Ряды

Лекция 5: Ряды Фурье

- Тригонометрические ряды.
- Ряды Фурье
- Разложения чётных и нечетных функций в ряды Фурье
- Разложение на [-*l*;*l*]
- Разложение по косинусам и по синусам

5.1. Тригонометрические ряды. Теорема Дирихле

При изучении периодических процессов, то есть процессов, которые через определенный промежуток времени повторяются, целесообразнее разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в тригонометрический ряд.

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (5.1)$$

называется ***тригонометрическим рядом***.

Действительные числа a_0, a_n, b_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ называются ***коэффициентами*** тригонометрического ряда.

Запишем формулы, которые в дальнейшем понадобятся.

Пусть m и n являются целыми положительными числами, тогда имеют место следующие формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} \left.\dfrac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ (n \neq 0), \\ x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi\ (n=0); \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \text{ при любом } n; \tag{5.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)dx=\begin{cases}0, (m\neq n),\\ \pi, (m=n);\end{cases} \quad (5.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x)dx=0; \quad (5.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)dx=\begin{cases}0, (m\neq n),\\ \pi, (m=n).\end{cases} \quad (5.6)$$

Формулы (5.2)- (5.6) показывают, что семейство функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

обладают ***свойством ортогональности***: интеграл от произведения любых двух функций этого семейства на интервале, имеющем длину 2π, равен нулю.

Пусть функция $f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π. Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{5.7}$$

Так как функция $f(x)$ (и сумма ряда) имеет период 2π, то ее можно рассматривать в любом промежутке длины 2π. В качестве основного промежутка возьмем отрезок $[-\pi;\pi]$ (можно взять отрезок $[0;2\pi]$). Предположим, что ряд (5.7) на этом отрезке можно почленно интегрировать. Найдем коэффициенты a_n и b_n, проинтегрировав обе части равенства (5.7) в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0.$$

Итак,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{5.8}$$

Умножим обе части равенства (5.7) на $\cos mx$ и проинтегрируем полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx dx \right).$$

Пусть $m = n$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n \pi.$$

Получаем, что

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (5.9)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (5.7)$$

Аналогично, умножив, равенство (5.7) на $\sin mx$ и проинтегрировав полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π, найдем:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx,\ n=1,2,3,\ldots. \qquad (5.10)$$

Тригонометрический ряд (5.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (5.8)–(5.10), называется ***рядом Фурье*** функции $f(x)$.

Числа a_0, a_n, $b_n (n=1,2,\ldots)$, определяемые по формулам (5.8)–(5.10), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$.

Для функции $f(x)$ интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ записывают:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и говорят: функции $f(x)$ соответствует (поставлен в соответствие) ее ряд Фурье. Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначим $S(x)$.

Рассмотрим условия, при которых ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой функцию $f(x)$.

Функции, которые имеют период $T = 2\pi$ называют ***2π-периодическими*** функциями.

Теорема Дирихле

Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, то есть непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;
2. $f(x)$ кусочно-монотонна, то есть монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

то есть равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Условия 1 и 2 *Теоремы Дирихле* называются ***условиями Дирихле***.

Итак, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет место разложение (5.7):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (5.8)- (5.10). Равенство (5.7) может нарушаться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi;\pi]$.

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

Замечания

1. Если функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[0;2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (5.7), где коэффициенты определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx,\ n = 1,2,3,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx,\ n = 1,2,3,\ldots.$$

2. Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях. Существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, то есть теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но не необходимое.

Пример. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{\pi}, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.1).

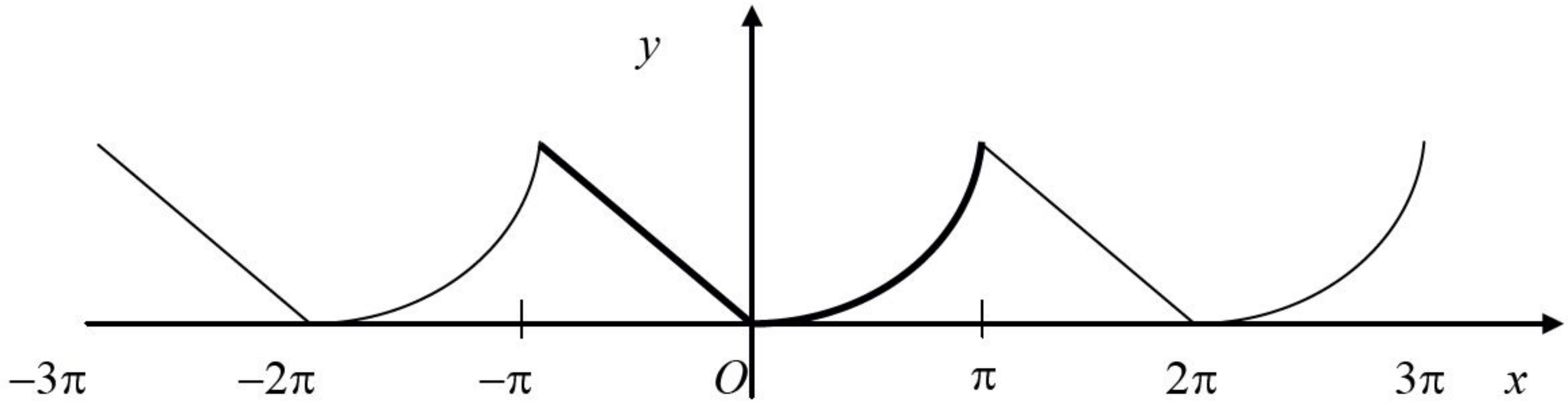

Рис. 5.1

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -xdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{x^2}{\pi}dx = \frac{5}{6}\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} \frac{x^2}{\pi}\cos nxdx\right) = \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-x\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{2\left[(-1)^n-1\right]}{\pi^2n^3},$$

$$b_n=\begin{cases}0,\ \text{если } n \text{ четное},\\ -\dfrac{4}{\pi^2n^3},\ \text{если } n \text{ нечетное}.\end{cases}$$

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x)=\frac{5}{12}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx-\frac{4}{\pi^2(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\right).$$

5.2. Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье

Если разлагаемая в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция $f(x)$ является четной (или нечетной), то вычисление коэффициентов Фурье упрощается.

Пусть функция $f(x)$ четная. Ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \tag{5.11}$$

где

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\;\; a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,\; n\in\mathbb{N}. \tag{5.12}$$

Пусть функция $f(x)$ нечетная. Ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{5.13}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

Ряды (5.11) и (5.13) называются ***неполными*** тригонометрическими рядами, или рядами ***по косинусам*** и ***по синусам*** соответственно.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=x,\quad -\pi<x<\pi.$$

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.2).

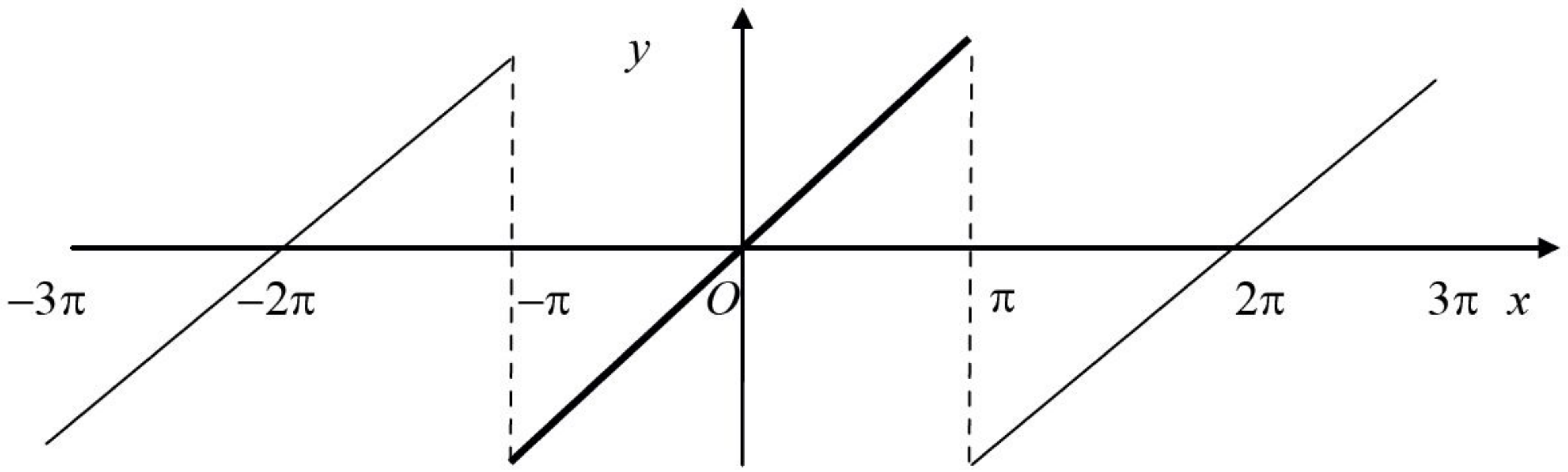

Рис. 5.2

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. На интервале $(-\pi;\pi)$ функция $f(x)=x$ нечетная. Отсюда следует, что ряд Фурье этой функции будет содержать только синусы, а при косинусах все коэффициенты $a_n=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Вычислим коэффициенты b_n по формуле (5.14)

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},$$

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right).$$

В интервале $(-\pi;\pi)$ это равенство имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$, то есть в данном случае в всех внутренних точках интервала $(-\pi;\pi)$. Вне интервала этот ряд изображает периодическое продолжение рассматриваемой функции.

В точках же разрыва, которыми являются точки $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, ..., сумма ряда равна среднему арифметическому ее левостороннего и правостороннего пределов в этих точках.

Найдем эти пределы

$$\lim_{x\to\pi-0} f(x)=\lim_{x\to\pi-0} x=\pi, \lim_{x\to-\pi+0} f(x)=\lim_{x\to-\pi+0} x=-\pi.$$

Среднее арифметическое этих пределов

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{\pi-\pi}{2}=0.$$

Во всех точках разрыва этой функции получим то же самое.

Из полученного разложения при $x = \frac{\pi}{2}$ можно получить интересную сумму

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right),$$

Отсюда следует, что сумма ряда

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=|x|,\ -\pi \le x \le \pi.$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.3).

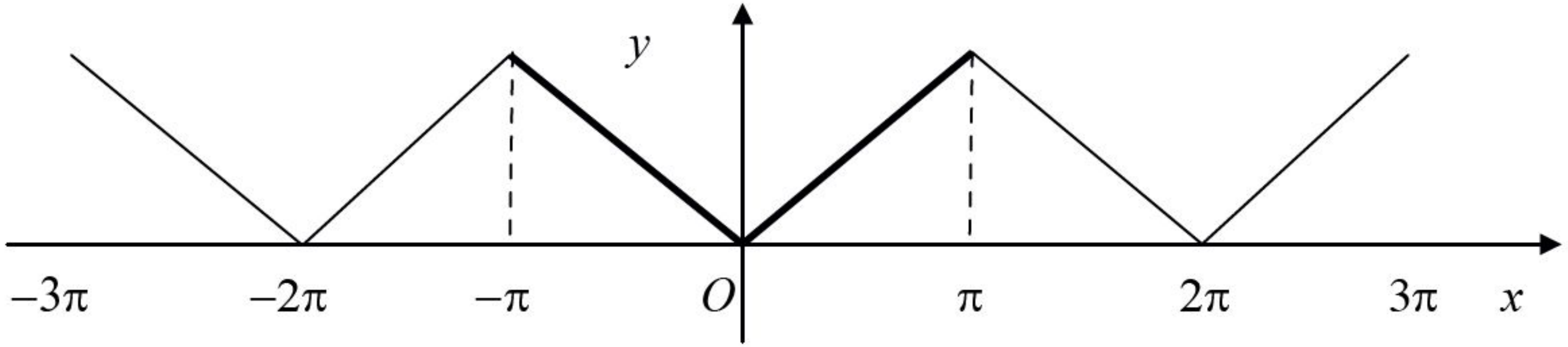

Рис. 5.3

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. На интервале $(-\pi;\pi)$ функция $f(x)=x$ четная. Отсюда следует, что ряд Фурье этой функции будет содержать только постоянную составляющую и косинусы, а при синусах все коэффициенты $b_n=0$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Вычислим коэффициенты a_n по формулам (5.12)

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx=\pi.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Если n — четное число, то $a_2 = a_4 = a_6 = ... = a_{2k} = 0$, а если n — нечетное число, то $a_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}$.

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos x}{1^2} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 5x}{5^2} - ...,$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ...\right).$$

Так как функция $f(x)=|x|$ непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$, то полученный ряд сходится к $|x|$ при всех значениях x из этого отрезка, а вне этого отрезка — к периодическому продолжению этой функции.

Из полученного ряда можно получить интересную сумму. Пусть $x=0$, тогда

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right),$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right),$$

умножая обе части этого равенства на $\frac{\pi}{4}$, получим

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

5.3. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l;l]$, имеет период $2l$ $(f(x+2l)=f(x)$, где l — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Сделаем подстановку $x=\frac{l}{\pi}t$. Преобразуем функцию $f(x)$ в функцию $\varphi(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi;\pi]$ и имеет период $T=2\pi$.

Разложение функции $\varphi(t)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет вид

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt dt,\ n=0,1,2,\ \ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt dt,\ n=1,2,3,\ldots.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \tag{5.15}$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ n=0,1,2,\ \ldots, \tag{5.16}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ n=1,2,3,\ldots. \tag{5.17}$$

Ряд (5.15) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (5.16), (5.17), называется ***рядом Фурье*** для ***функции*** $f(x)$ с периодом $T=2l$.

Замечание

Если функция $f(x)$ на отрезке $[-l;l]$ четная, то ее ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}, \tag{5.18}$$

где

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ \ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ n\in\mathbb{N}; \tag{5.19}$$

если функция $f(x)$нечетная, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{5.20}$$

где

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ n\in\mathbb{N}. \tag{5.21}$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x\le 0,\\ x, & 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.4).

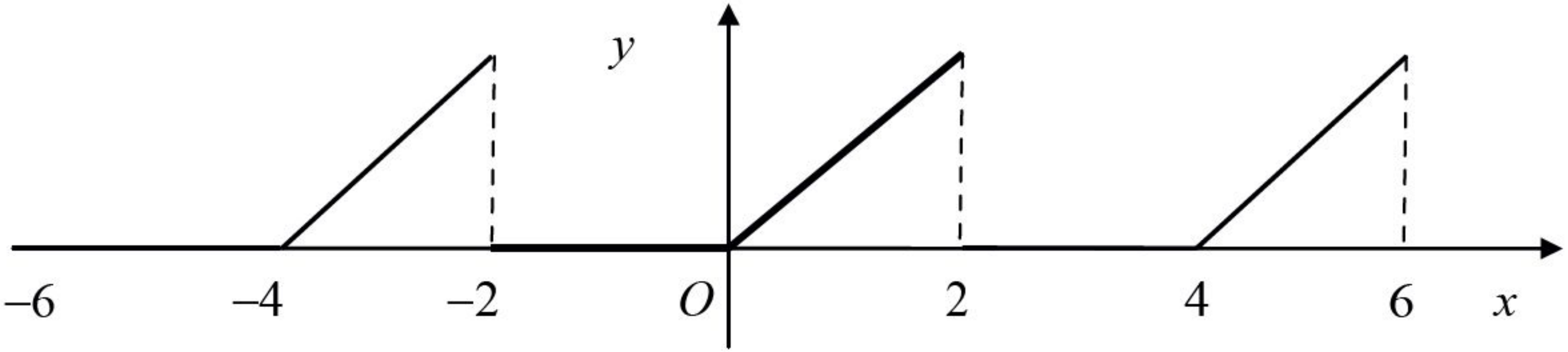

Рис. 5.4

Найдем коэффициенты ряда Фурье. Коэффициенты a_n вычислим по формуле (5.16)

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\cdot\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx + \int_{0}^{2} x\cdot\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Вычислим отдельно a_0.

$$a_0 = 1.$$

Коэффициенты b_n вычислим по формуле (5.17)

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int_{0}^{2} x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}(-1)^n.$$

Подставим найденные значения коэффициентов a_0, a_n, b_n в ряд (5.15), учитывая, что $l = 2$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{\pi n x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi n x}{2}}{2}.$$

Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть функция $f(x)$ непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x. Но, непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье на любом конечном промежутке $[a;b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого можно поместить начало координат в середину отрезка $[a;b]$ и построить функцию $f_1(x)$ периода $T = 2l = |b-a|$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $-l \le x \le l$.

Разлагаем функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a;b]$ (кроме точек разрыва) совпадает с заданной функцией $f(x)$. Вне этого промежутка сумма ряда и $f(x)$ являются совершенно различными функциями.

Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0;l]$. (Это частный случай: начало координат перенесено в точку $x=a$ отрезка $[a;b]$; область определения функции $f(x)$ будет иметь вид $[0;l]$, где $l=|b-a|$.)

Такую функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l;0]$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T=2l$. Разложив в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ полученную таким образом периодическую функцию $f_1(x)$, получим искомый ряд функции $f(x)$ при $x\in[0;l]$.

Разложение в ряд косинусов функции, заданной на отрезке [0; l]

Если на отрезке определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится четная функция с периодом $2l$. В самом деле, возьмем график заданной функции на этом сегменте, присоединим к нему фигуру, симметричную с ним относительно оси ординат. Затем к образовавшейся фигуре присоединим все ее горизонтальные смещения на расстояния, кратные $2l$. Тогда получится график четной функции с периодом $2l$, совпадающей с заданной функцией на сегменте $[0;l]$.

Отсюда и из сказанного ранее о разложении четных периодических функций в ряды Фурье следует, что $f(x)$ имеет разложение в ряд косинусов по формуле (5.18).

Разложение в ряд синусов функции, заданной на отрезке [0; *l*]

Если на отрезке определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится нечетная функция с периодом $2l$. В самом деле, возьмем график заданной функции на этом сегменте, присоединим к нему фигуру, симметричную с ним относительно начала координат. Затем к образовавшейся фигуре присоединим все ее горизонтальные смещения на расстояния, кратные $2l$ и добавим точки с координатами nl (где n — любое целое число). Тогда получится график нечетной функции с периодом $2l$, совпадающей с заданной функцией на сегменте $[0;l]$.

Отсюда и из сказанного ранее о разложении нечетных периодических функций в ряды Фурье следует, что $f(x)$ имеет разложение в ряд синусов по формуле (5.20).

Ряд косинусов и ряд синусов для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;l]$ имеет одну и ту же сумму. Если x_0 — точка разрыва I рода функции $f(x)$, то сумма как одного, так и другого ряда равно одному и тому же числу:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Замечание

Все, что было сказано о разложении в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$, переносится практически без изменения на случай, когда функция задана на отрезке $[0;\pi]$. Такую функцию можно разложить как в ряд косинусов, так и в ряд синусов (формулы (5.11), (5.13)).

Пример. Разложить в ряд Фурье по синусам следующую функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4h}{l}, 0\le x\le \dfrac{l}{4},\\ -\dfrac{4h}{l}\left(x-\dfrac{l}{2}\right), \dfrac{l}{4}\le x\le \dfrac{3}{4}l,\\ \dfrac{4h}{l}(x-l), \dfrac{3}{4}l\le x\le l.\end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ (рис. 5.5).

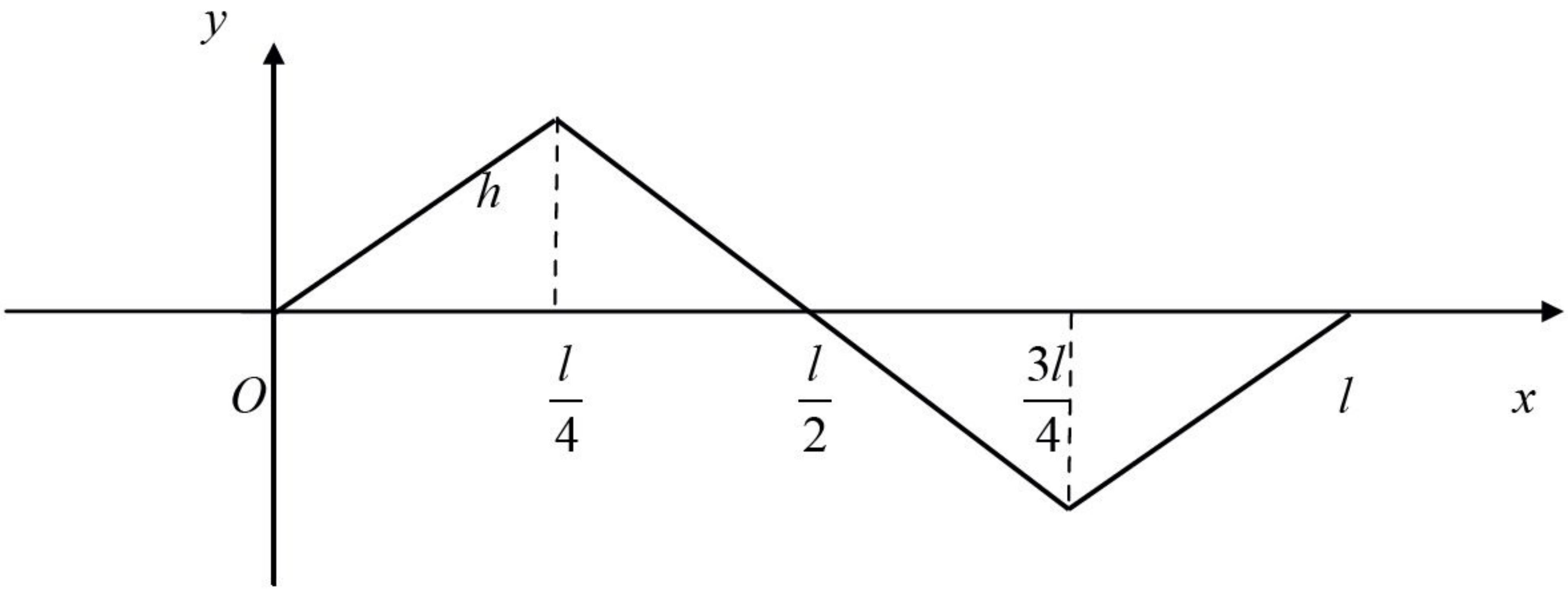

Рис. 5.5

Функция данного вида встречается в теории свободных колебаний конечной струны.

Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-l;0]$ нечетным образом. Коэффициенты a_0, a_n будут равны нулю. Коэффициенты b_n определим по формуле (5.21):

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left(\int_0^{l/4}\frac{4h}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}dx + \int_{l/4}^{3l/4} -\frac{4h}{l}\left(x-\frac{l}{2}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}dx + \int_{3l/4}^{l}\frac{4h}{l}(x-l)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\right) =$$

$$= -\frac{32h}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n}{4}.$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу (5.20), получим

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{32h}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n}{4}\sin\frac{\pi n x}{l}=$$

$$=-\frac{32h}{\pi^2}\left(\frac{\sin\frac{2\pi x}{l}}{2^2}-\frac{\sin\frac{6\pi x}{l}}{6^2}+\frac{\sin\frac{10\pi x}{l}}{10^2}-\frac{\sin\frac{14\pi x}{l}}{14^2}+\ldots\right).$$

Пример. Разложить в ряд Фурье по косинусам следующую функцию

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ 0<x<\pi.$$

Решение

Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$ четным образом (рис. 5.6).

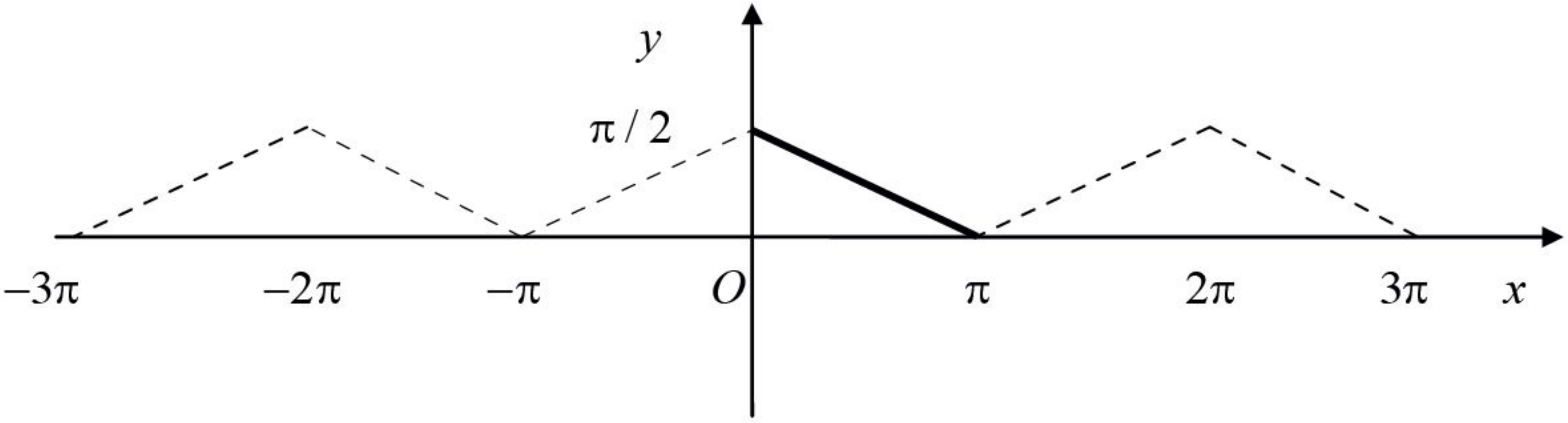

Рис. 5.6

Так как функцию требуется разложить в ряд по косинусам, то коэффициенты b_n равны нулю. Коэффициенты a_0, a_n определим по формулам (5.12):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos \pi n).$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу (5.11), получим

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right),$$

где $0<x<\pi$ $\left(S(0)=\dfrac{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}}{2}=\dfrac{\pi}{2},\ S(\pm\pi)=\dfrac{0+0}{2}=0 \right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} -2, & -\pi<x<0, \\ 3, & 0\le x<\pi. \end{cases}$$

Ответ. $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{10}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{5}\sin 5x+\dfrac{1}{7}\sin 7x+\ldots\right)$.

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=5x-1$ на интервале $(-5;5)$.

Ответ. $f(x)=-1+\frac{50}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{5}$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ на интервале $(-1;1)$.

Ответ. $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$.

4. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3$ на интервале $(0;\pi)$.

Ответ. $f(x)=3+\frac{\pi^2}{6}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$.

5. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=x\sin x$ на интервале $(0;\pi)$.

Ответ. $f(x)=-\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(4n^2-1\right)^2}\sin 2nx$.