

# Вычисления

# площадей

# плоских

# фигур



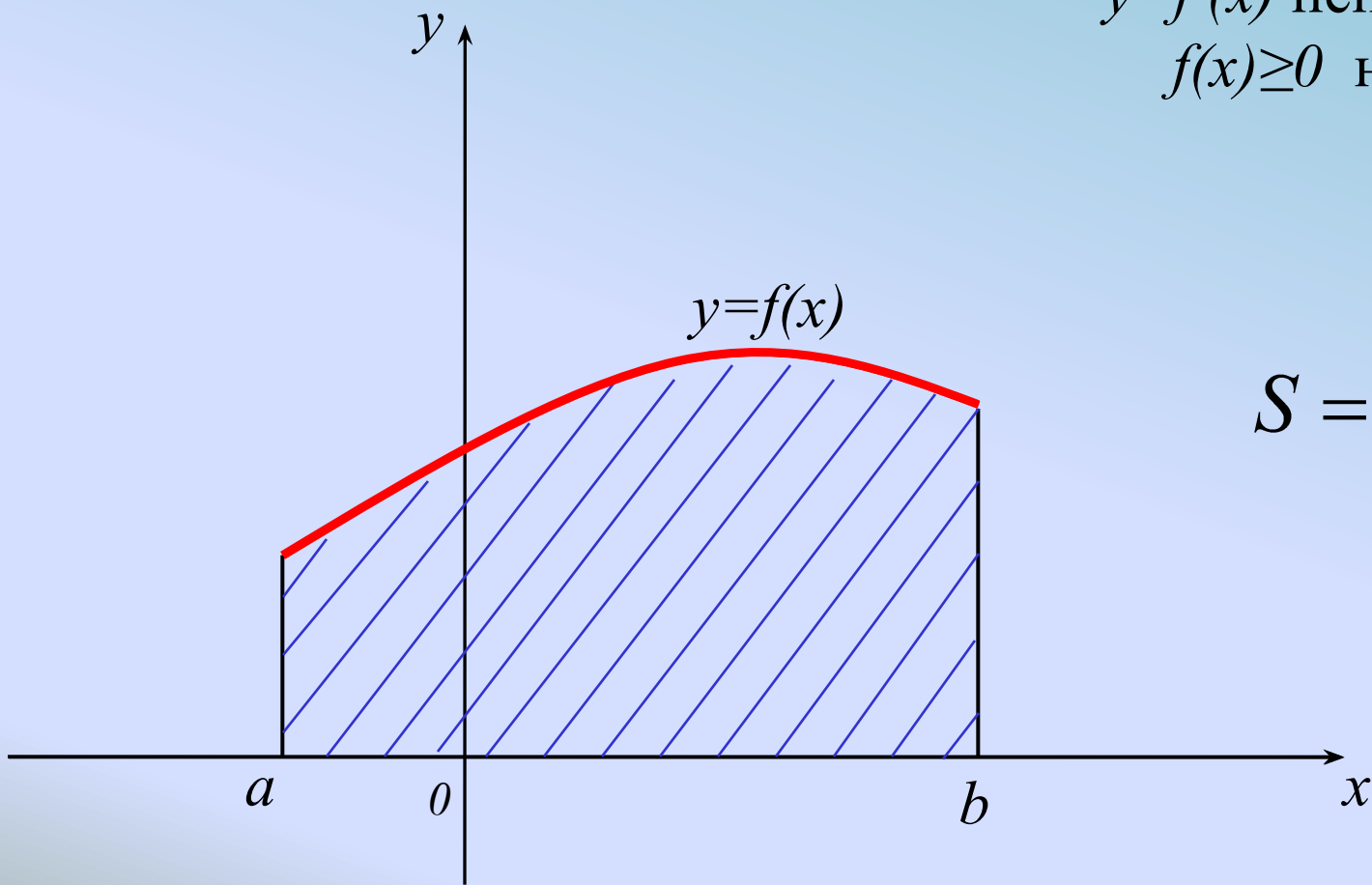
Республика Башкортостан г. Уфа

МАОУ лицей № 155

Ивушкина Л. Д.

# Найти площадь фигуры

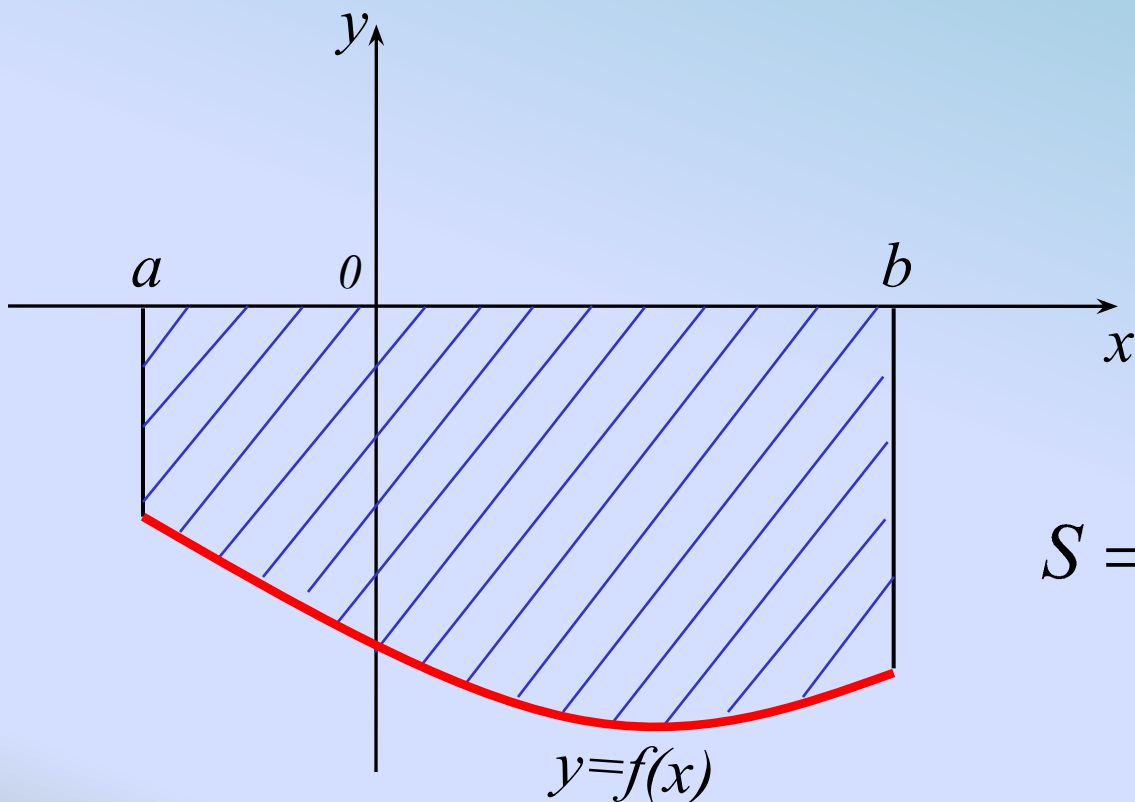
$y=f(x)$  непрерывная  
 $f(x) \geq 0$  на  $[a; b]$



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

# Найти площадь фигуры

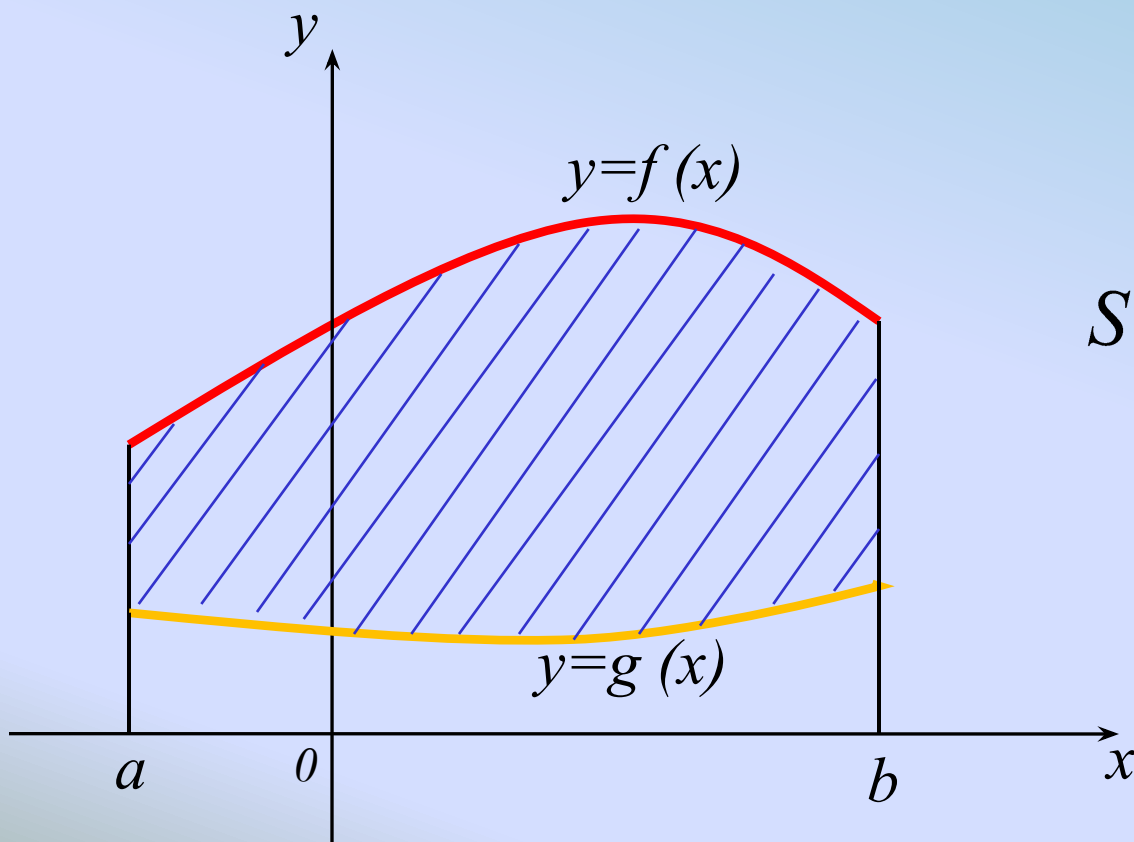
$y=f(x)$  непрерывная  
 $f(x) \leq 0$  на  $[a; b]$



$$S = -\int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

# Найти площадь фигуры

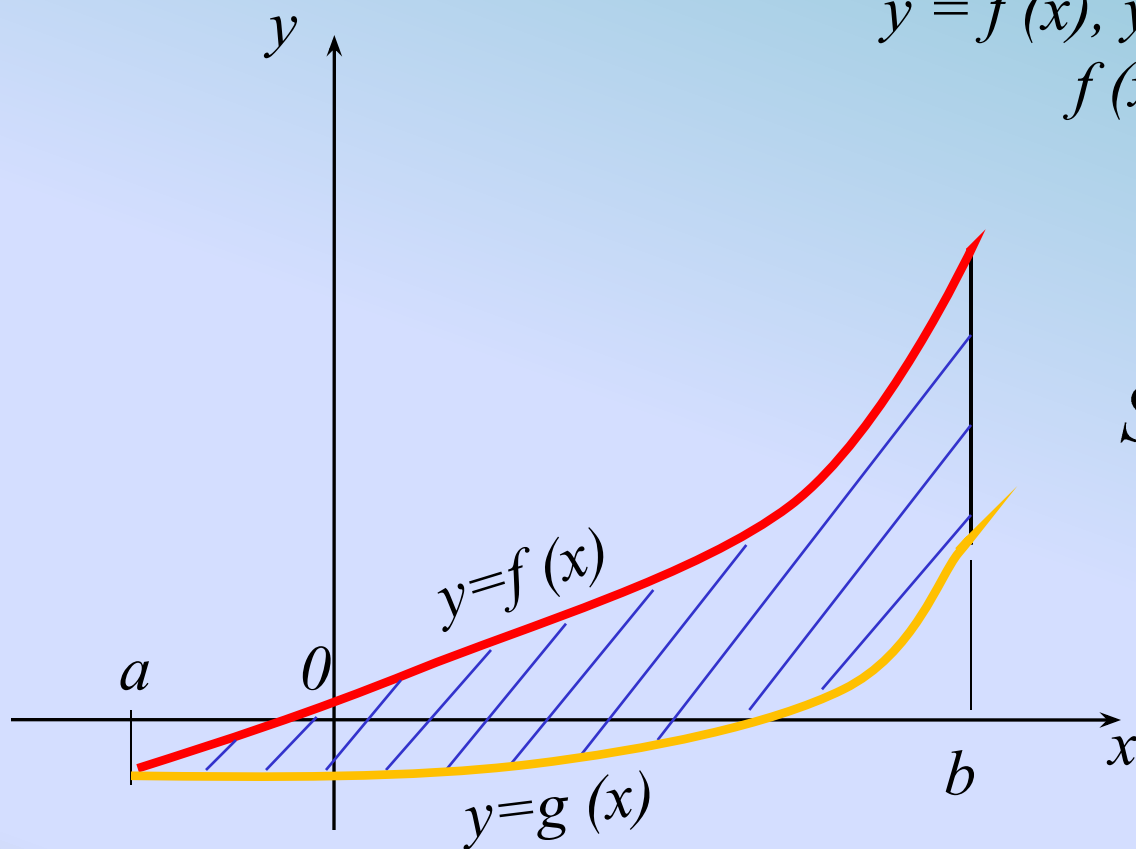
$y = f(x), y = g(x)$  – непрерывные,  
 $f(x) \geq g(x)$  на  $[a; b]$



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

# Найти площадь фигуры

$y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  – непрерывные,  
 $f(x) \geq g(x)$  на  $[a; b]$



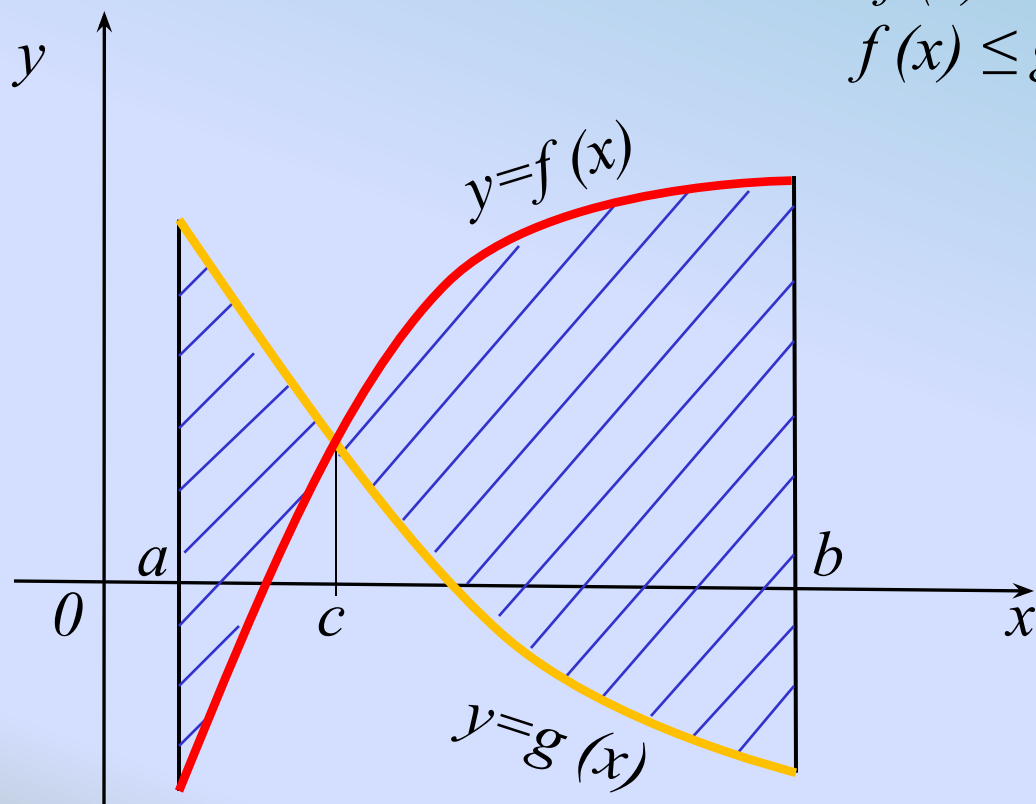
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

# Найти площадь фигуры

$y = f(x), y = g(x)$  – непрерывные на  $[a; b]$

$f(x) \geq g(x)$  на  $[c; b]$

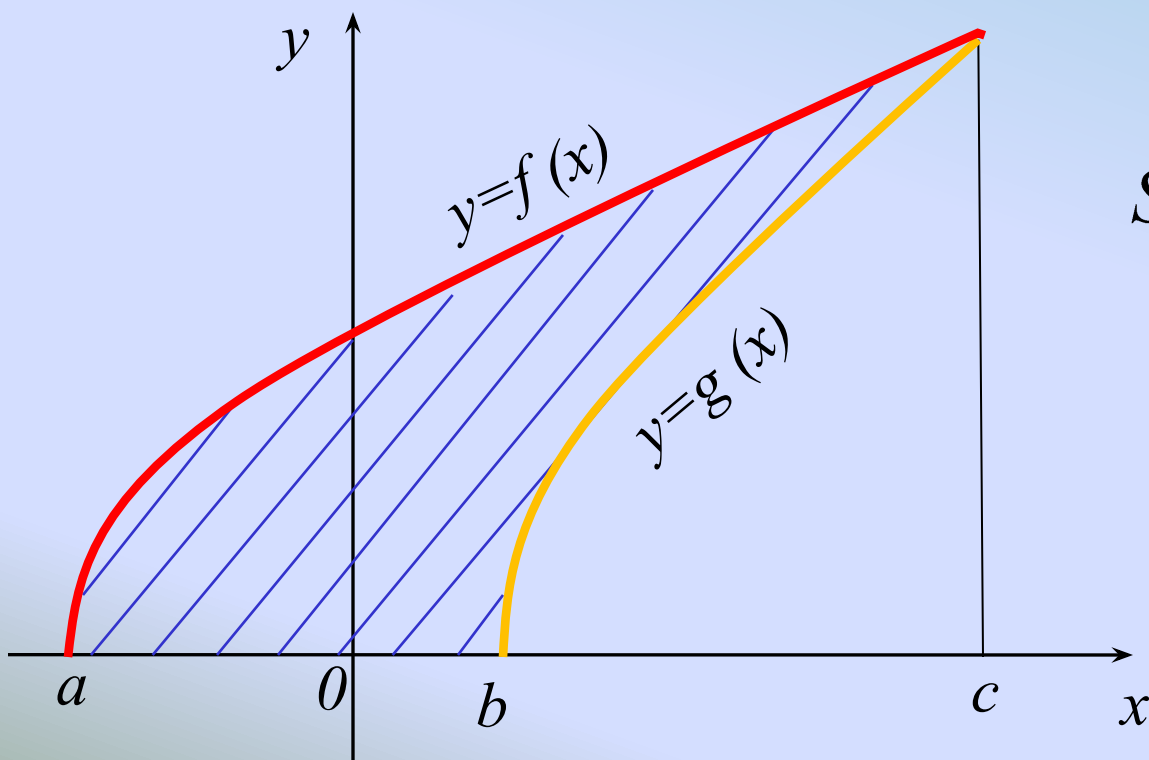
$f(x) \leq g(x)$  на  $[a; c]$ , где  $c \in [a; b]$



$$S = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \\ + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx$$

## Найти площадь фигуры

$y = f(x)$  – непрерывная на  $[a; c]$   
 $y = g(x)$  – непрерывная на  $[b; c]$   
 $f(x) \geq g(x)$  на  $[a; c]$ , где  $c \notin [a; b]$



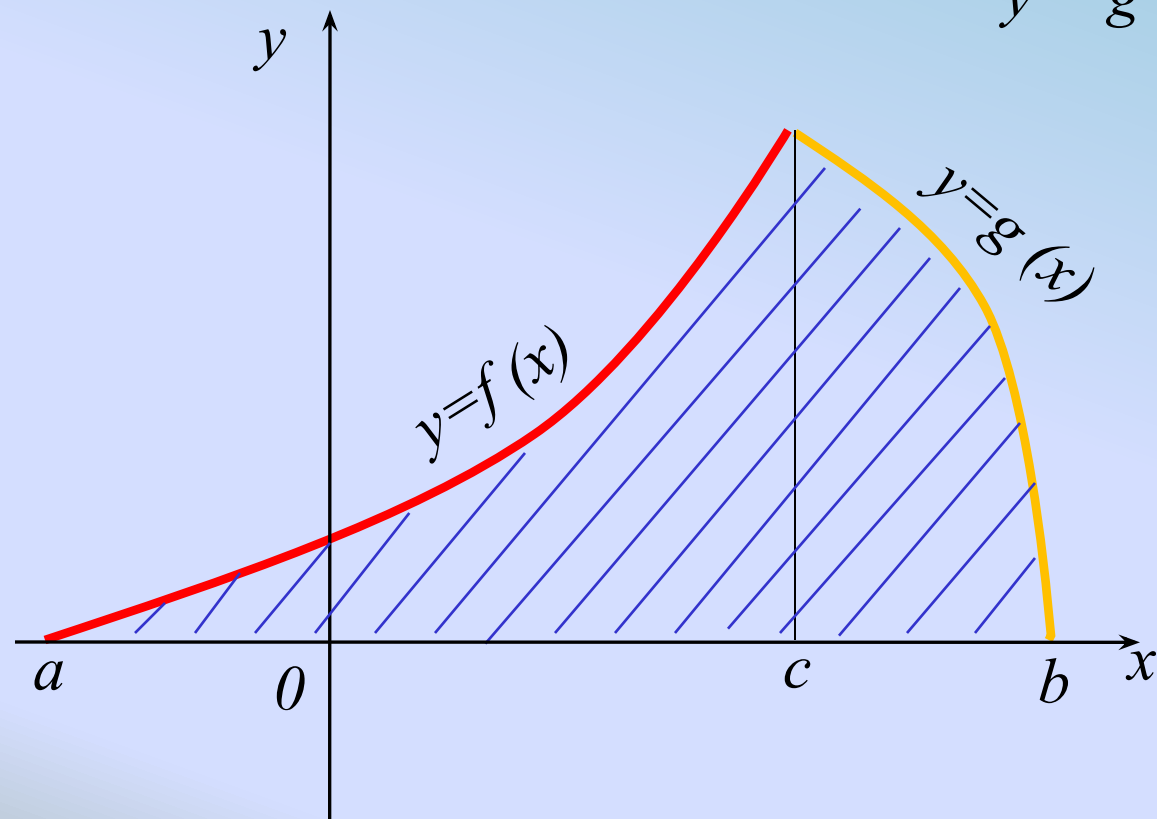
$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c g(x) dx$$

# Найти площадь фигуры

$y = f(x)$  – непрерывная на  $[a; c]$

$y = g(x)$  – непрерывная на  $[c; b]$ ,

где  $c \in [a; b]$

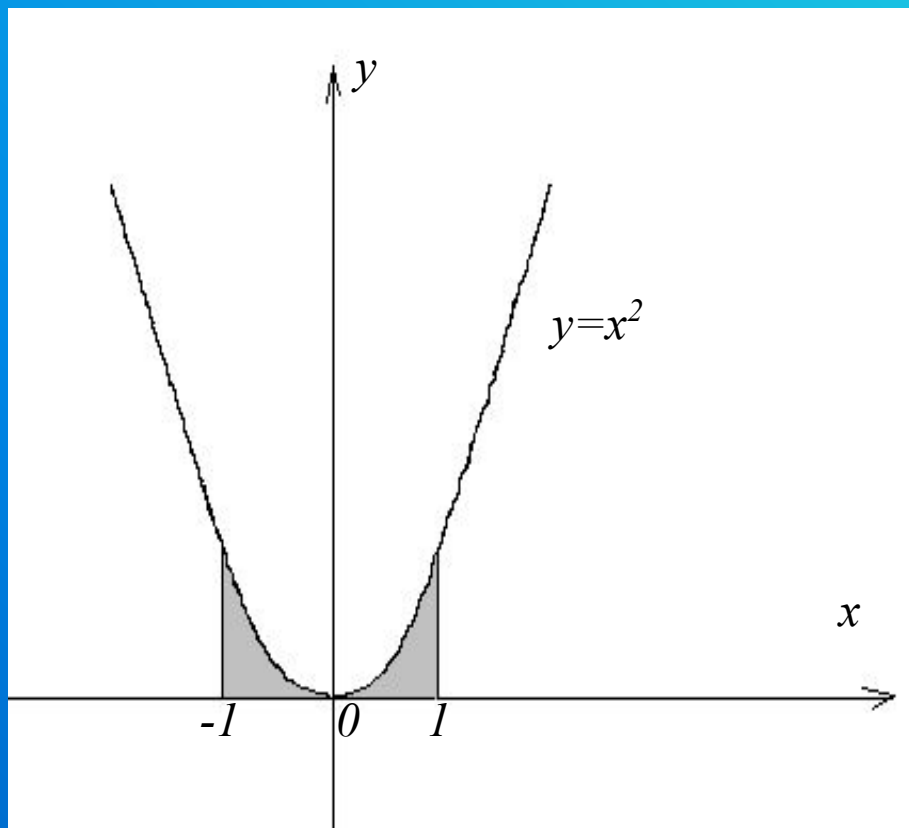


$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$



# Разминка

Найти площадь изображенной фигуры

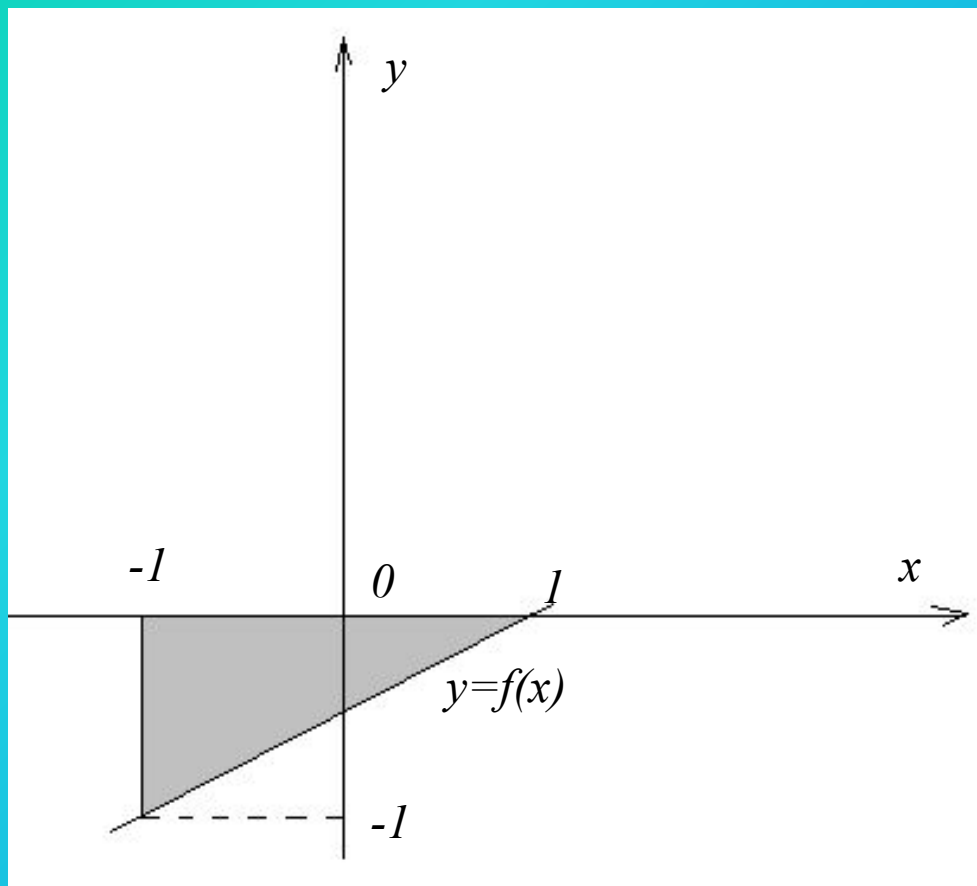


$$S = \frac{2}{3}$$

(четность функции)

# Разминка

Найти площадь изображенной фигуры



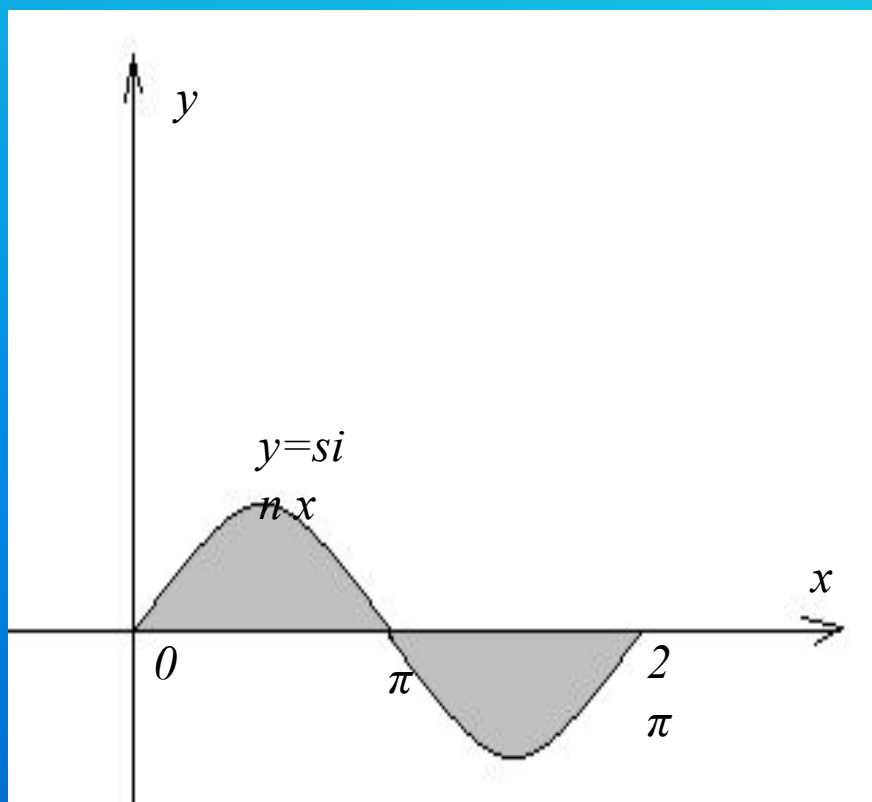
$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$S = 4$$

(площадь прямоугольного  
треугольника)

# Разминка

Найти площадь изображенной фигуры

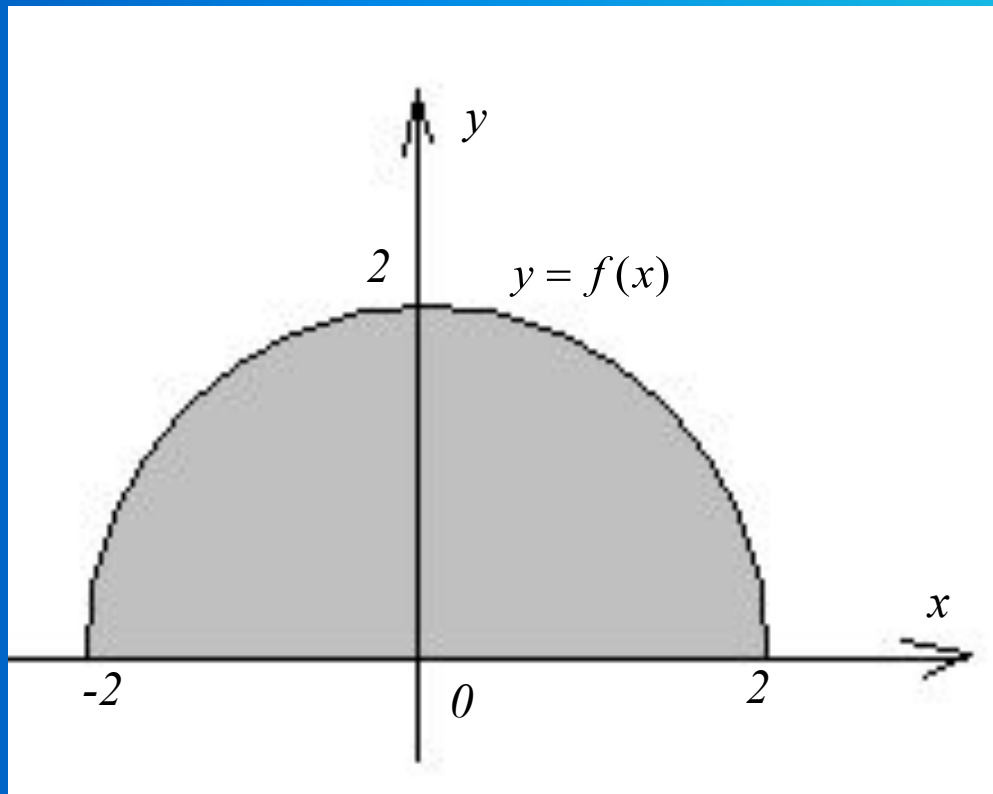


$$S = 4$$

(равенство фигур)

# Разминка

Найти площадь изображенной фигуры



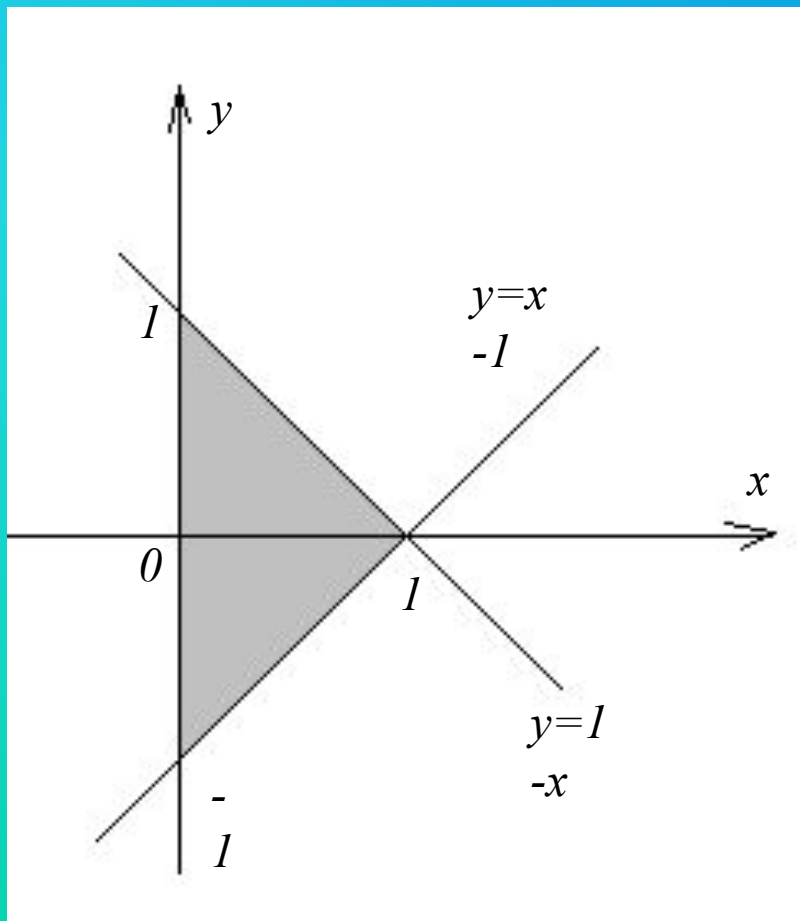
$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$S = 2\pi$$

(площадь полукруга)

# Разминка

Найти площадь изображенной фигуры



$$S = 1$$

(площадь треугольника)

# Задачи

- 1) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

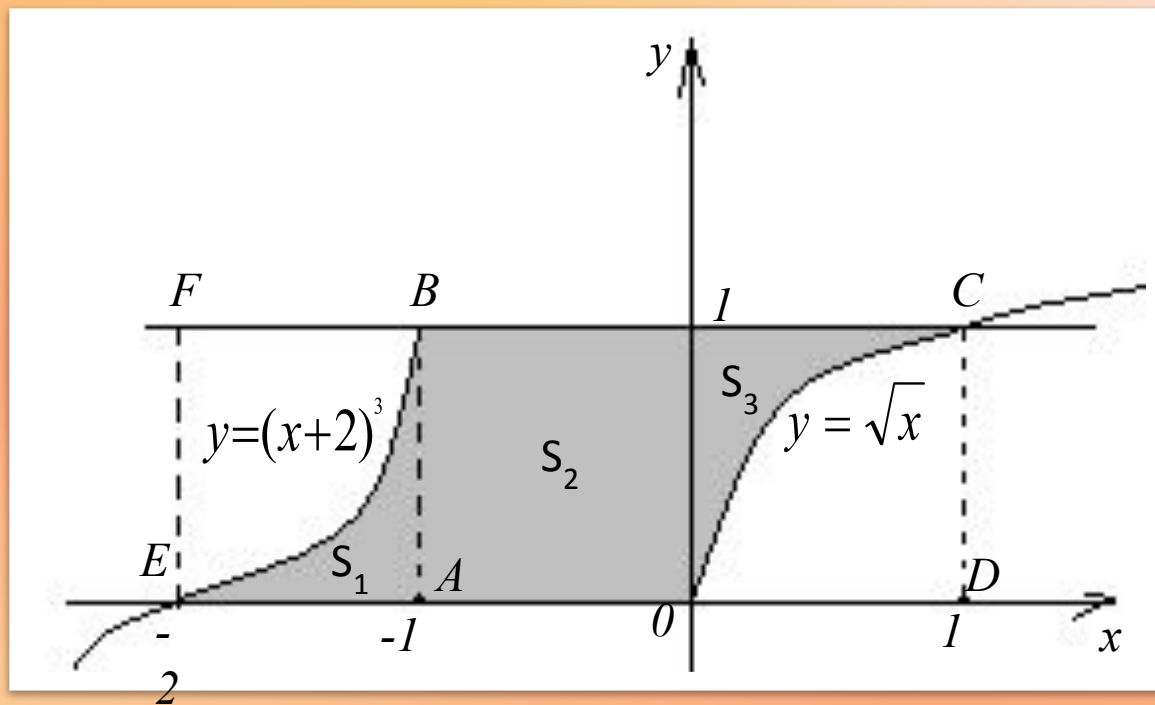
$$y = \sqrt{x}$$

$$y = (x+2)^3$$

$$y = 0$$

$$y = 1$$

$$y = \sqrt{x} \quad y = (x+2)^3 \quad y = 0 \quad y = 1$$



$$S = 19/12$$

1 способ

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

2 способ

$$S = S_1 + S_{ABCD} - S_{OCD}$$

3 способ

$$S = S_{EFC D} - S_{EFB} - S_{OCD}$$

2) Фигура, ограниченная линиями

$$y=x+6,$$

$$x=1,$$

$$y=0,$$

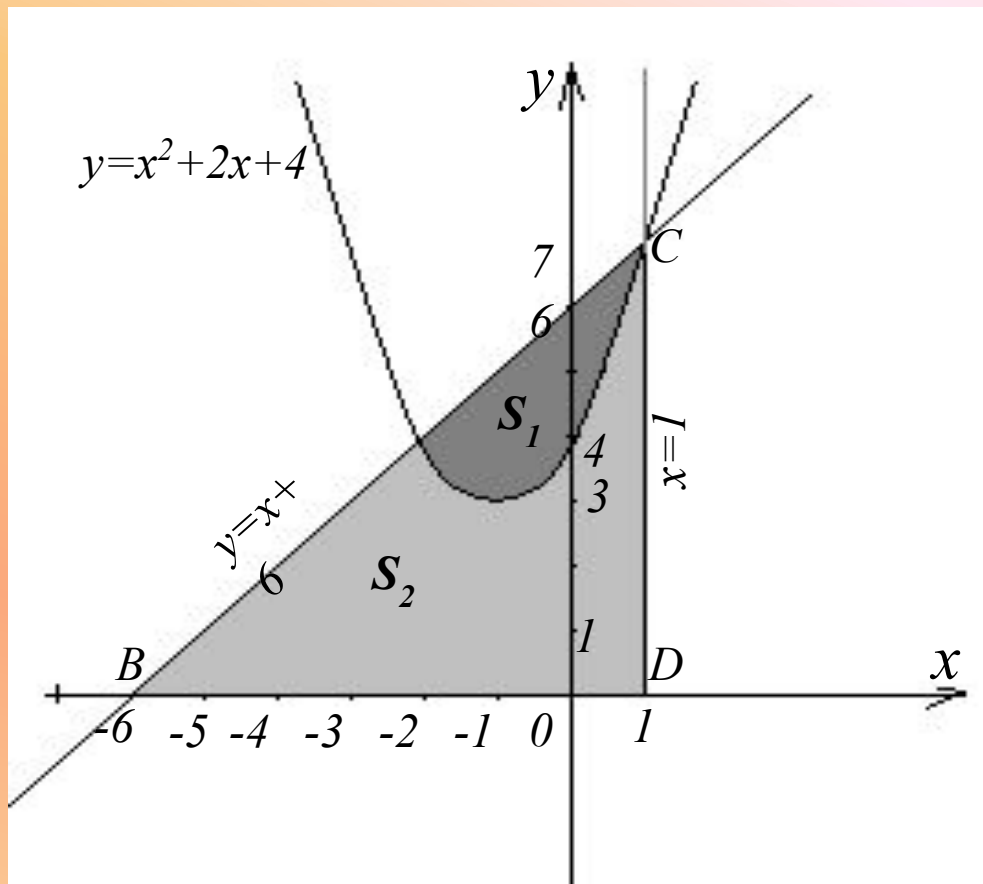
делится параболой

$$y=x^2 + 2x + 4$$

на две части.

Найти площадь каждой части.





$$S_1 = 4,5$$

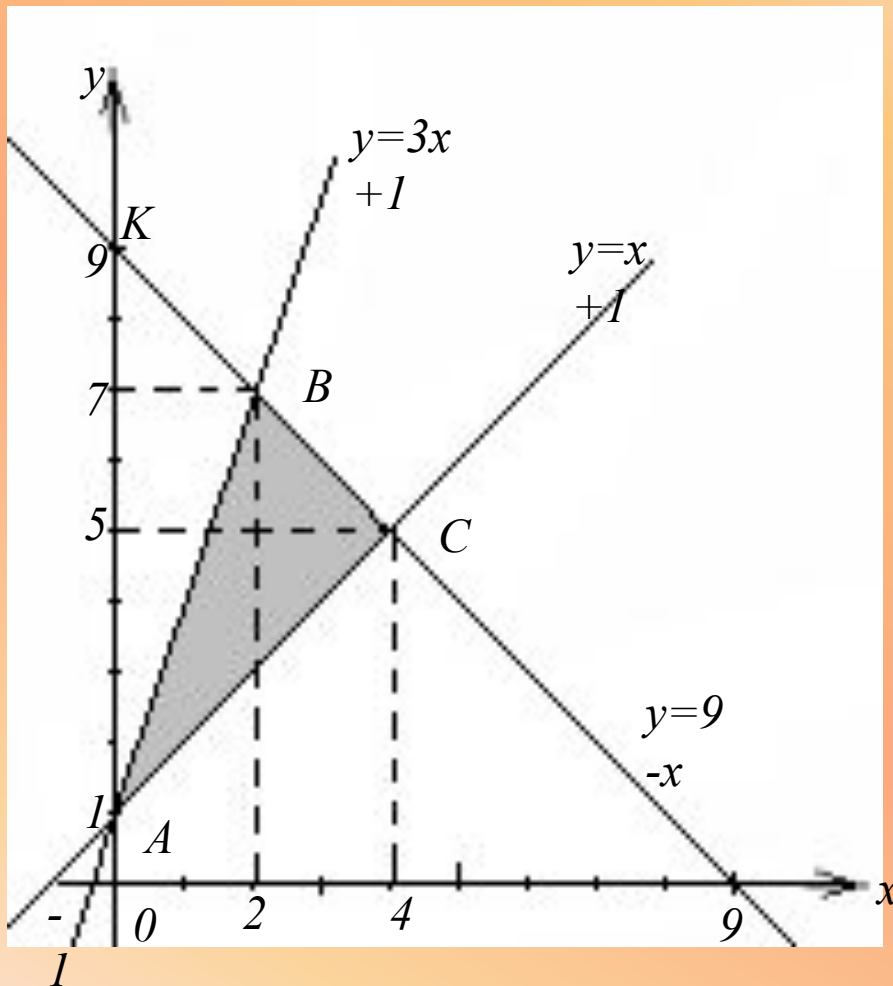
$$S_2 = 20$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 = 24,5$$

$$S_1 = \int_{-2}^1 [(x + 6) - (x^2 + 2x + 4)] dx = 4,5$$

$$S_2 = S_{\Delta BCD} - S_1$$

Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми



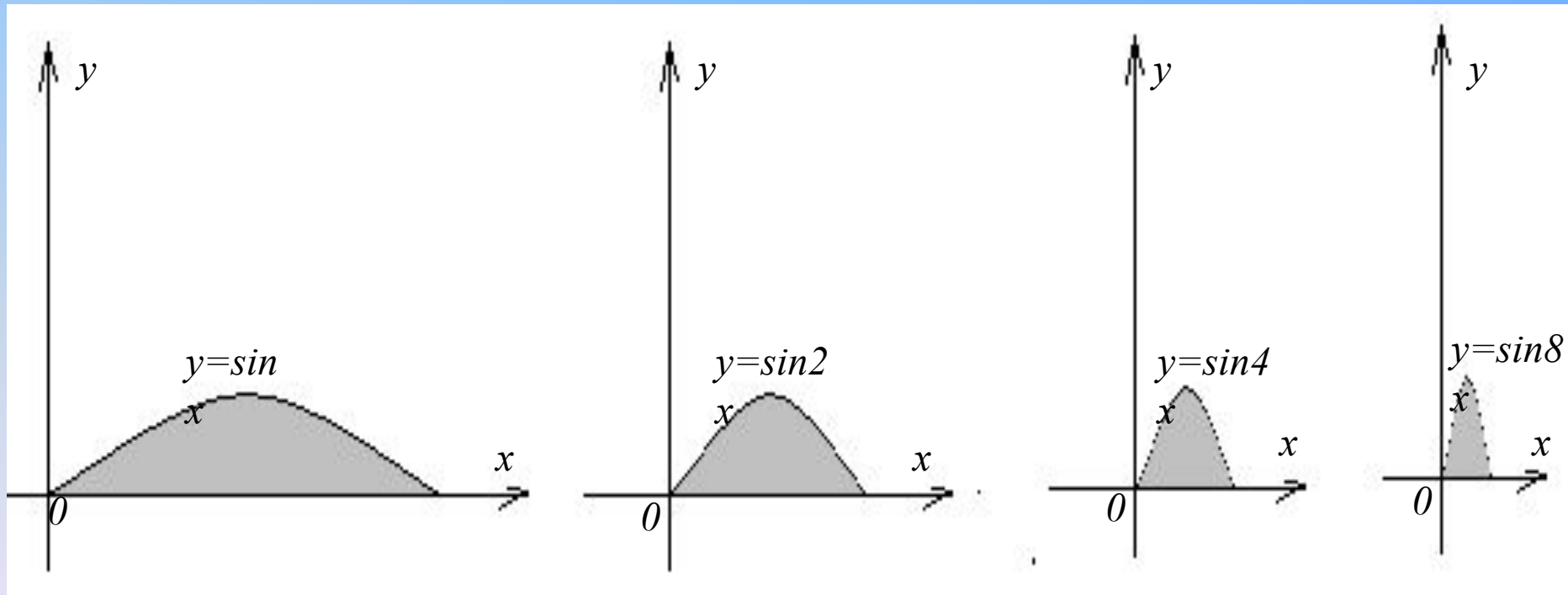
$$y = 3x + 1$$

$$y = 9 - x$$

$$y = x + 1$$

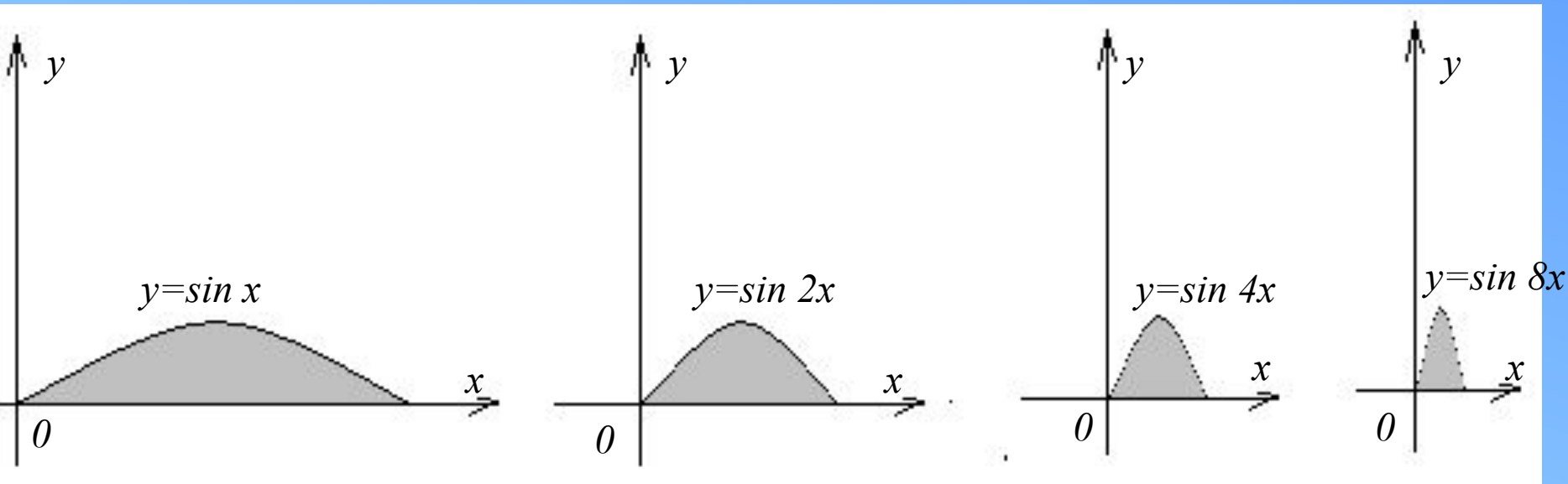
# Интересные задачи

1. Найти сумму площадей бесконечного количества фигур, изображенных на рисунке.  
(аргумент каждой следующей функции увеличивается в 2 раза)



Указания к решению:  $\sin nx = 0$

# Решение



$$\sin nx = 0, \quad nx = \pi, \quad x = \frac{\pi}{n}, \quad \text{где } n = 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$S_n = \int_0^{\pi/n} \sin nx dx = \frac{2}{n}$$

$$S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Ответ: 4.

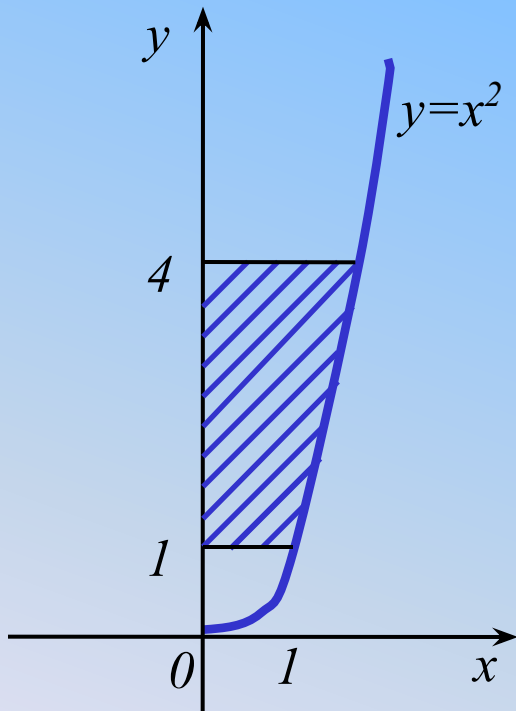
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

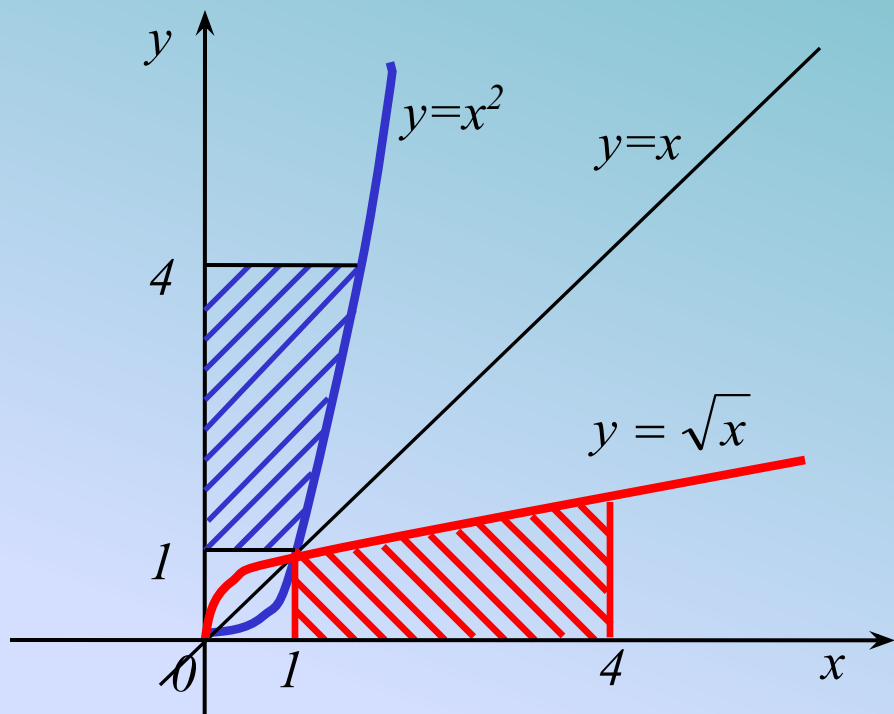
$$y = x^2, \text{ при } x \geq 0$$

$$y = 1$$

$$y = 4$$

$$x = 0$$

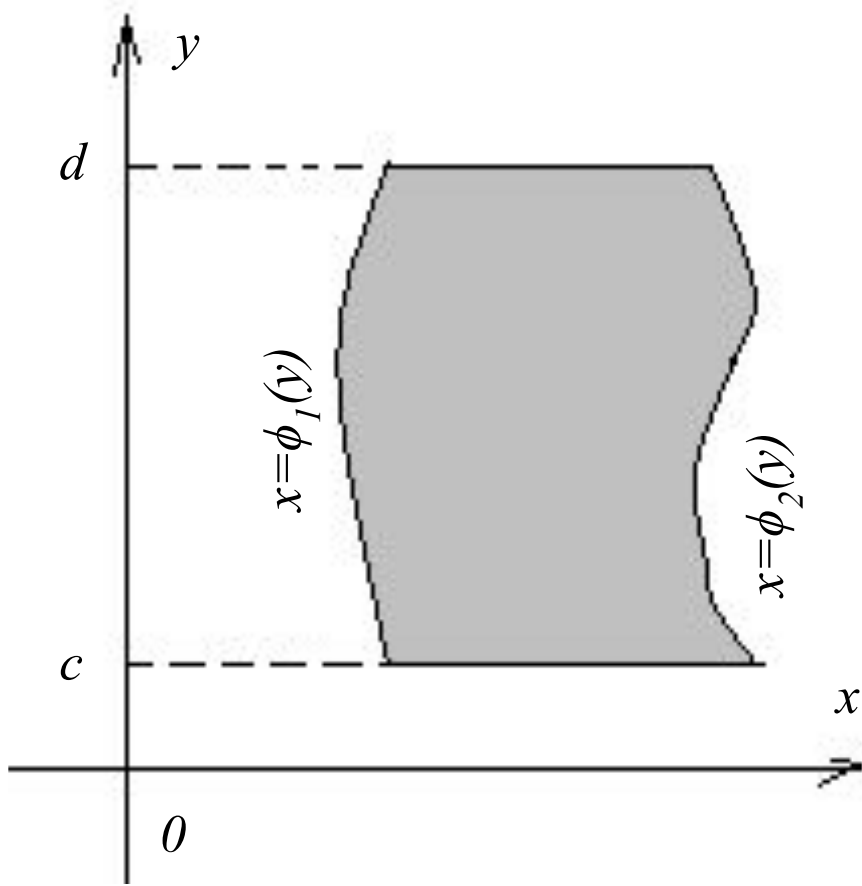




Данная фигура симметрична криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x=1$ ,  $x=4$ ,  $y=0$ , графиком функции, обратной  $y=x^2$ ,  $x \geq 0$ , т. е.  $y = \sqrt{x}$

Поэтому фигуры имеют равные площади

$$S = \int_1^4 \sqrt{x} dx$$



Если фигура ограничена линиями

$$x = \phi_1(y), \quad x = \phi_2(y), \quad y = c; \\ y = d,$$

где  $c < d$  и  $\phi_2(y) \geq \phi_1(y)$ ,  
на  $[c; d]$ ,

то ее площадь может  
быть вычислена по  
формуле

$$S = \int_c^d (\phi_2(y) - \phi_1(y)) dy$$



## *Используемая литература*

- *Алимов Ш.А. и др.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. 2002г.
- *Звавич Л.И., Рязановский А.Р., Поташник А.М.* Сборник задач по алгебре и математическому анализу для 10-11 кл. Вып.1 «Интеграл и площадь» 1996г.
- *Галицкий М.Л. и др.* Углубленное изучение алгебры и математического анализа. 10-11. Пособие для учителя. 1997г.

