Решение треугольников

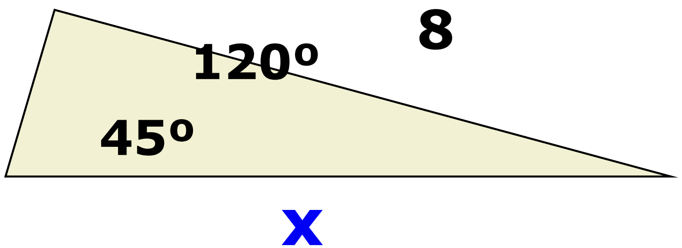
Урок №28

Самостоятельная работа

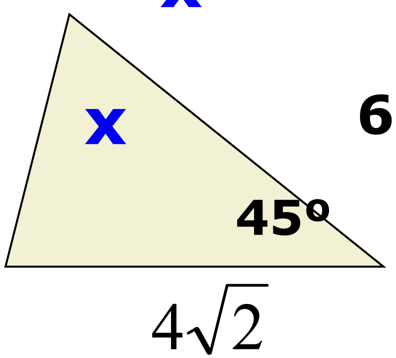
Найти X

- Вариант 1

1.

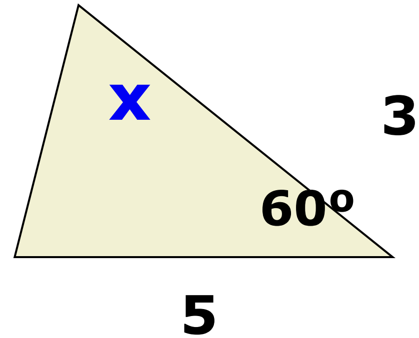


2.

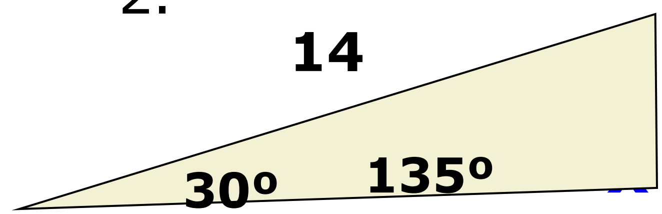


- Вариант 2

1.



2.



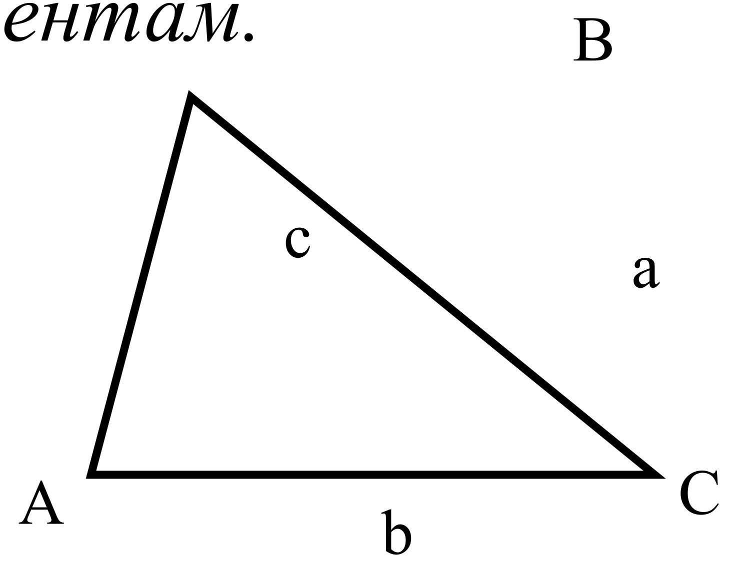
3. Определите вид треугольника со сторонами

3; 5; 7

4; 5; 6

Определение

Решением треугольника называется нахождение всех его шести элементов (то есть трёх сторон и трёх углов) по каким-нибудь трём данным элементам.



Для этого вспомним

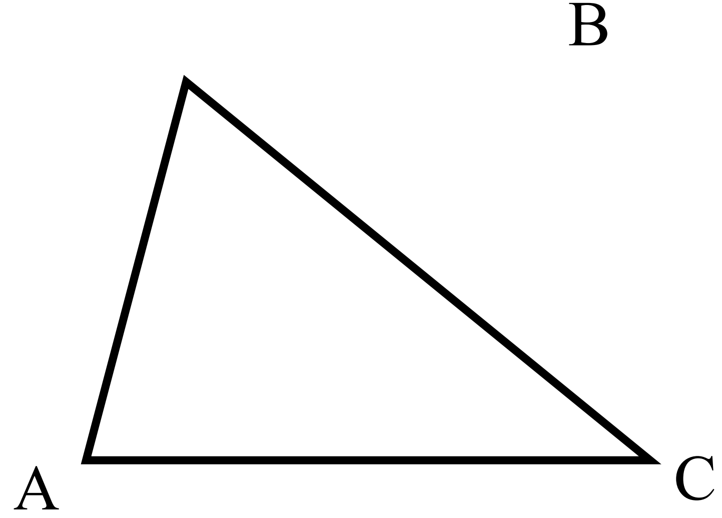
Решение данных задач основано на использовании теорем синусов и косинусов, теоремы о сумме углов треугольника и следствии из теоремы синусов: в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

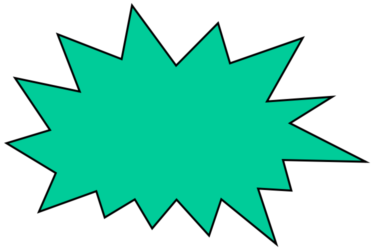
Причем, при вычислении углов треугольника предпочтительнее использовать теорему косинусов, а не теорему синусов.

Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180º

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

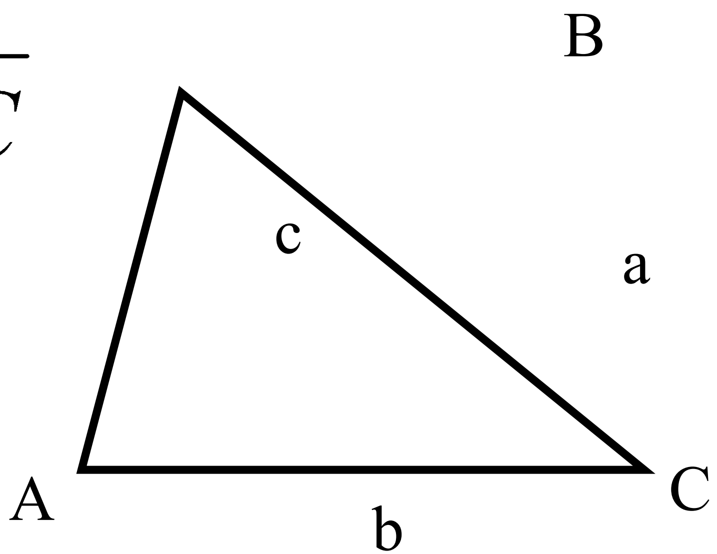




Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

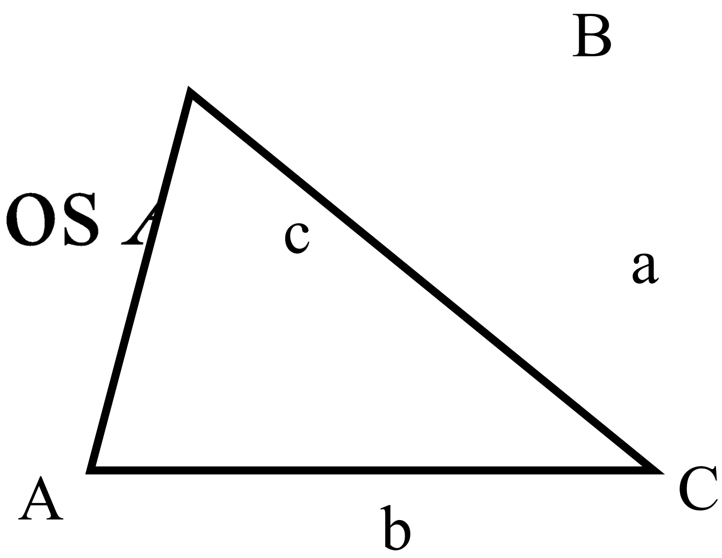
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

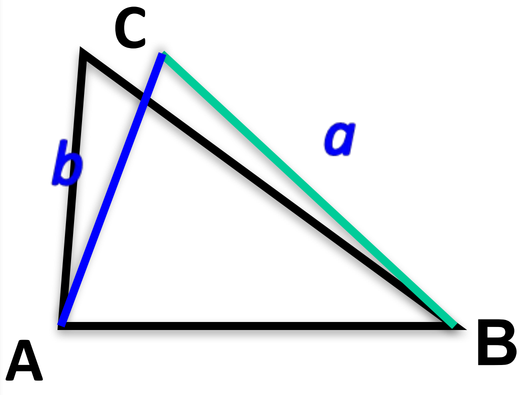
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



Три задачи на решение треугольника

Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

$$Дано: \Delta ABC, BC = a, AC = b, \angle C$$



Что можно найти???

1. AB по теореме косинусов
2. $\angle A$ и $\angle B$ по теореме синусов
3. Площадь треугольника
4. Радиусы вписанной и описанной окружностей
5. Высоты треугольника

Решение

$$c^2 = a^2 + в^2 - 2ав \cdot \cos\gamma, \text{ значит}$$

$$c = \sqrt{a^2 + в^2 - 2ав\cos\gamma}$$

2) Если ***γ- тупой угол***, значит α и β острые углы
Если ***γ –острый угол***, то сравниваем *a и b,* *выбираем* меньшую и находим меньший угол (он точно острый)
Допустим это α

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$$

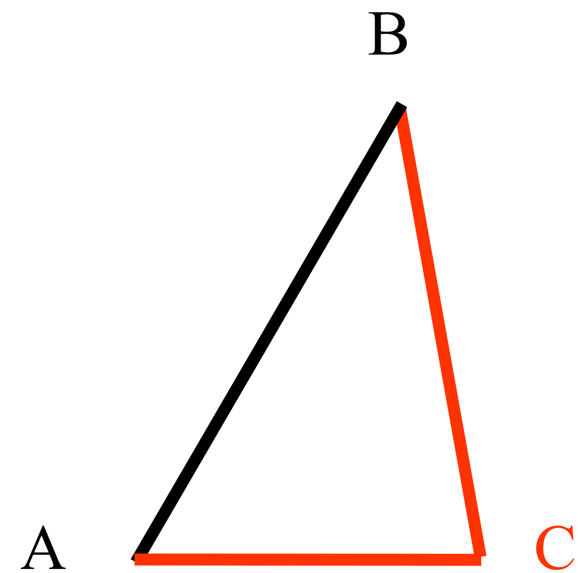
3) β =180º- (α + β)

Задача имеет одно решение

Решаем задачу 1

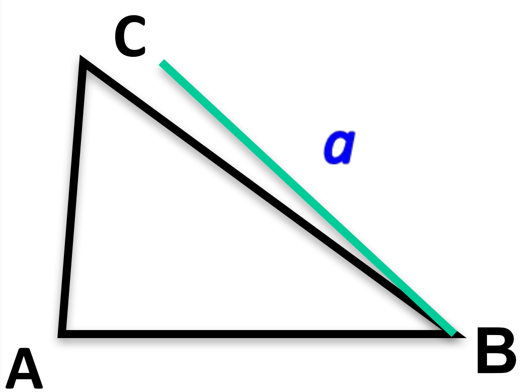
Решить треугольник ABC, если a=6,3 см, b=6,3 см, $\angle C=54^\circ$.

Дано: ΔABC, a=6,3 см,
b=6,3 см, $\angle C=54^\circ$.
Найти: $\angle A$, $\angle B$, c.



Ответ

Решение треугольника
по стороне и двум прилегающим к ней углам.



$Дано : \Delta ABC, BC = a, \angle C, \angle B$

Что можно найти???

1. $\angle A$ (сумма углов треугольника равна 180^0)
2. АС и АВ по теореме синусов
3. Площадь треугольника
4. Радиусы вписанной и описанной окружностей
5. Высоты треугольника

Решение:

$\gamma = 180^o - (\alpha+\beta),\ \alpha+\beta < 180^o$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

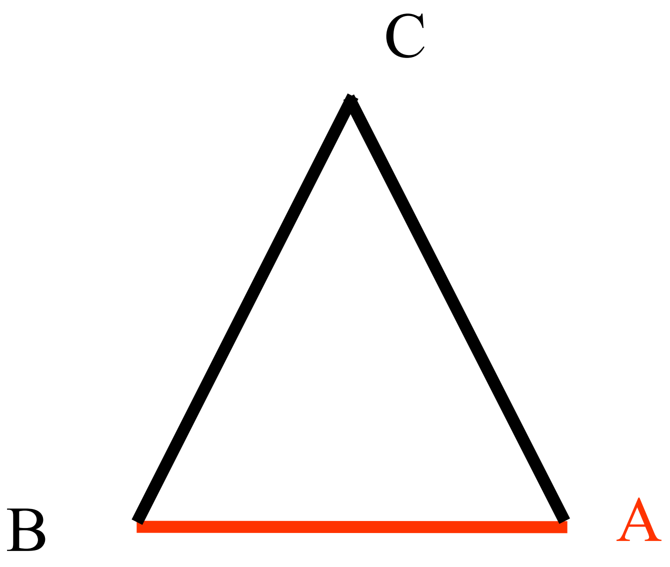
Задача имеет одно решение

Решаем задачу 2

Решить треугольник АВС, если $\angle A=60^\circ$ $\angle B=40^\circ$, с =14см.

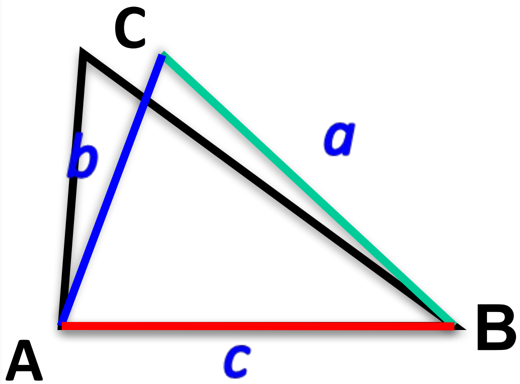
Дано: ΔABC, $\angle A=60^\circ$,
$\angle B=40^\circ$, c=14см.
Найти: a, b, $\angle C$.

Ответ



Решение треугольника по трем сторонам.

$$Дано: \Delta ABC, BC = a, AC = b, AB = c$$



Что можно найти???

1. ∠A (терема косинусов)
2. ∠B и ∠C (теорема синусов)
3. Площадь треугольника
4. Радиусы вписанной и описанной окружностей
5. Высоты треугольника

Решение

Пусть ***а*** – наибольшая сторона треугольника,

$$a^2 = c^2 + в^2 - 2вс\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \textit{значит}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

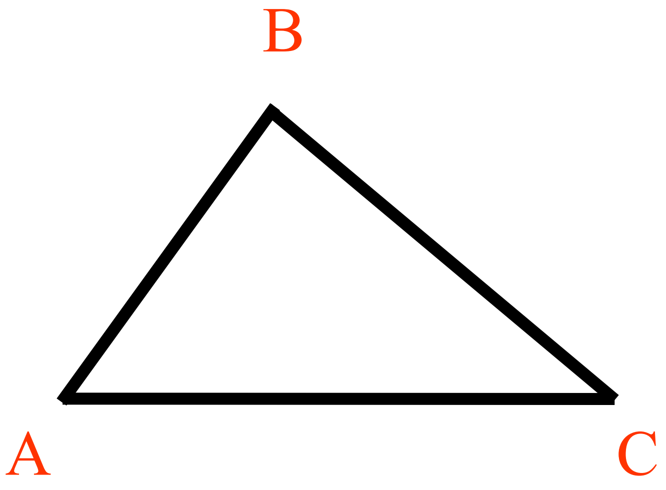
Задача имеет одно решение

Решаем задачу 3

Решить треугольник ABC, если a=6 см, b=7,7 см, c=4,8 см.

Дано: a=6 см, b=7,7 см,
c=4,8 см.
Найти: ∠A, ∠B, ∠C.

Ответ



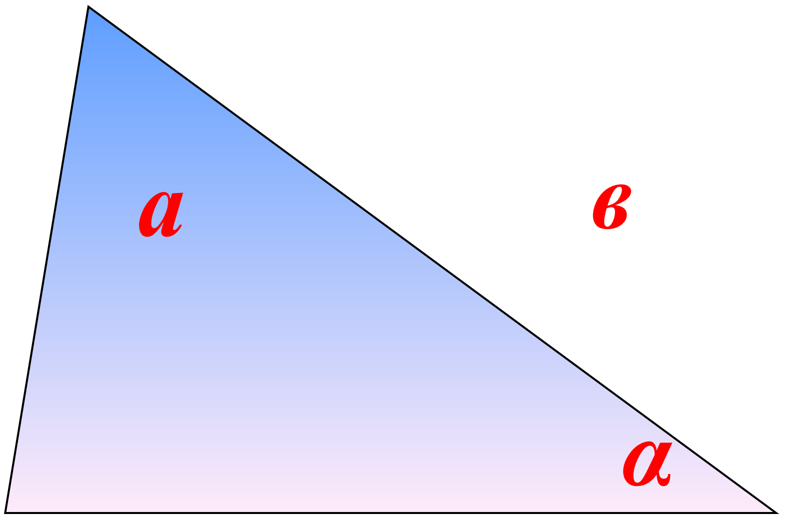
IV тип задач
по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них

Дано:

Δ *ABC*

а , в, α

Найти: *с, γ, β*



Решение

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \text{значит} \quad \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

1. Если ***в*** намного больше ***а***, то sinβ >1 и задача не имеет решений.

2. Если sinβ =1, то β =90º, γ =90º-***α***,

с = в cosα

в этом случае задача имеет единственное решение

3. Если 0 < sinβ < 1 , то β может быть и острым и тупым углом

Сравниваем а и в

Если а < в, то

существуют два угла β

β_1 -острый, значит треугольник-остроугольный

$$\gamma_1 = 180 - (\alpha + \beta_1)$$

$$c_1 = \frac{a \sin\gamma_1}{\sin\alpha}$$

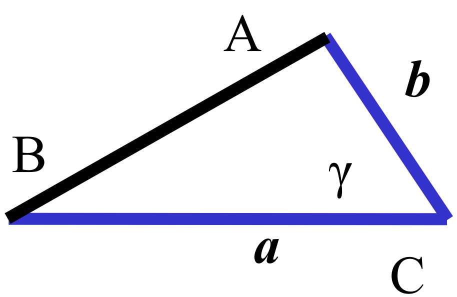
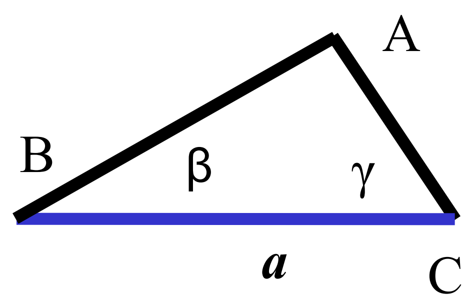
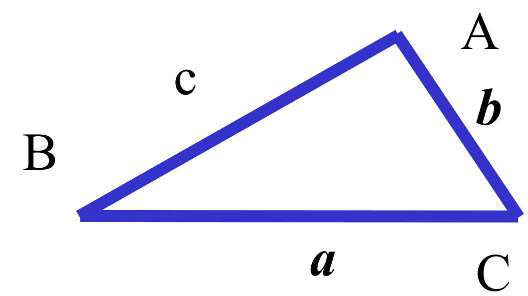
β_2 =180º- (α +β_1)-тупой, значит треугольник-тупоугольный

$$\gamma_2 = 180 - (\alpha + \beta_2)$$

$$c_2 = \frac{a \sin\gamma_2}{\sin\alpha}$$

В этом случае задача имеет два решения

Таблица – памятка

Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними	Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам	Решение треугольника по трем сторонам
		
$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$	$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)$ $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$ $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$	$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$ $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$

Ответ к примеру 1

$\angle A=63^{o}$

$\angle B=63^{o}$

$c\approx5{,}7$ см

Ответ к примеру 2

$\angle C=80^{o}$

$a \approx 12{,}3$ см

$b \approx 9{,}1$ см

Ответ к примеру 3

$\angle A=54^{\circ}52'$

$\angle B=84^{\circ}16'$

$\angle C=40^{\circ}52'$

Найди ошибку

$$\grave{a}^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = a^2 + c^2 - 2ac\sin\alpha$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$2R = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2r$$