



# Ряды

## Лекция 5: Ряды Фурье

---

- Тригонометрические ряды.
- Ряды Фурье
- Разложения чётных и нечетных функций в ряды Фурье
- Разложение на  $[-l;l]$
- Разложение по косинусам и по синусам

## 5.1. Тригонометрические ряды. Теорема Дирихле

---

При изучении периодических процессов, то есть процессов, которые через определенный промежуток времени повторяются, целесообразнее разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в тригонометрический ряд.

Функциональный ряд вида

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned} \quad (5.1)$$

называется *тригонометрическим рядом*.

Действительные числа  $a_0, a_n, b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) называются *коэффициентами* тригонометрического ряда.

Запишем формулы, которые в дальнейшем понадобятся.

Пусть  $m$  и  $n$  являются целыми положительными числами, тогда имеют место следующие формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & (n \neq 0), \\ x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & (n = 0); \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \text{ при любом } n; \quad (5.3)$$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n), \\ \pi, & (m = n); \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)dx = 0; \quad (5.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n), \\ \pi, & (m = n). \end{cases} \quad (5.6)$$

Формулы (5.2)- (5.6) показывают, что семейство функций

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

обладают **свойством ортогональности**: интеграл от произведения любых двух функций этого семейства на интервале, имеющем длину  $2\pi$ , равен нулю.





Пусть функция  $f(x)$  — произвольная периодическая функция с периодом  $2\pi$ . Предположим, что функция  $f(x)$  разлагается в тригонометрический ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5.7)$$

Так как функция  $f(x)$  (и сумма ряда) имеет период  $2\pi$ , то ее можно рассматривать в любом промежутке длины  $2\pi$ . В качестве основного промежутка возьмем отрезок  $[-\pi; \pi]$  (можно взять отрезок  $[0; 2\pi]$ ). Предположим, что ряд (5.7) на этом отрезке можно почленно интегрировать. Найдем коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$ , проинтегрировав обе части равенства (5.7) в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0.\end{aligned}$$

Итак,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \quad (5.8)$$

Умножим обе части равенства (5.7) на  $\cos mx$  и проинтегрируем полученный ряд в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ :



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \\ & = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx dx \right). \end{aligned}$$

Пусть  $m = n$ , тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \pi.$$

Получаем, что

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5.7)$$

Аналогично, умножив, равенство (5.7) на  $\sin mx$  и проинтегрировав полученный ряд в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ , найдем:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

Тригонометрический ряд (5.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (5.8)–(5.10), называется **рядом Фурье** функции  $f(x)$ .

Числа  $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$ , определяемые по формулам (5.8)–(5.10), называются **коэффициентами Фурье** функции  $f(x)$ .

Для функции  $f(x)$  интегрируемой на отрезке  $[-\pi; \pi]$  записывают:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и говорят: функции  $f(x)$  соответствует (поставлен в соответствие) ее ряд Фурье. Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначим  $S(x)$ .

Рассмотрим условия, при которых ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится и имеет своей суммой функцию  $f(x)$ .

Функции, которые имеют период  $T = 2\pi$  называют ***2π-периодическими*** функциями.

## Теорема Дирихле

Пусть  $2\pi$ -периодическая функция  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$  удовлетворяет условиям:

1.  $f(x)$  кусочно-непрерывна, то есть непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2.  $f(x)$  кусочно-монотонна, то есть монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции  $f(x)$  ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда  $S(x)$  совпадает с самой функцией:  $S(x) = f(x)$ ;



2. В каждой точке  $x_0$  разрыва функции сумма ряда равна:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

то есть равна среднему арифметическому пределов функции  $f(x)$  справа и слева;

3. В точках  $x = -\pi$  и  $x = \pi$  (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Условия 1 и 2 *Теоремы Дирихле* называются *условиями Дирихле*.



Итак, если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям Дирихле, то на отрезке  $[-\pi; \pi]$  имеет место разложение (5.7):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (5.8)– (5.10). Равенство (5.7) может нарушаться только в точках разрыва функции  $f(x)$  и на концах отрезка  $[-\pi; \pi]$ .

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

### *Замечания*

1. Если функция  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  на отрезке  $[0; 2\pi]$  удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (5.7), где коэффициенты определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2. Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях. Существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, то есть теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но не необходимое.

**Пример.** Разложить в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi; \pi]$  функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{x^2}{\pi}, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

*Решение*

Построим график функции  $f(x)$  с ее периодическим продолжением (рис. 5.1).

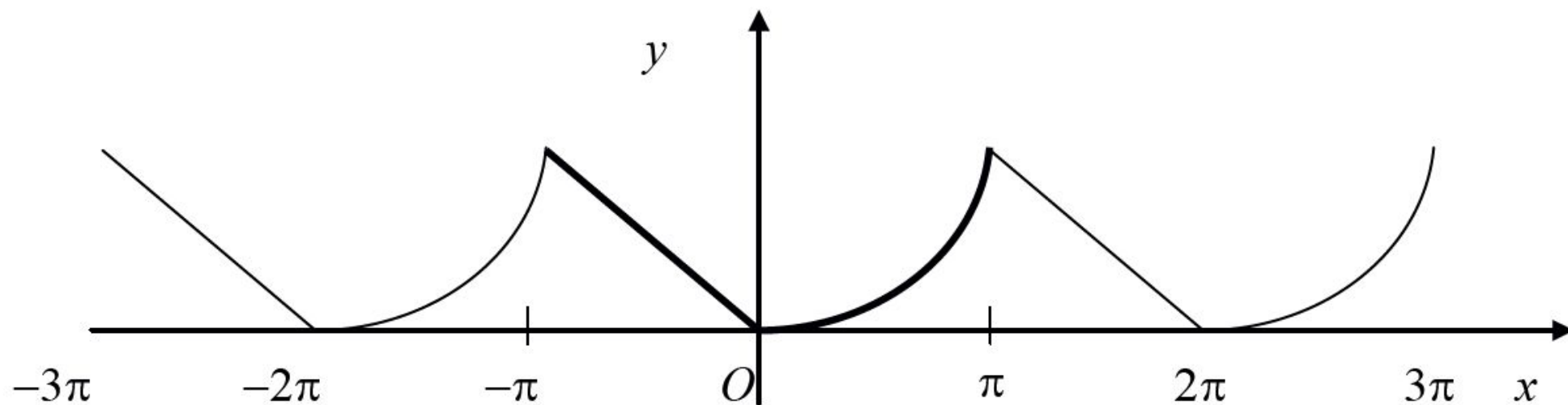


Рис. 5.1

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} dx = \frac{5}{6} \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -x \cos nxdx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \cos nxdx \right) = \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -x \sin nx dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^3},$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ -\frac{4}{\pi^2 n^3}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{5}{12} \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \frac{4}{\pi^2 (2n-1)^3} \sin(2n-1)x \right).$$



## 5.2. Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье

-----

Если разлагаемая в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi; \pi]$  функция  $f(x)$  является четной (или нечетной), то вычисление коэффициентов Фурье упрощается.

Пусть функция  $f(x)$  четная. Ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (5.11)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.12)$$

Пусть функция  $f(x)$  нечетная. Ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (5.13)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.14)$$

Ряды (5.11) и (5.13) называются *неполными* тригонометрическими рядами, или рядами *по косинусам* и *по синусам* соответственно.

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Построим график функции  $f(x)$  с ее периодическим продолжением (рис. 5.2).

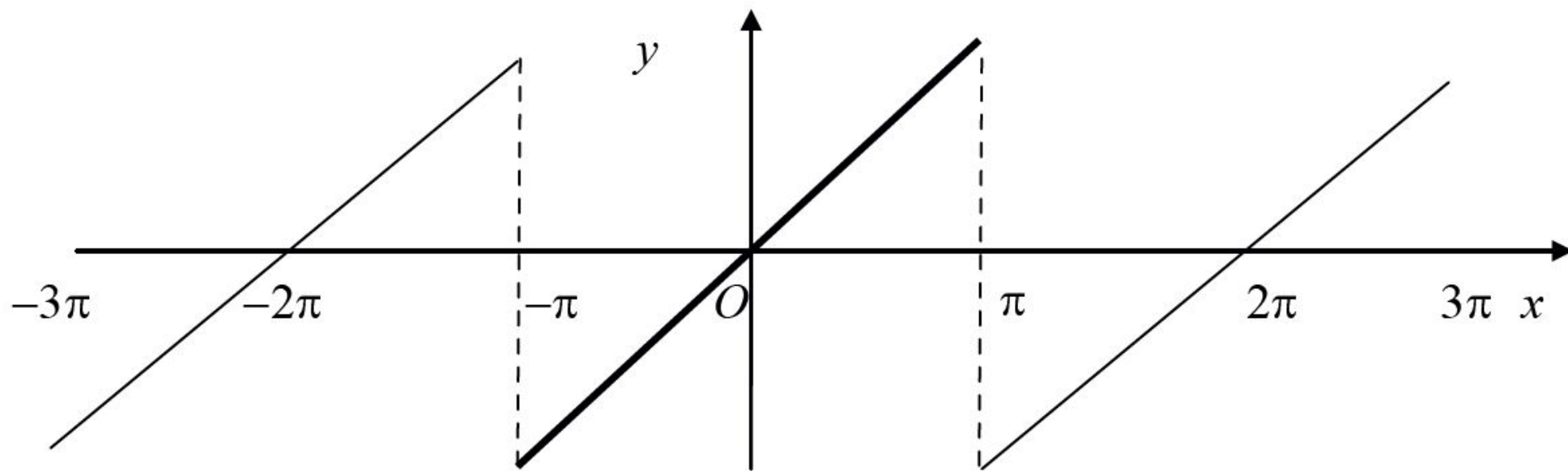


Рис. 5.2

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. На интервале  $(-\pi; \pi)$  функция  $f(x) = x$  нечетная. Отсюда следует, что ряд Фурье этой функции будет содержать только синусы, а при косинусах все коэффициенты  $a_n = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Вычислим коэффициенты  $b_n$  по формуле (5.14)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n},$$

$$x = 2 \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).$$

В интервале  $(-\pi; \pi)$  это равенство имеет место в точках непрерывности функции  $f(x)$ , то есть в данном случае в всех внутренних точках интервала  $(-\pi; \pi)$ . Вне интервала этот ряд изображает периодическое продолжение рассматриваемой функции.

В точках же разрыва, которыми являются точки  $\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ , сумма ряда равна среднему арифметическому ее левостороннего и правостороннего пределов в этих точках.

Найдем эти пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi-0} x = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi+0} x = -\pi.$$

Среднее арифметическое этих пределов

$$\frac{f(\pi-0) + f(-\pi+0)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0.$$

Во всех точках разрыва этой функции получим то же самое.



Из полученного разложения при  $x = \frac{\pi}{2}$  можно получить интересную сумму

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

Отсюда следует, что сумма ряда

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$



Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. На интервале  $(-\pi; \pi)$  функция  $f(x) = x$  четная. Отсюда следует, что ряд Фурье этой функции будет содержать только постоянную составляющую и косинусы, а при синусах все коэффициенты  $b_n = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Вычислим коэффициенты  $a_n$  по формулам (5.12)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1).$$

Если  $n$  — четное число, то  $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{2k} = 0$ , а если  $n$  — нечетное число, то  $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$ .

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4 \cos x}{\pi 1^2} - \frac{4 \cos 3x}{\pi 3^2} - \frac{4 \cos 5x}{\pi 5^2} - \dots,$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

Так как функция  $f(x) = |x|$  непрерывна на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , то полученный ряд сходится к  $|x|$  при всех значениях  $x$  из этого отрезка, а вне этого отрезка — к периодическому продолжению этой функции.

Из полученного ряда можно получить интересную сумму. Пусть  $x = 0$ , тогда

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

умножая обе части этого равенства на  $\frac{\pi}{4}$ , получим

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

### 5.3. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

---

Пусть функция  $f(x)$ , определенная на отрезке  $[-l; l]$ , имеет период  $2l$  ( $f(x+2l) = f(x)$ , где  $l$  — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Сделаем подстановку  $x = \frac{l}{\pi}t$ . Преобразуем функцию  $f(x)$  в функцию  $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ , которая определена на отрезке  $[-\pi; \pi]$  и имеет период  $T = 2\pi$ .



Разложение функции  $\varphi(t)$  в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi; \pi]$  имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ntdt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Возвращаясь к переменной  $x$ , получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \quad (5.15)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.16)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.17)$$

Ряд (5.15) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (5.16), (5.17), называется **рядом Фурье** для **функции**  $f(x)$  с периодом  $T = 2l$ .

### *Замечание*

Если функция  $f(x)$  на отрезке  $[-l;l]$  четная, то ее ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad (5.18)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (5.19)$$

если функция  $f(x)$  нечетная, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (5.20)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.21)$$

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

*Решение*

Построим график функции  $f(x)$  с ее периодическим продолжением (рис. 5.4).

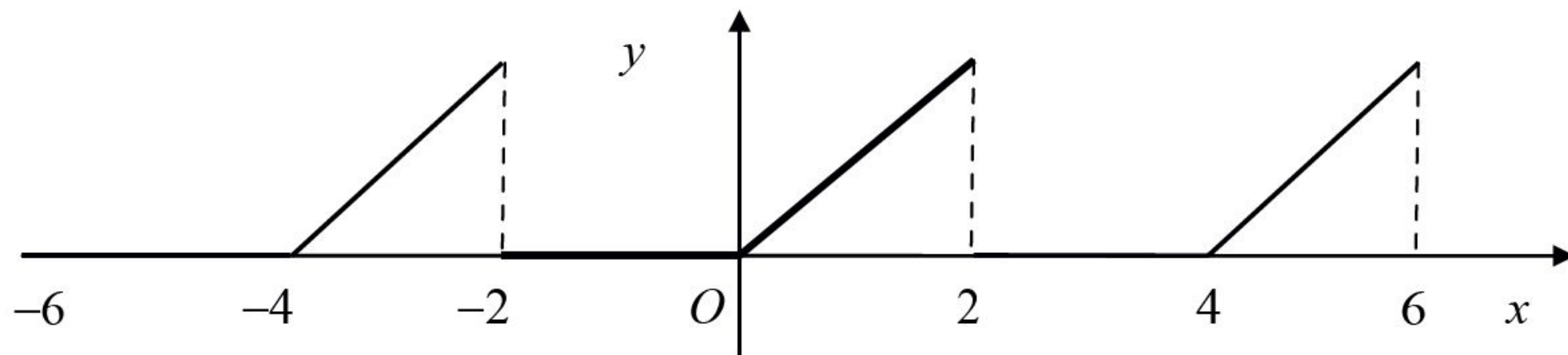


Рис. 5.4

Найдем коэффициенты ряда Фурье. Коэффициенты  $a_n$  вычислим по формуле (5.16)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-2}^0 0 \cdot \cos \frac{\pi n x}{2} dx + \int_0^2 x \cdot \cos \frac{\pi n x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} \left( (-1)^n - 1 \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Вычислим отдельно  $a_0$ .

$$a_0 = 1.$$

Коэффициенты  $b_n$  вычислим по формуле (5.17)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-2}^0 0 \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \int_0^2 x \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} dx \right) = \\ &= -\frac{2}{\pi n} (-1)^n. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения коэффициентов  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  в ряд (5.15), учитывая, что  $l = 2$ , получим

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi n x}{2}}{2}.$$



## Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть функция  $f(x)$  непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна  $f(x)$  для всех  $x$ . Но, непериодическая функция  $f(x)$  может быть представлена в виде ряда Фурье на любом конечном промежутке  $[a; b]$ , на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого можно поместить начало координат в середину отрезка  $[a; b]$  и построить функцию  $f_1(x)$  периода  $T = 2l = |b - a|$  такую, что  $f_1(x) = f(x)$  при  $-l \leq x \leq l$ .

Разлагаем функцию  $f_1(x)$  в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка  $[a;b]$  (кроме точек разрыва) совпадает с заданной функцией  $f(x)$ . Вне этого промежутка сумма ряда и  $f(x)$  являются совершенно различными функциями.

Пусть теперь непериодическую функцию  $f(x)$  требуется разложить в ряд Фурье на отрезке  $[0;l]$ . (Это частный случай: начало координат перенесено в точку  $x = a$  отрезка  $[a;b]$ ; область определения функции  $f(x)$  будет иметь вид  $[0;l]$ , где  $l = |b - a|$ .)

Такую функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке  $[-l;0]$ , а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом  $T = 2l$ . Разложив в ряд Фурье на отрезке  $[-l;l]$  полученную таким образом периодическую функцию  $f_1(x)$ , получим искомый ряд функции  $f(x)$  при  $x \in [0;l]$ .



## **Разложение в ряд косинусов функции, заданной на отрезке $[0; l]$**

Если на отрезке определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится четная функция с периодом  $2l$ . В самом деле, возьмем график заданной функции на этом сегменте, присоединим к нему фигуру, симметричную с ним относительно оси ординат. Затем к образовавшейся фигуре присоединим все ее горизонтальные смещения на расстояния, кратные  $2l$ . Тогда получится график четной функции с периодом  $2l$ , совпадающей с заданной функцией на сегменте  $[0; l]$ .

Отсюда и из сказанного ранее о разложении четных периодических функций в ряды Фурье следует, что  $f(x)$  имеет разложение в ряд косинусов по формуле (5.18).

### **Разложение в ряд синусов функции, заданной на отрезке $[0; l]$**

Если на отрезке определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится нечетная функция с периодом  $2l$ . В самом деле, возьмем график заданной функции на этом сегменте, присоединим к нему фигуру, симметричную с ним относительно начала координат. Затем к образовавшейся фигуре присоединим все ее горизонтальные смещения на рассто-

яния, кратные  $2l$  и добавим точки с координатами  $nl$  (где  $n$  — любое целое число). Тогда получится график нечетной функции с периодом  $2l$ , совпадающей с заданной функцией на сегменте  $[0; l]$ .

Отсюда и из сказанного ранее о разложении нечетных периодических функций в ряды Фурье следует, что  $f(x)$  имеет разложение в ряд синусов по формуле (5.20).

Ряд косинусов и ряд синусов для функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[0; l]$  имеет одну и ту же сумму. Если  $x_0$  — точка разрыва I рода функции  $f(x)$ , то сумма как одного, так и другого ряда равно одному и тому же числу:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$



### *Замечание*

Все, что было сказано о разложении в ряд Фурье функции  $f(x)$  на отрезке  $[0; l]$ , переносится практически без изменения на случай, когда функция задана на отрезке  $[0; \pi]$ . Такую функцию можно разложить как в ряд косинусов, так и в ряд синусов (формулы (5.11), (5.13)).

**Пример.** Разложить в ряд Фурье по синусам следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4h}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{4}, \\ -\frac{4h}{l} \left( x - \frac{l}{2} \right), & \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}l, \\ \frac{4h}{l} (x - l), & \frac{3}{4}l \leq x \leq l. \end{cases}$$



*Решение*

Построим график функции  $f(x)$  (рис. 5.5).

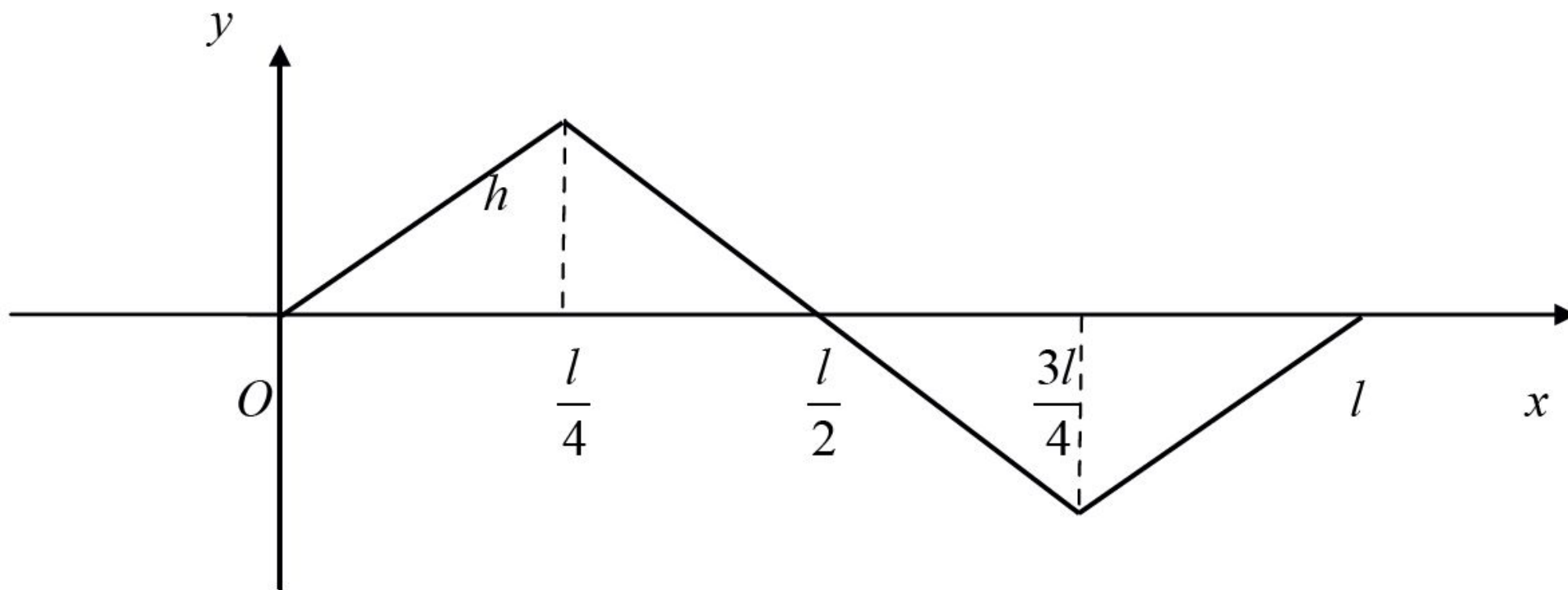


Рис. 5.5

Функция данного вида встречается в теории свободных колебаний конечной струны.

Продолжим функцию  $f(x)$  на отрезок  $[-l; 0]$  нечетным образом. Коэффициенты  $a_0, a_n$  будут равны нулю. Коэффициенты  $b_n$  определим по формуле (5.21):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{l} \left( \int_0^{l/4} \frac{4h}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} dx + \int_{l/4}^{3l/4} -\frac{4h}{l} \left( x - \frac{l}{2} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} dx + \int_{3l/4}^l \frac{4h}{l} (x - l) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right) = \\ &= -\frac{32h}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n}{4}. \end{aligned}$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу (5.20), получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{32h}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n}{4} \sin \frac{\pi n x}{l} = \\ &= -\frac{32h}{\pi^2} \left( \frac{\sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2} - \frac{\sin \frac{6\pi x}{l}}{6^2} + \frac{\sin \frac{10\pi x}{l}}{10^2} - \frac{\sin \frac{14\pi x}{l}}{14^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

**Пример.** Разложить в ряд Фурье по косинусам следующую функцию

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < \pi.$$

*Решение*

Продолжим функцию  $f(x)$  на отрезок  $[-\pi; 0]$  четным образом (рис. 5.6).

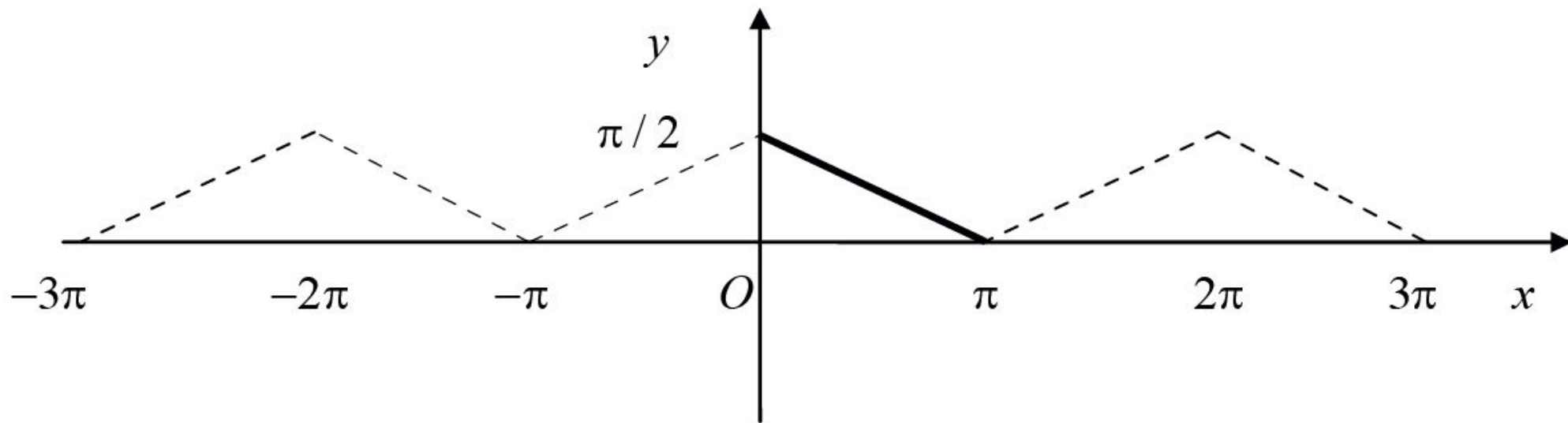


Рис. 5.6

Так как функцию требуется разложить в ряд по косинусам, то коэффициенты  $b_n$  равны нулю. Коэффициенты  $a_0, a_n$  определим по формулам (5.12):

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{\pi n^2} (1 - \cos \pi n).$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу (5.11), получим

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right),$$

где  $0 < x < \pi$   $\left( S(0) = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}, S(\pm\pi) = \frac{0+0}{2} = 0 \right)$ .

## Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0, \\ 3, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Ответ.  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{10}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right)$ .



2. Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = 5x - 1$  на интервале  $(-5; 5)$ .

$$\text{Ответ. } f(x) = -1 + \frac{50}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{\pi n x}{5}.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = |x|$  на интервале  $(-1; 1)$ .

$$\text{Ответ. } f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

4. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$  на интервале  $(0; \pi)$ .

$$\text{Ответ. } f(x) = 3 + \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

5. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию  $f(x) = x \sin x$  на интервале  $(0; \pi)$ .

$$\text{Ответ. } f(x) = -\frac{\pi}{2} \sin x - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx.$$