

Выпуклость и вогнутость функции

Презентация к уроку по учебнику «Алгебра и начала анализа, 10-11»

под редакцией Ш.А.Алимова , § 53

Автор презентации Бартош Наталья Владимировна,
учитель математики 587 гимназии г. Санкт-Петербурга

Самостоятельная работа

Построить график функции

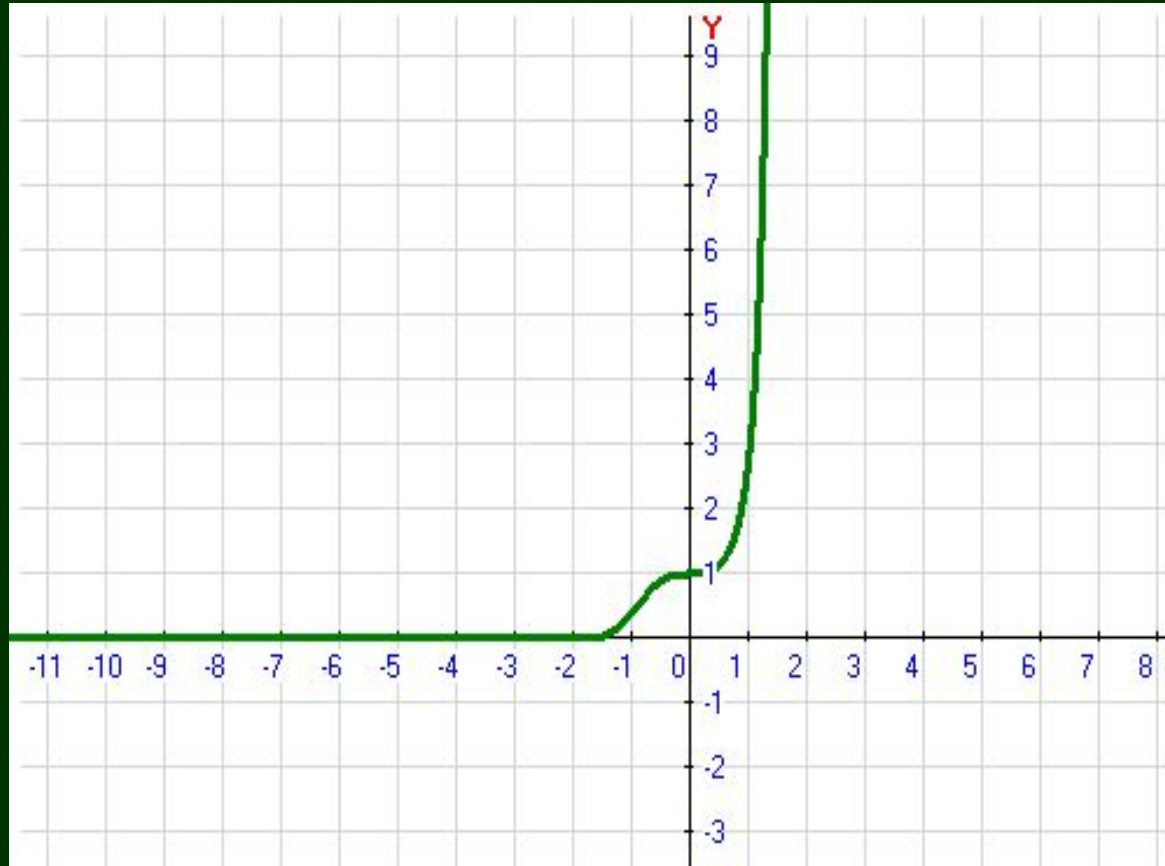
Вариант 1

$$y = e^{x^3}$$

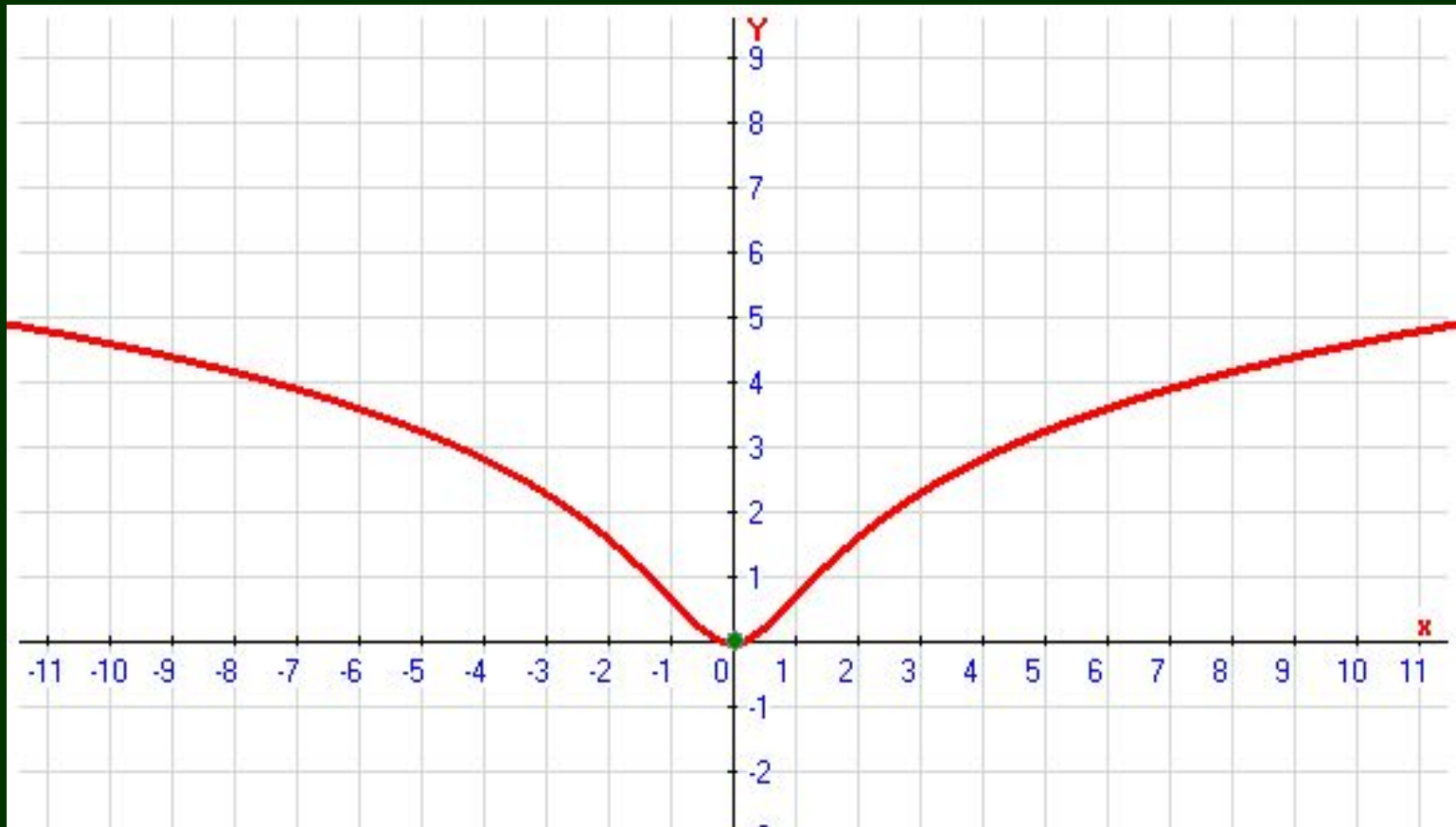
Вариант 2

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

$$y = e^{x^3}$$



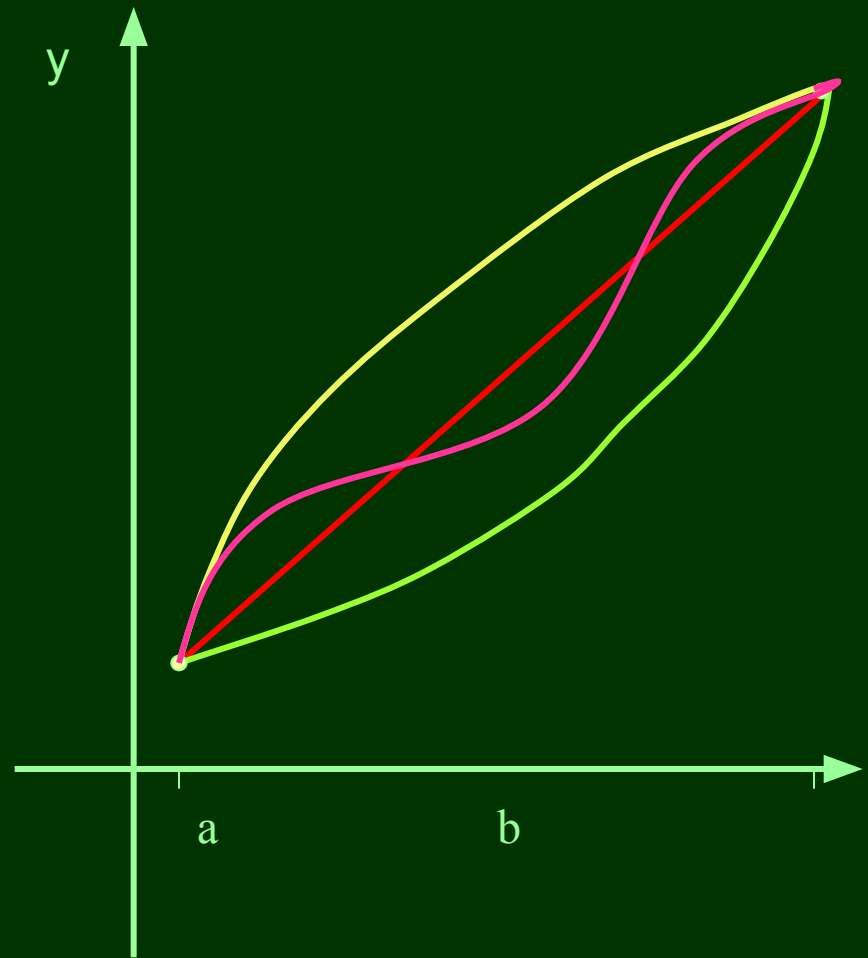
$$y = \ln(x^2 + 1)$$



Дана функция $y = f(x)$

На интервале (a, b)
функция $y = f(x)$ непрерывна и
дифференцируема,
причем $f'(x) > 0$

Постройте эскиз графика
функции $y = f(x)$ интервале (a, b)



Дана функция $y = f(x)$

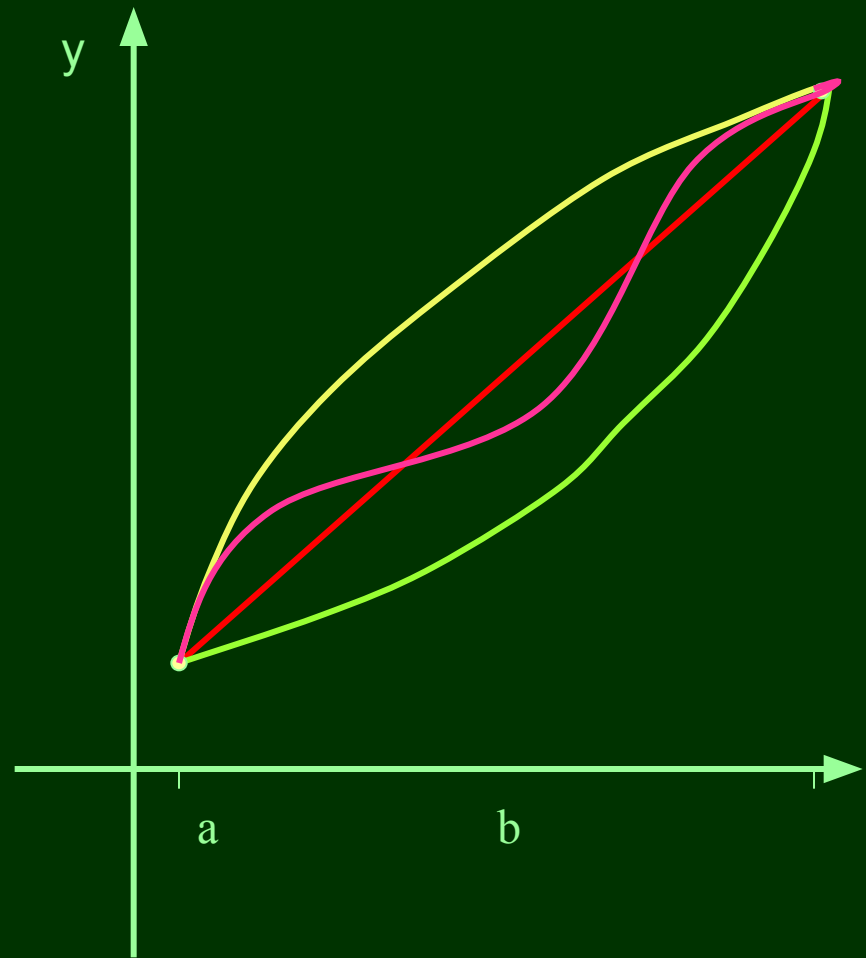
Чем отличается поведение
линий?

Одна из них – отрезок
прямой

Другая проходит над
отрезком

Третья – под отрезком

А четвертая – частично
над отрезком, частично
под ним



В математике для обозначения такого поведения существуют специальные понятия:

выпуклости и

вогнутости

графика функции

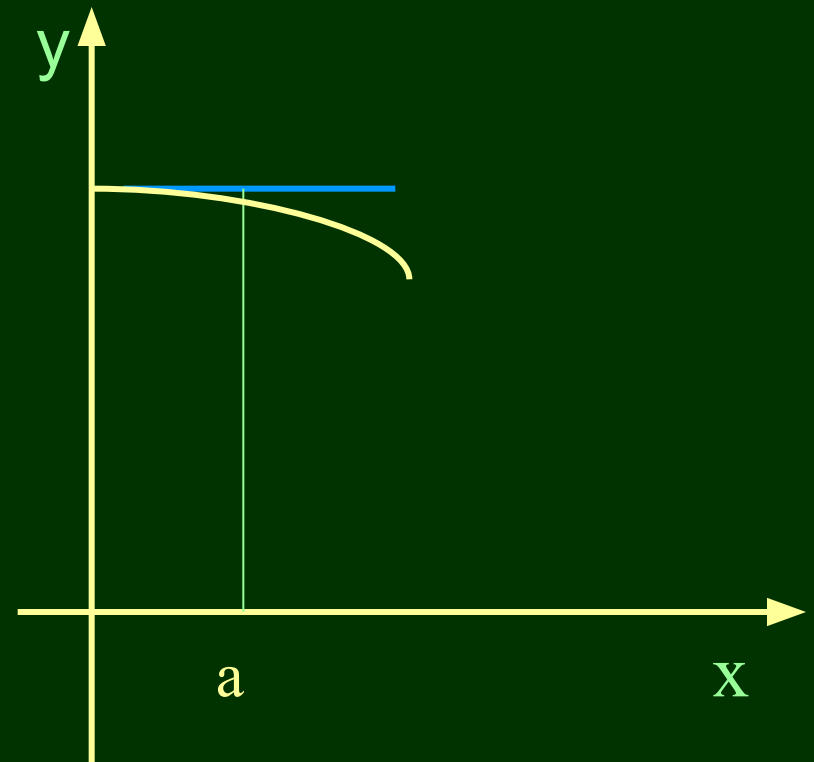
Выпуклость и вогнутость функции

Геометрический смысл
второй производной

Выпуклая вверх

(выпуклая кривая)

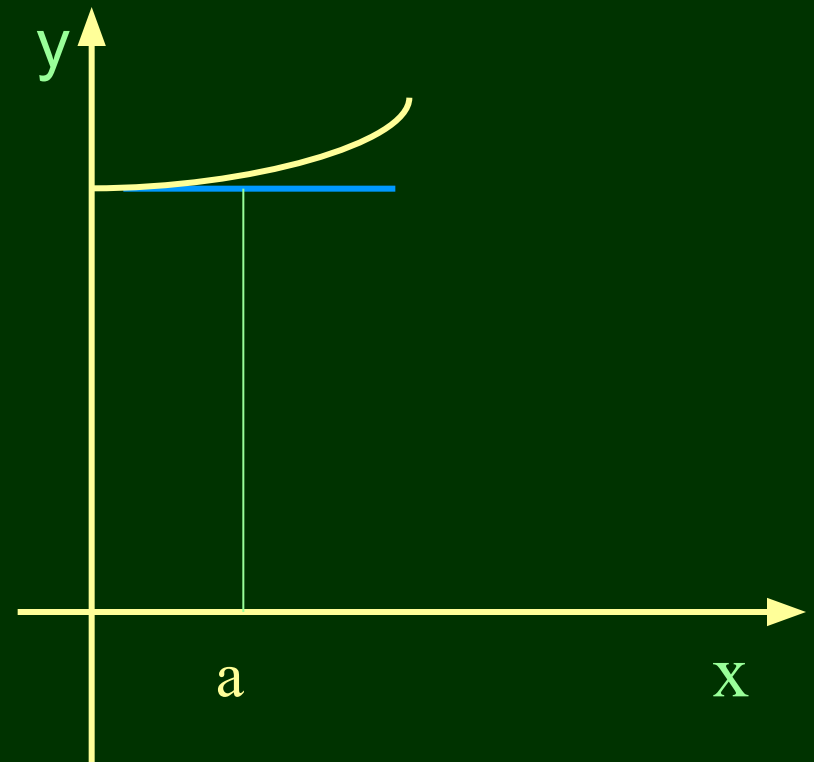
Кривая называется
выпуклой вверх
в точке $x = a$,
если в некоторой
окрестности этой
точки она
расположена
под
своей касательной



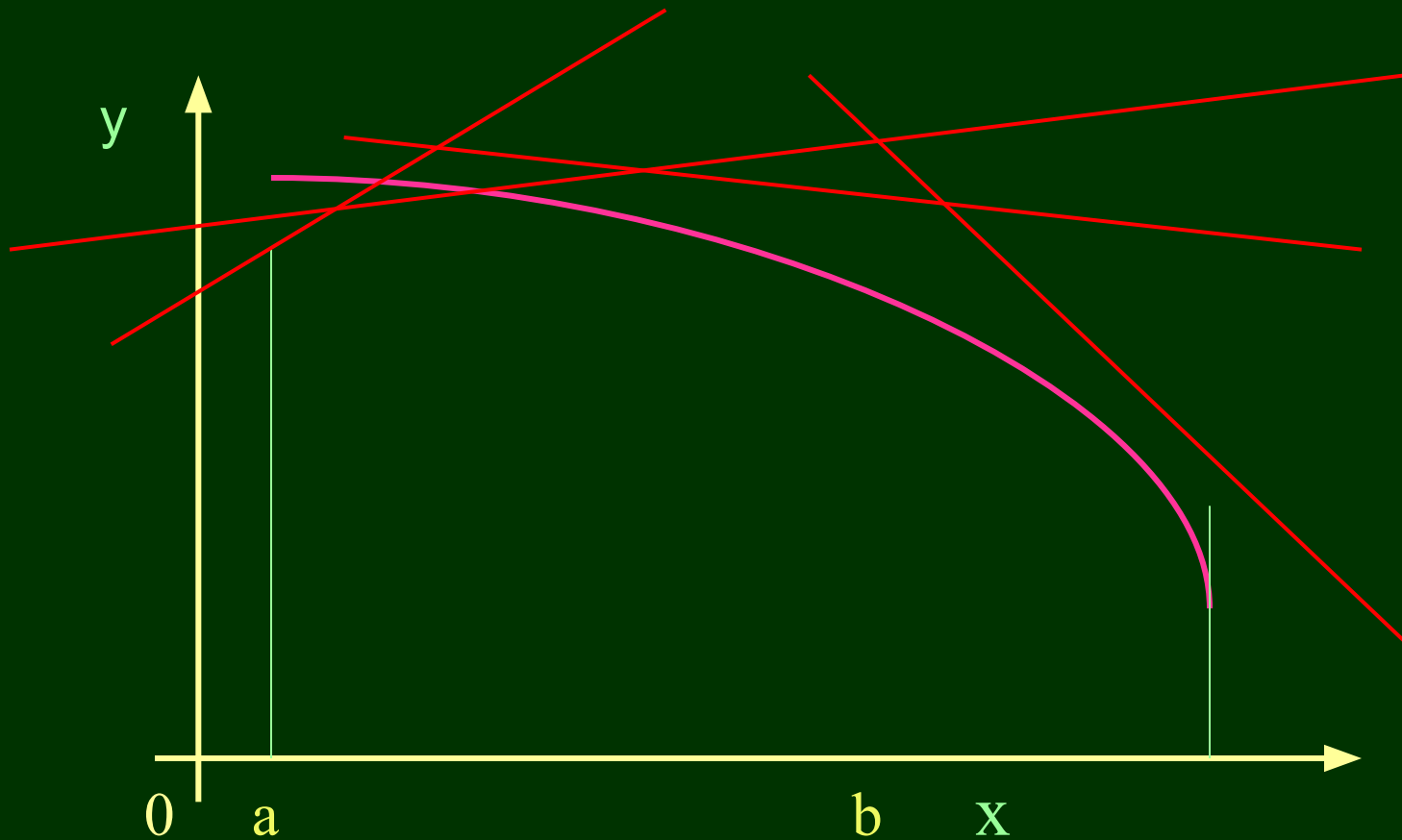
Выпуклая вниз

(вогнутая кривая)

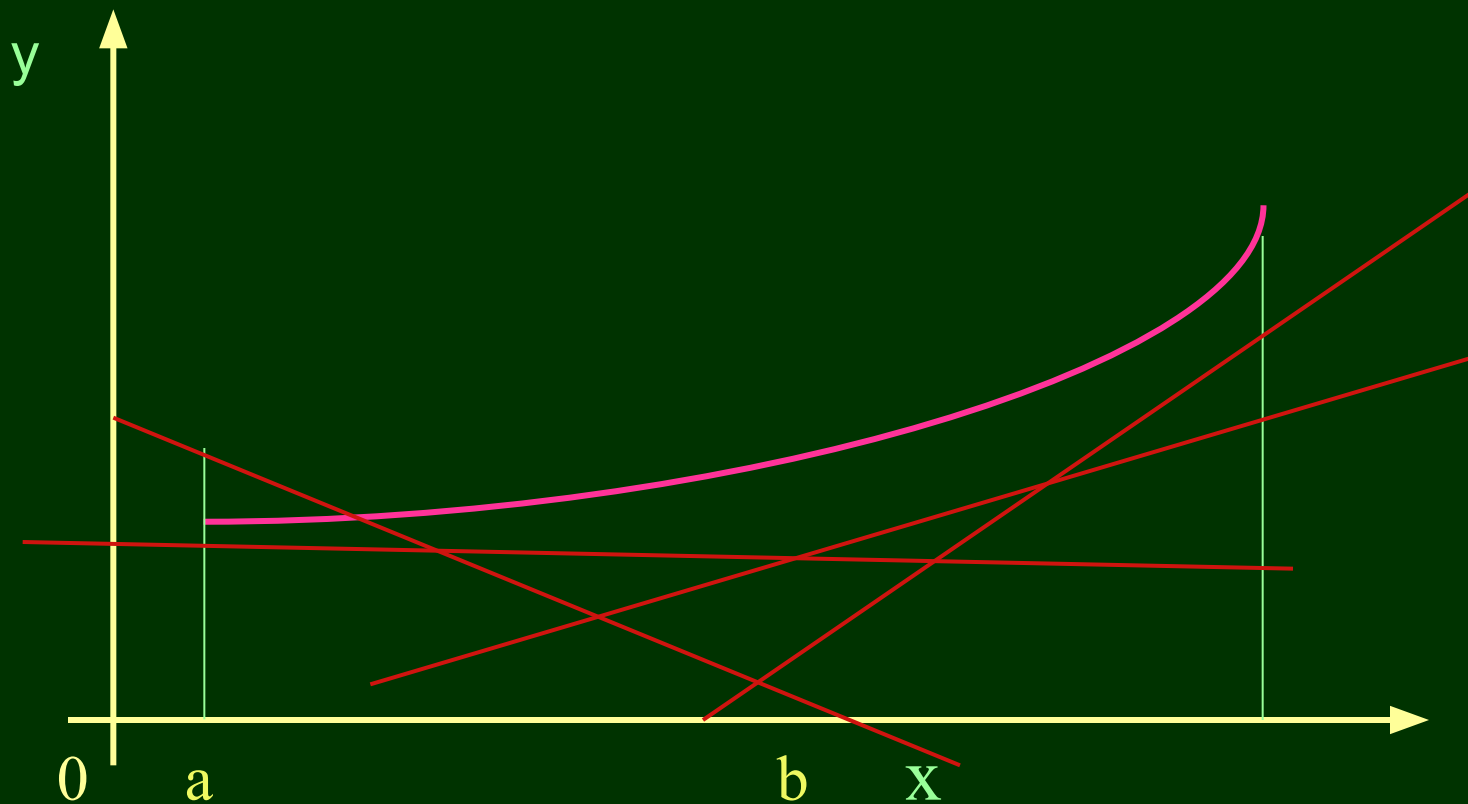
Кривая называется
выпуклой вниз
в точке $x = a$,
если в некоторой
окрестности этой
точки она
расположена
над
своей касательной



*Кривая выпуклая вверх на интервале
(выпуклая)*



*Кривая выпуклая вниз на интервале
(вогнутая)*



Как найти интервалы выпуклости и
вогнутости?

График функции $y = f(x)$ – вогнутая кривая

В точках $M_1, M_2, M_3 \dots$ проведены касательные

Величина углов
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$
растет,

увеличиваются
и тангенсы этих
углов

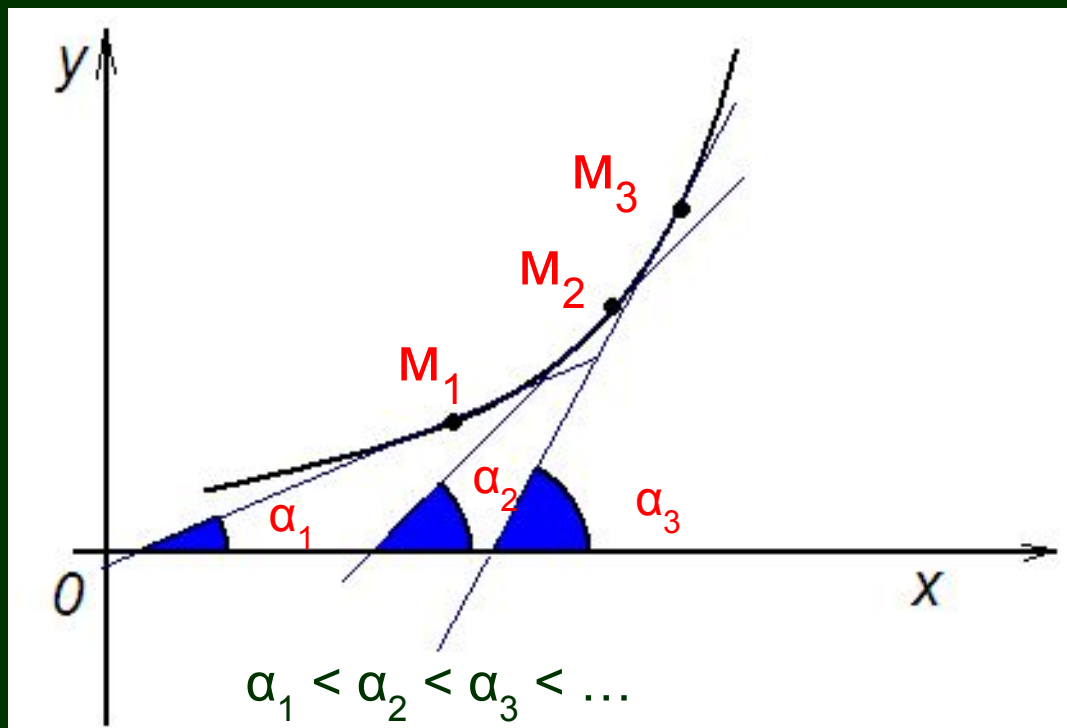


График функции $y = f(x)$ – вогнутая кривая

В точках $M_1, M_2, M_3 \dots$ проведены касательные
тангенсы углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ *увеличиваются*

$\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$,
следовательно, возрастает функция $f'(x)$

Если функция возрастает, то ее
производная положительна

Производная функции $f'(x)$ – это
производная производной
 $(f'(x))' = f''(x)$ и $f''(x) > 0$

Вывод:

*Если график функции – вогнутая
кривая, то вторая производная этой
функции – положительна.*

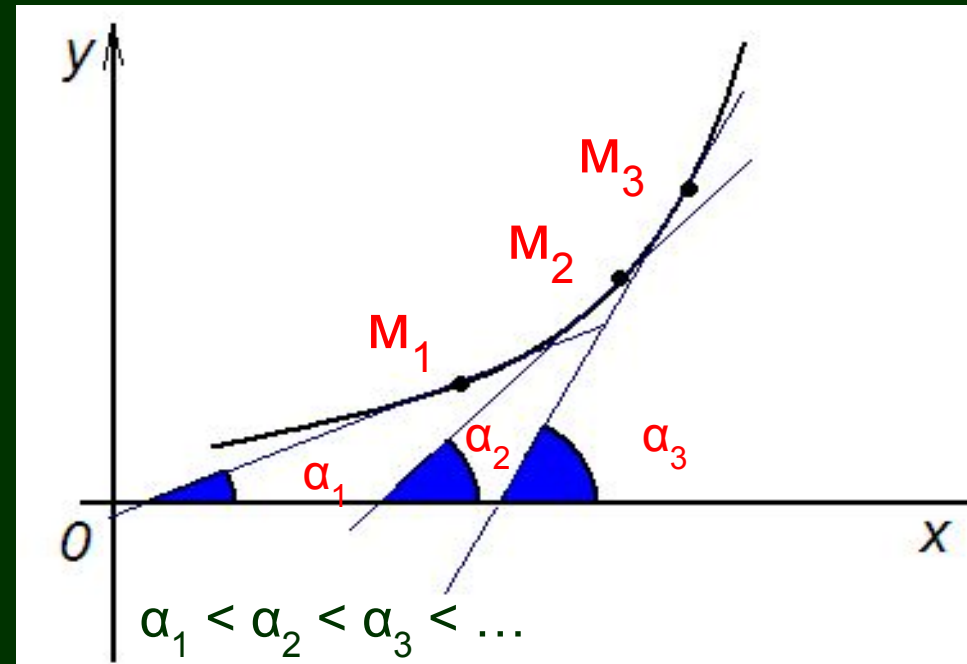


График функции $y = f(x)$ – выпуклая кривая

В точках M_1, M_2, \dots проведены касательные
тангенсы углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ убывают

$\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$, следовательно,
убывает функция $f'(x)$

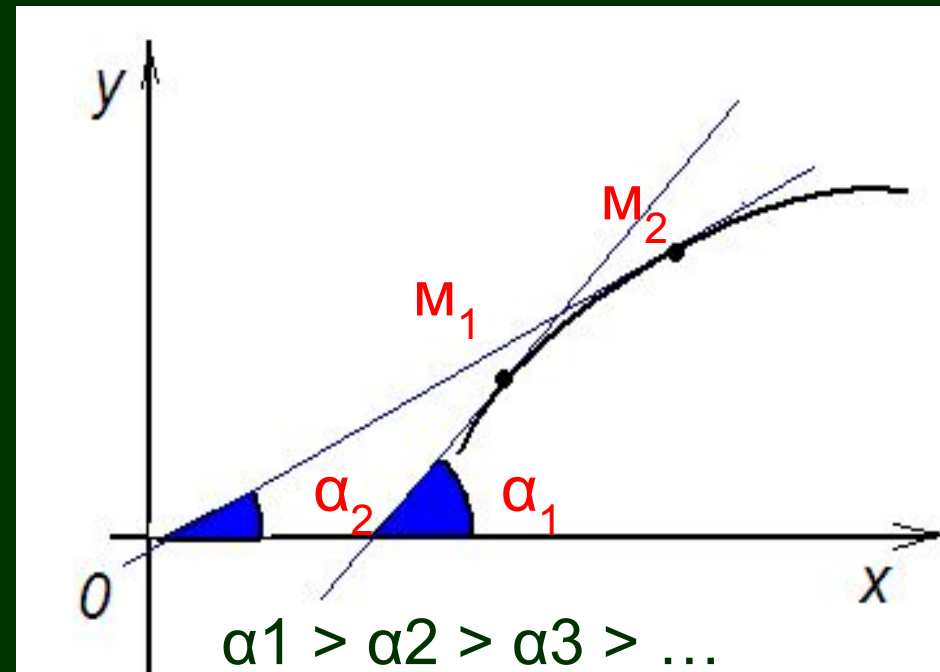
производная функции $y = f'(x)$

$(f'(x))' = f''(x)$ – отрицательна, т.е.

$$f''(x) < 0$$

Вывод:

Если график функции – выпуклая кривая, то вторая производная этой функции – отрицательна.



Если вторая производная функции

$$y = f(x)$$

*на данном интервале положительна, то кривая
вогнута*

*а если отрицательна – выпукла в этом
промежутке*

Точки, в которых выпуклость
меняется на вогнутость или наоборот,
называются **точками перегиба**

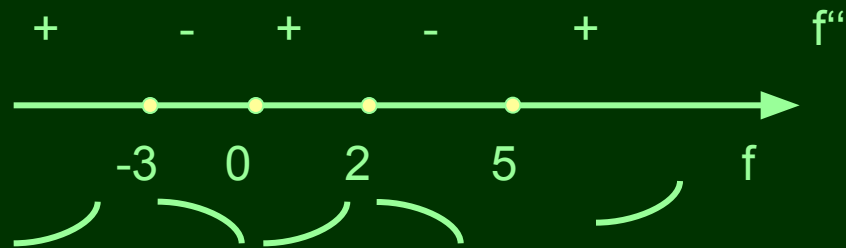
Правило нахождения интервалов выпуклости и вогнутости графика функции:

Найти:

1. Вторую производную
 2. Точки, в которых она равна нулю или не существует
 3. Интервалы, на которые область определения разбивается этими точками
 4. Знаки второй производной в каждом интервале
- Если $f''(x) < 0$, то кривая выпукла,
если $f''(x) > 0$ – вогнута.

Исследование функции с помощью второй производной

- Интервалы выпуклости:
 - $(-3, 0)$ и $(2, 5)$
- Интервалы вогнутости:
 - $(-\infty, -3)$, $(0, 2)$ и $(5, +\infty)$



- $x = -3, x = 0, x = 2, x = 5$ – точки перегиба

График функции

$$y = f(x) -$$

вогнутая кривая

«+»

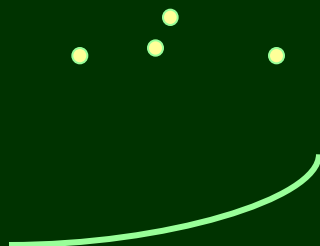
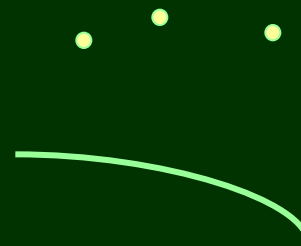


График функции

$$y = f(x) -$$

выпуклая кривая

«-»



Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба

- Вариант 1

- $y = x^3 - 12x + 4$

- Вариант 2

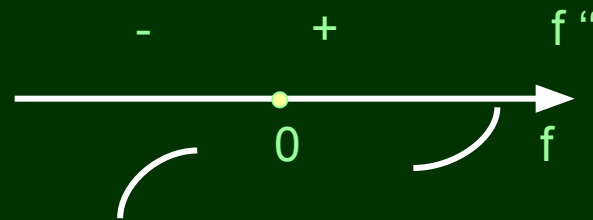
- $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

Проверка

Вариант 1

- $y = x^3 - 12x + 4$
- x – любое число
- $f'(x) = 3x^2 - 12$
- $f''(x) = 6x$
- $6x = 0$
- $x = 0$

- Интервалы выпуклости:
- $(-\infty, 0)$
- Интервалы вогнутости:
- $(0, +\infty)$

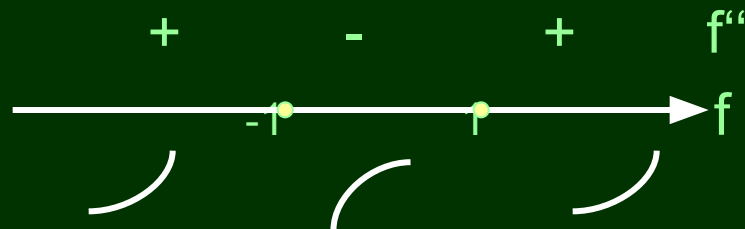


$x = 0$ – точка перегиба

Проверка Вариант 2

- $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$
- x – любое число
- $f'(x) = x^3 - 3x$
- $f''(x) = 3x^2 - 3 =$
 $3(x - 1)(x + 1)$
- $x = 1$
- $x = -1$

- Интервалы выпуклости:
 $(-1, 1)$
- Интервалы вогнутости:
 $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$



- $x = 1$ и $x = -1$ – точки перегиба

Спасибо за работу
Успехов!
