ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ

Формальная логика изучает только истинность и ложность высказываний.

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Результат выполнения логической операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

Высказыванием называется **утверждение**, которое является **истинным или ложным**

Москва – столица России	**истинное высказывание**
5 – четное число	**ложное высказывание**
$x - 1 = 4$	**не высказывание**
Студент второго курса	**не высказывание**
Который час?	**не высказывание**

Высказывание

Простое

Содержат одну законченную мысль
и не могут быть получены из других высказываний

Составное

Получены из простых высказываний с помощью логических связок

Основные логические операции

Дизъюнкция – переход к составному высказыванию, которое является истинным, если истинно хотя бы одно из высказываний *А* и *В*

Обозначение $A \lor B$

Лексический аналог - «или», «либо», ...

Функция истинности

A	B	A∨B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Основные логические операции

Конъюнкция – переход к составному высказыванию, которое является ложным, если ложно хотя бы одно из высказываний А и В

Обозначение A&B, $A \wedge B, A \cdot B, AB$

Лексический аналог - «и», «а», …

Функция истинности

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Основные логические операции

Отрицание (инверсия) – переход к новому высказыванию, которое является истинным, если высказывание А ложно и ложно в противном случае.

Обозначение $\overline{A}, \neg A$

Лексический аналог - «не»

Функция истинности

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Основные логические операции

Импликация – переход к составному высказыванию, которое является ложным, если из истинного высказывания следует ложное.

Обозначение $A \to B$

Лексический аналог - «если..., то...»

Функция истинности

A	B	A→B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Основные логические операции

Эквиваленция – переход к составному высказыванию, которое является ложным, если посылки имеют противоположные логические значения.

Обозначение $A \leftrightarrow B, A \sim B$

Лексический аналог - «тогда и только тогда, когда...»

Функция истинности

A	B	A↔B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Другие логические операции

Кольцевая сумма, сумма Жегалкина, сумма по модулю 2, двоичное сложение – антиэквиваленция

Обозначение $A \oplus B$

Лексический аналог – «либо…, либо…»

Функция истинности

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Кольцевая сумма истинна в том и только в том случае, когда исходные высказывания А и В не равны между собой.

Другие логические операции

Стрелка Пирса – антидизъюнкция

Обозначение $A \downarrow B$

Лексический аналог – «ни…, ни…»

Функция истинности

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Стрелка Пирса истинна в том и только в том случае, когда оба высказывания А и В ложны

Другие логические операции

Штрих Шеффера – антиконъюнкция

Обозначение $A \mid B$

Лексический аналог – «не… или не…»

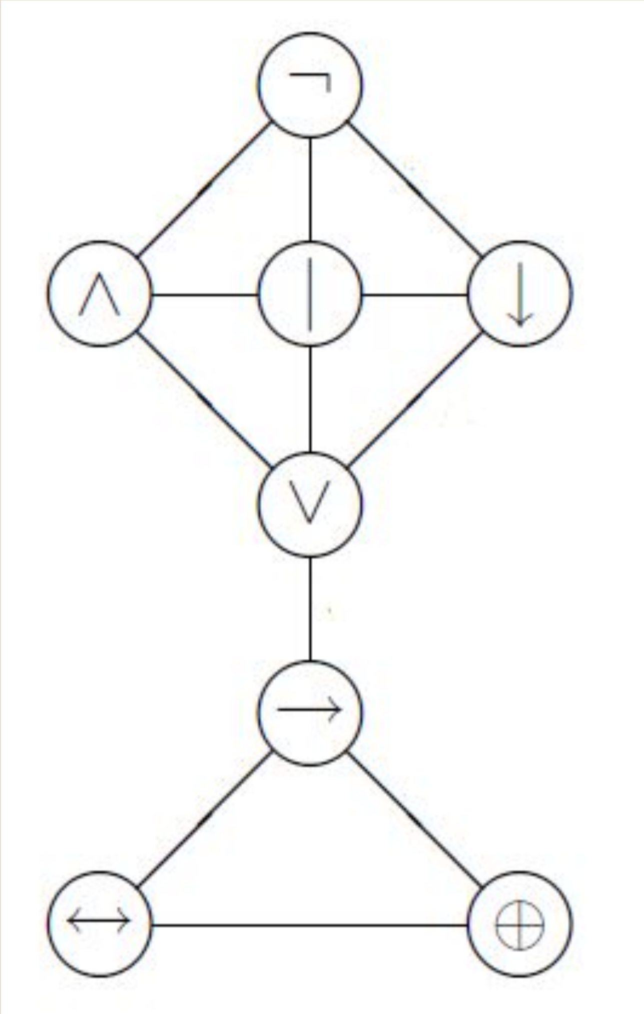
Штрих Шеффера ложный в том и только в том случае, когда оба высказывания А и В истинны

Функция истинности

A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Приоритет операций

1. Выполняются действия в скобках
2. Внешние скобки не пишутся
3. Остальные операции выполняются согласно схеме



Пример

$$x \overset{4}{\wedge} \overset{2}{\bar{y}} \overset{6}{\rightarrow} (x \overset{1}{\vee} y) \overset{5}{\wedge} \overset{3}{\bar{z}}$$

$$(A \overset{1}{\rightarrow} B) \overset{5}{\wedge} C \overset{6}{\vee} \overset{4}{\overline{(A \underset{3}{\leftrightarrow} \overset{2}{\overline{C}})}}$$

Виды формул

- Формула называется ***тавтологией***, если она принимает только истинные значения при любых значениях букв. Другими словами, тавтология – это тождественно истинная формула.
- Формула называется ***противоречивой***, если она принимает только ложные значения при любых значениях букв. Другими словами, противоречивая – это тождественно ложная формула.
- Формула называется ***выполнимой***, если она принимает истинное значение хотя бы на одном наборе переменных.
- Формула называется ***опровержимой***, если она принимает ложное значение хотя бы на одном наборе переменных.

Построение таблицы истинности

1. Подсчитать количество переменных в формуле n.
2. Определить количество строк в таблице – 2^n.
3. Подсчитать количество операций в формуле и определить количество столбцов m + n.
4. Записать названия столбцов с учетом последовательности выполнения операций.
5. Заполнить столбцы переменных наборами от 00…0 до 11…1 в лексикографическом порядке, используя метод «последовательного деления столбцов пополам»
6. Заполнить таблицу по столбцам.

Примеры

$$x \wedge \bar{y} \to (x \vee y) \wedge \bar{z}$$

n=3

m=6

x	y	z	$x \vee y$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x \wedge \bar{y}$	$(x \vee y) \wedge \bar{z}$	F
0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1

Примеры

$$(A \to B) \wedge C \vee \overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$$

n=3

m=6

A	B	C	$A \to B$	$\overline{C}$	$A \leftrightarrow \overline{C}$	$\overline{(A \leftrightarrow \overline{C})}$	$(A \to B) \wedge C$	F
0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1

Решить самостоятельно

1. $(A \vee B) \leftrightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$

2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C))$

3. $(A \rightarrow \overline{C}) \leftrightarrow ((B \wedge C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

4. $(A \leftrightarrow \overline{B}) \rightarrow ((A \wedge \overline{C}) \rightarrow (B \wedge C))$