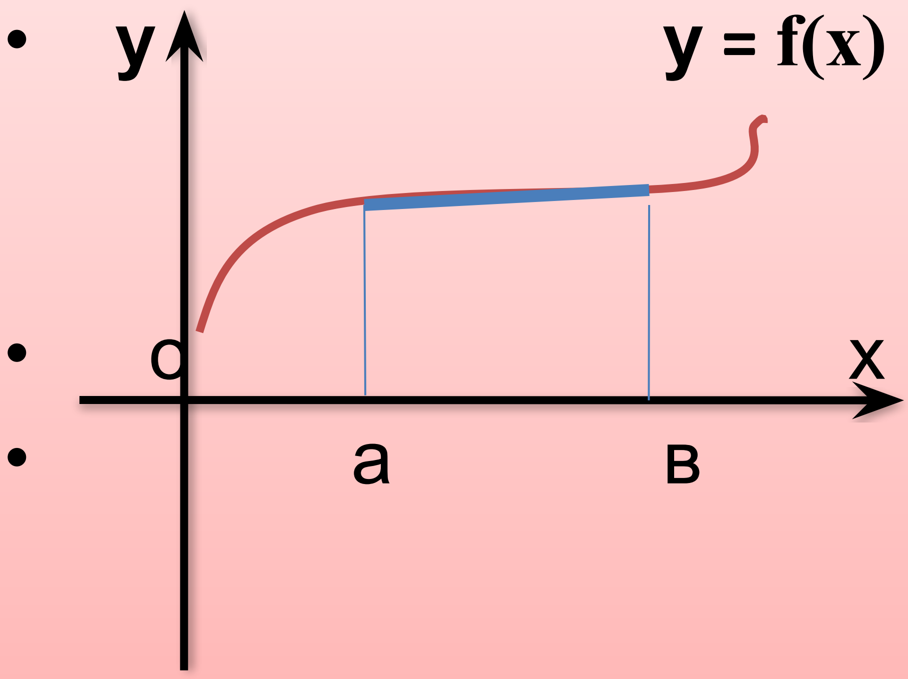
АЛГОРИТМ

1. D(f)
2. $f'(x)$
3. Решить неравенство

$$f'(x) < 0$$

4. Выписать промежутки , где производная имеет знак «-».

Исследование функции на постоянство



- Функция y = f(x) постоянна на интервале (а; в) тогда и только тогда , когда
- f '(x) = 0 в каждой точке этого интервала.

ЭКСТРЕМУМЫ

Необходимое условие экстремума

Если X_0 – точка экстремума функции

$У = f(x)$, то эта точка является критической точкой данной функции, т. е. в этой точке производная либо равна нулю, либо она не существует.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке X_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в этой точке, то X_0 – ТОЧКА ЭКСТРЕМУМА функции $y = f(x)$

Если $f'(x)>0$ при $x < x_0$ и $f'(x)<0$ при $x > x_0$, то X_0 – точка максимума.

Если $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>X_0$, то X_0 – точка минимума.

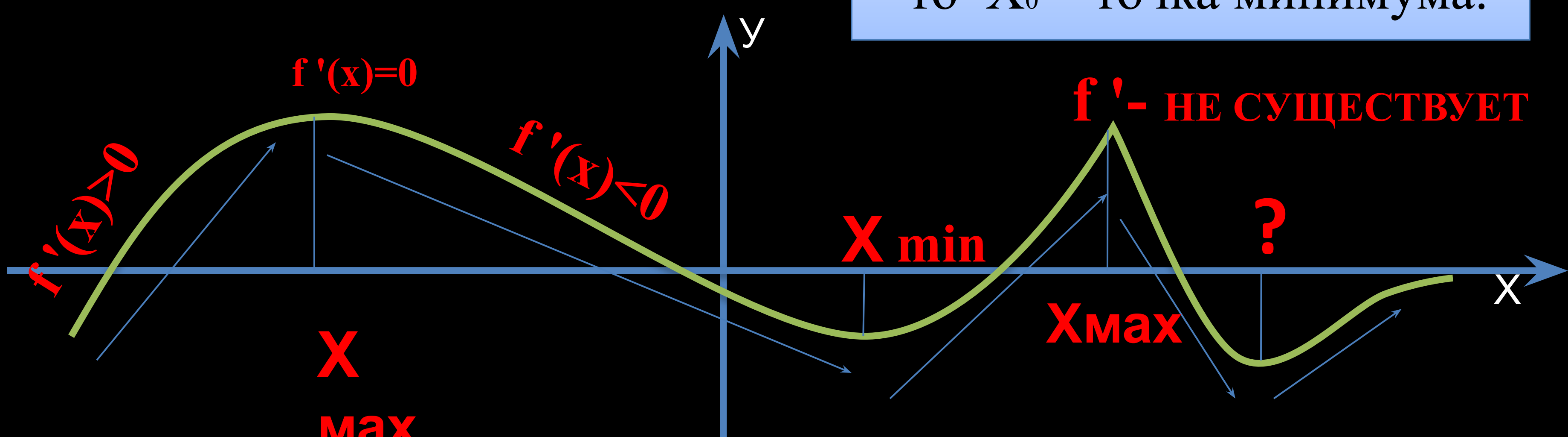
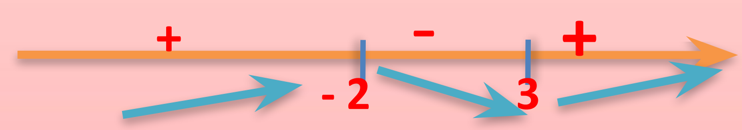


СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМОВ

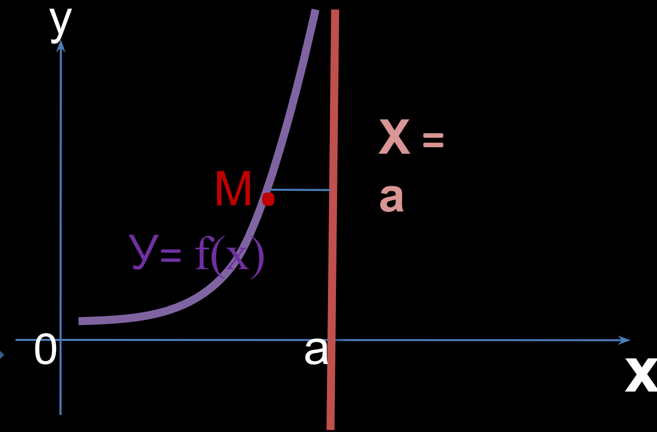
ЭТАПЫ	$У = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 5$
1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.	1. Д(у) = R. Функция непрерывна во всей области определения.
2. Найти производную	2. $f'(x)=6x^2-6x-36$
3. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю или не сущест-вует.	3. $f'(x)=0$, $6x^2-6x-36=0$ при $x = -2$, $x = 3$.
4. В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции.	4. знак f '.  Характер изменения функции
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума, или не является точкой экстремума.	5. $x = -2$ - точка максимума $x = 3$ - точка минимума
6. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.	6. Функция возрастает на $(-\infty;-2]$ и на $[3;+\infty)$. Убывает на $[-2; 3]$. $X_{мах} =-2$ $У_{мах} = 49$; $X_{мин}= 3$ $У_{мин} =-76$

А с и м п т о т ы

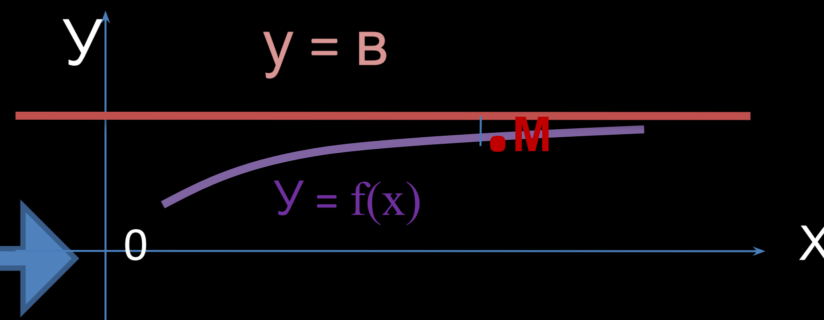
Прямая у = кх +в называется асимптотой графика функции у = f(x) , если расстояние от точки М графика функции до прямой у = кх + в стремиться к нулю при бесконечном удалении точки М.

Прямая х = а является вертикальной асимптотой графика функции

у = f(x), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$



Прямая у = в является горизонтальной асимптотой графика функции у = f(x), если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$



Прямая у = кх + в является наклонной асимптотой графика функции у = f(x), если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = к$

$\lim\limits_{X \to \infty} (f(x) - кх) = b$

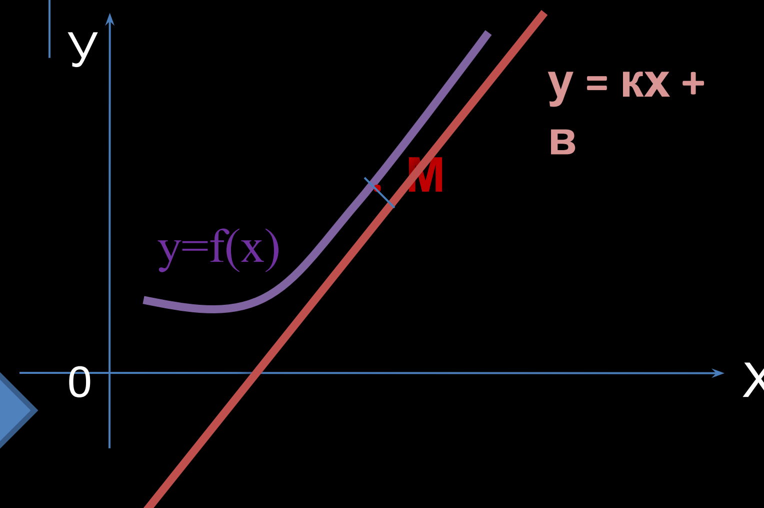
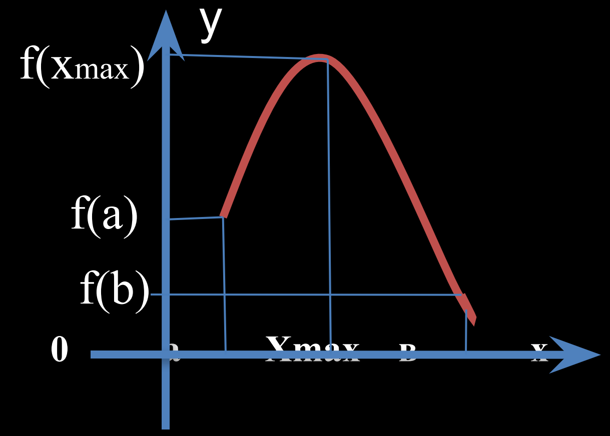


СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЁ ГРАФИКА.

1. НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ.
2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ.
3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА ПЕРИОДИЧНОСТЬ.
4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ С ОСЯМИ КООРДИНАТ И ИНТЕРВАЛОВ, ГДЕ ФУНКЦИЯ СОХРАНЯЕТ ЗНАК.
5. НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТ ГРАФИКА ФУНКЦИИ.
6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ

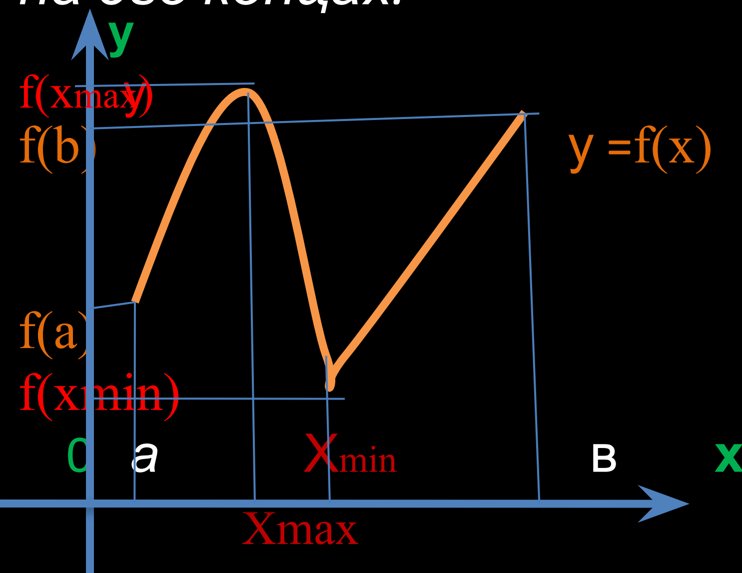
Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке.

Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.



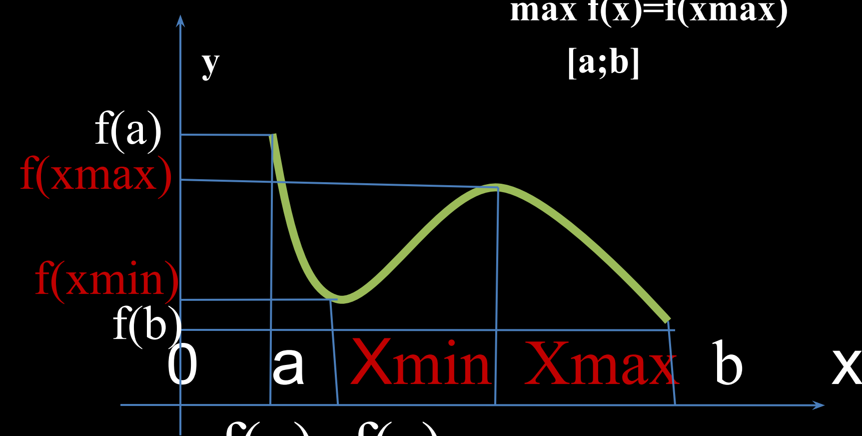
$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$

$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{max})$



$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{max})$

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{min})$



$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$

$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке

ЭТАПЫ

пример для функции y = $2x^3-3x^2-36x+5$ на отрезке [0;4]

1. Найти производную
2. Найти на данном отрезке критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

1. $f'(x)=6x^2-6x-36$

2. $f'(x)=0$ при $x = -2$ и при $x = 3$.

Отрезку [0;4] принадлежит только одна критическая точка: $x = 3$.

3. $f(0)=5$; $f(3)=-76$; $f(4)=-59$

4. $\max\limits_{[0;4]} f(x)=f(0)=5$; $\min\limits_{[0;4]} f(x)=f(3)=-76$