

*Применение свойств  
функций к решению  
уравнений и неравенств*

*Знакомство с методом  
мажорант*

# *Метод мажорант*

**На самом деле, вы встречались с этим методом,  
просто не знали, как он называется.**

**Некоторые математики называют этот метод**

**по-другому:**

**«метод математической оценки»,**

**«метод mini-max».**

**Это очень красивый метод, и ему непременно следует  
научиться**

## Определение

Мажорантой (от *magiorante* – главенствующий)

данной функции  $f(x)$  на множестве  $D(f)$

называется такое число  $M$ , что

либо  $f(x) \leq M$  для всех  $x \in D(f)$ ,

либо  $f(x) \geq M$  для всех  $x \in D(f)$ .

*Метод мажорант или метод оценки*

используется (чаще всего) в уравнениях вида

$f(x) = g(x)$ , где  $f(x)$  и  $g(x)$  – ограниченные функции,

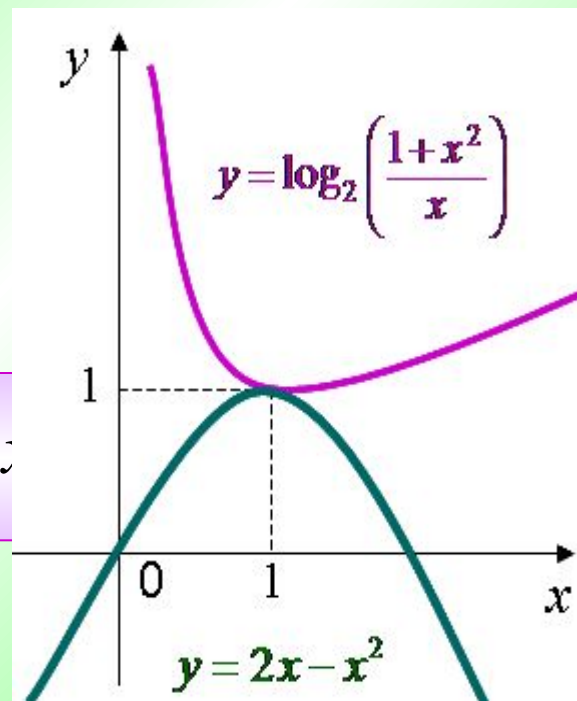
и на области определения данного уравнения

наибольшее значение  $M$  одной из них

равно наименьшему значению  $M$  другой.

Эту ситуацию хорошо иллюстрирует график.

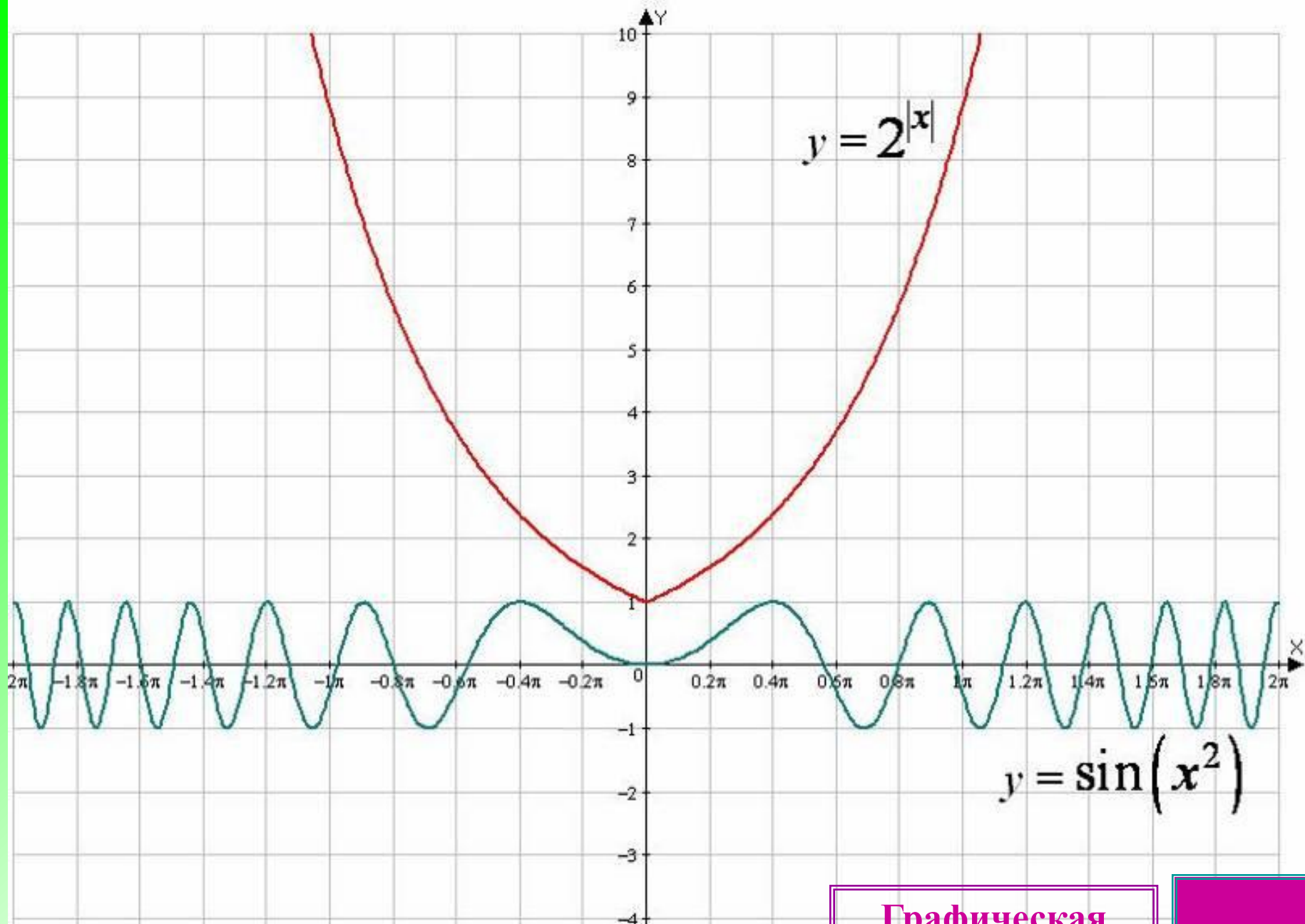
Как начинать решать такие задачи?



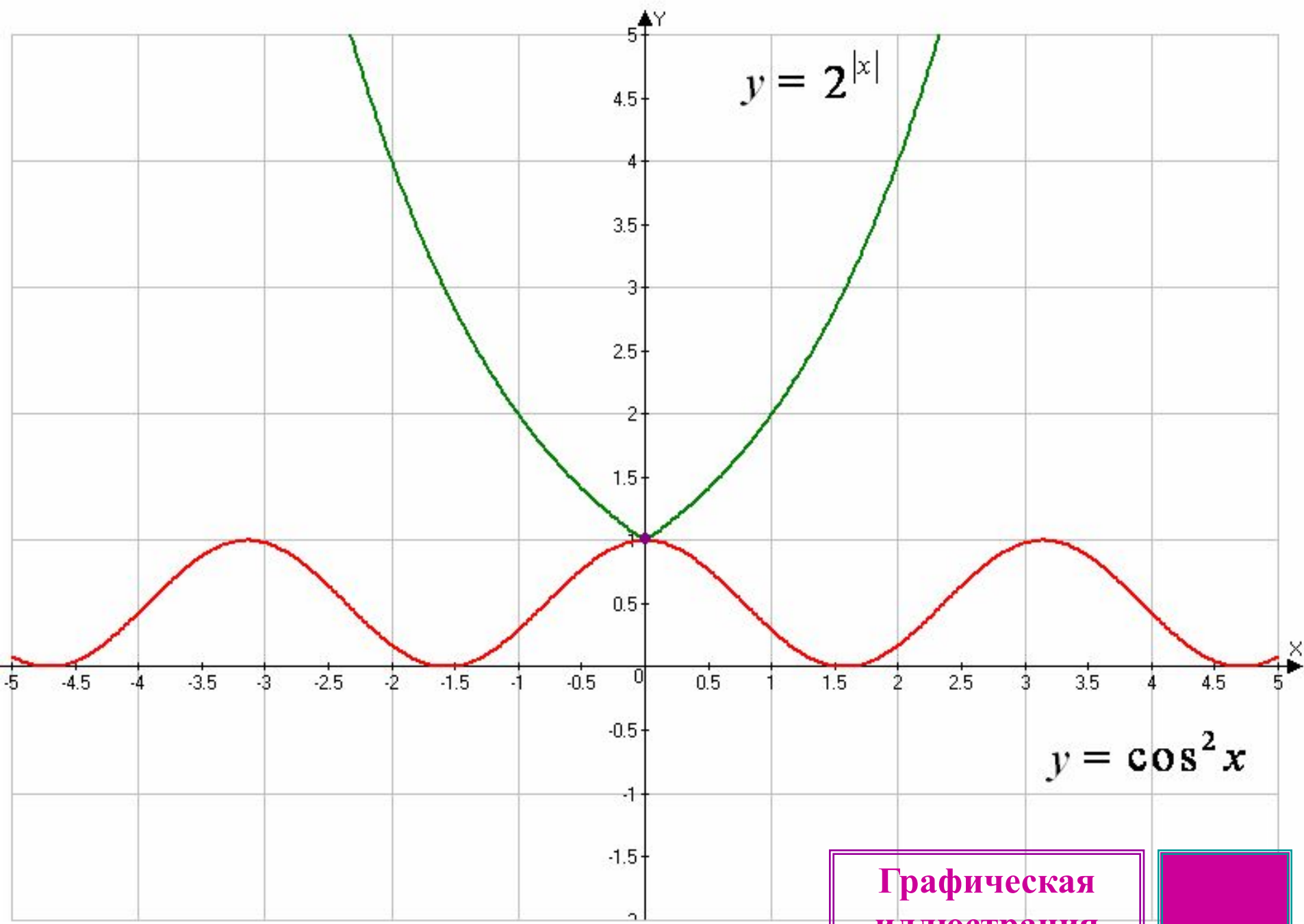
Привести уравнение или неравенство к виду  $f(x) = g(x)$

Сделать оценку обеих частей. Пусть существует такое число  $M$ , из области определения (уравнения или неравенства), что  $f(x) \leq M$  и  $f(x) \geq M$ .

Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \mathcal{M}(x) = \quad , \\ \mathcal{A}(x) = \quad . \end{cases}$$

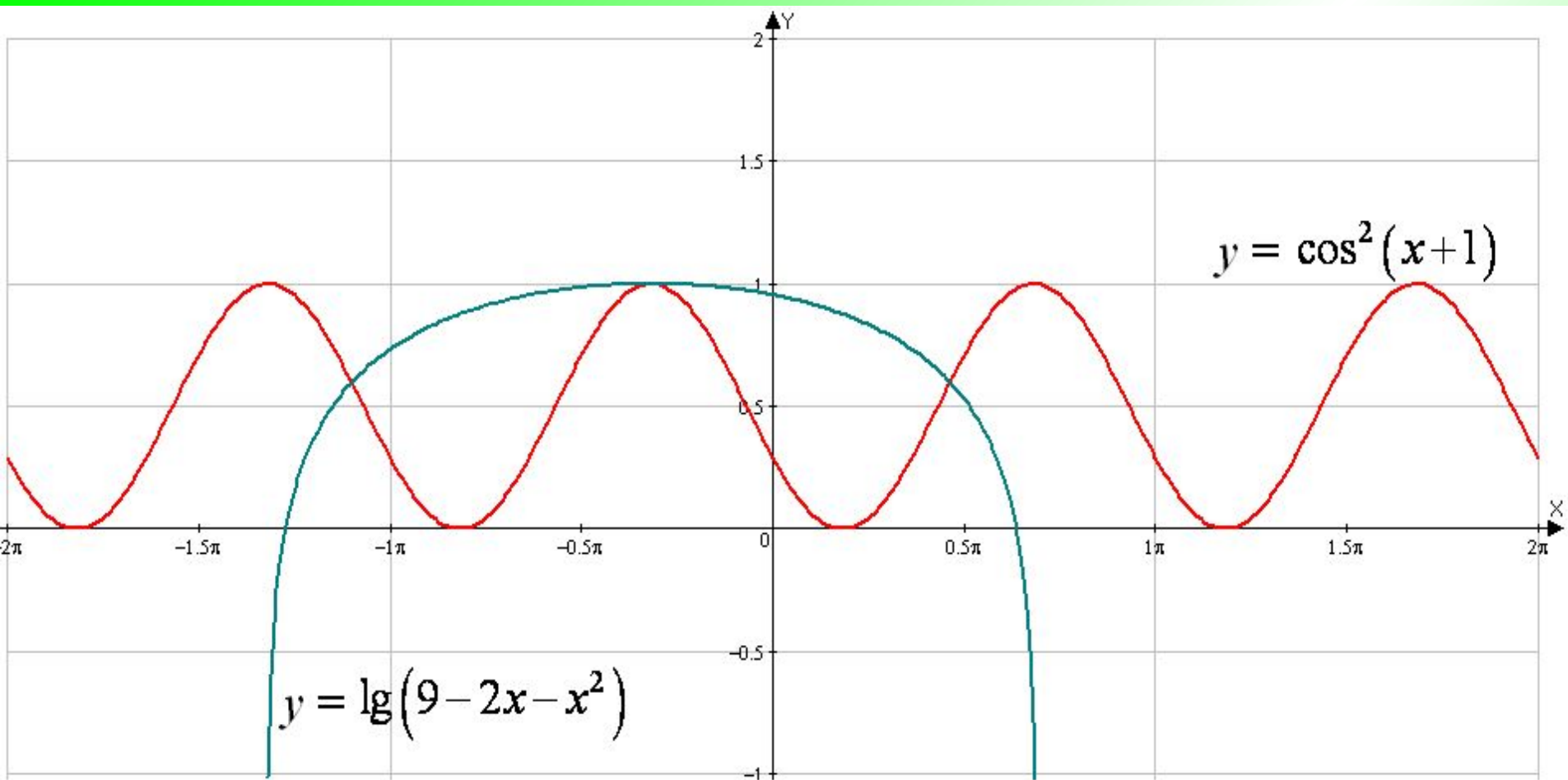


Графическая  
иллюстрация

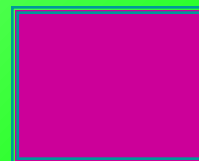


Графическая  
иллюстрация





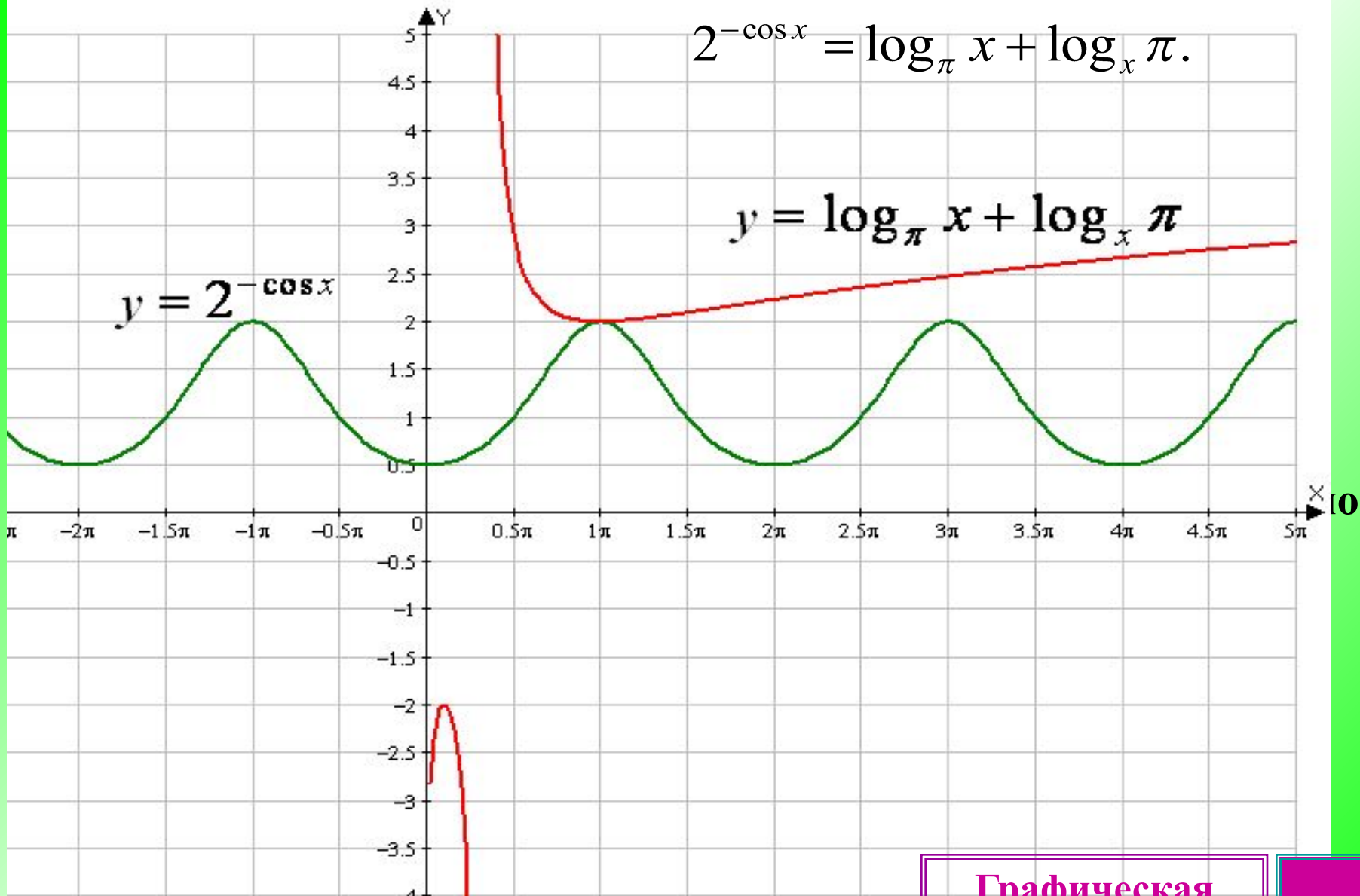
Графическая  
иллюстрация



$$2^{-\cos x} = \log_{\pi} x + \log_x \pi.$$

$$y = \log_{\pi} x + \log_x \pi$$

$$y = 2^{-\cos x}$$



Графическая  
иллюстрация



**Пример 5.** Решить уравнение  $\sin x + \sin 9x = 2$ .

**Решение.** Оценим обе части уравнения.

Поскольку  $-1 \leq \sin x \leq 1$  и  $-1 \leq \sin 9x \leq 1$ , то равенство  $\sin x + \sin 9x = 2$  выполняется тогда и только тогда, когда

$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$  Решением первого уравнения системы являются значения

$$\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При этих  $x$  найдем  $\sin 9x = \sin\left(9 \cdot \frac{\pi}{2} + 18\pi n\right) = 1$ .

Следовательно,  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$  решение системы.

**Ответ:**  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

**Пример 6.** Решить уравнение  $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 2y) \cdot (3 + \sin 3z) = 4.$

**Решение.** Очевидно, что  $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \geq 2,$

$(1 + \operatorname{tg}^2 2y) \geq 1, \quad (3 + \sin 3z) \geq 2.$  Заметим, что перемножив

почленно эти неравенства, получаем:

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 2y) \cdot (3 + \sin 3z) \geq 4.$$

Следовательно, левая часть равна правой, лишь при условии:

одновременно  $\operatorname{tg} 2y = 0, \quad \sin 3z = -1$

Значит, данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 & \text{Решая} \\ \operatorname{tg}^2 2y = 0 & \text{систему} \\ \sin 3z = -1 & \text{уравнений, получаем:} \end{cases}$$

$$x = \pi m, m \in Z; \quad y = \frac{\pi}{2} k, k \in Z; \quad z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \pi l, l \in Z$$

**Пример 7.** Решите уравнение  $\cos^2(x \cdot \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}$ .

**Решение.** Для решения уравнения **оценим его части:**

$$0 \leq \cos^2(x \cdot \sin x) \leq 1, \quad 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \geq 1.$$

**Равенство возможно только при условии** 
$$\begin{cases} \cos^2(x \cdot \sin x) = 1 \\ 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 1 \end{cases}.$$

**Сначала решим второе уравнение:**  $\log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 0,$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 1, \quad x^2 + x + 1 = 1, \quad x^2 + x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -1.$$

**Проверим справедливость первого равенства, подставив эти корни:**

$$x = 0: \cos^2(0 \cdot \sin 0) = \cos^2 0 = 1 \quad (\text{верное равенство}).$$

**При  $x = -1$  имеем:**  $\cos^2(-1 \cdot \sin(-1)) = \cos^2(\sin 1) \neq 1$  (неверное равенство).

**Итак, данное уравнение имеет единственный корень  $x = 0$ .**

**Ответ: 0.**

**Пример 8.** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4^{49x^2-70x+26} = \cos 14\pi x - 81a^2 - 72a - 13$

имеет решения. Найдите эти решения.

**Решение.** Перепишем уравнение в виде

$$4^{(7x-5)^2+1} = 3 + \cos(14\pi x) - (9a+4)^2.$$

При всех значениях  $x$  выражение  $(7x-5)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 4^{(7x-5)^2+1} \geq 4.$

При всех значениях  $x$  выражения  $-1 \leq \cos 14\pi x \leq 1, (9a+4)^2 \geq 0.$

Поэтому  $3 + \cos 14\pi x - (9a+4)^2 \leq 3 + 1 = 4.$

Следовательно, левая часть уравнения не меньше 4, а правая часть – не больше 4. Получаем систему:

$$\begin{cases} 4^{(7x-5)^2+1} = 4, \\ 3 + \cos 14\pi x - (9a+4)^2 = 4; \end{cases} \begin{cases} (7x-5)^2 = 0, \\ \cos 14\pi x = 1, \\ (9a+4)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{7}, \\ a = -\frac{4}{9}. \end{cases}$$

**Ответ:**  $x = \frac{5}{7}$  при  $a = -\frac{4}{9}.$