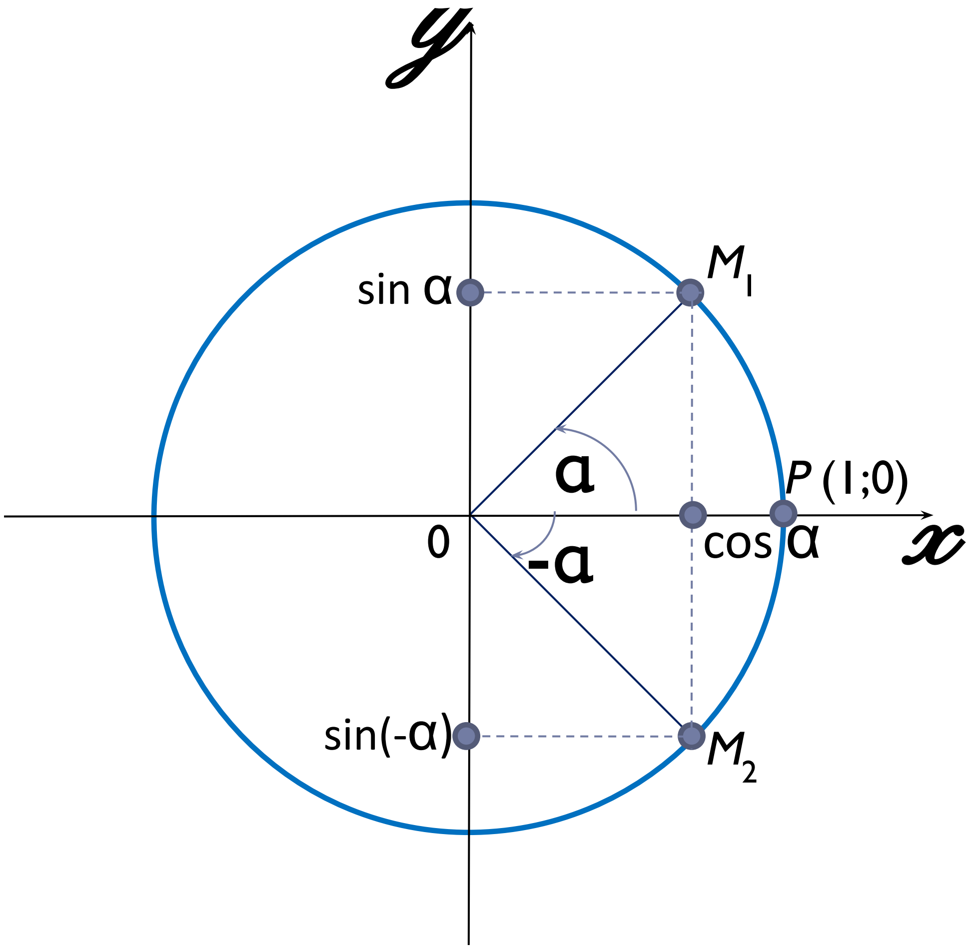
Формулы сложения

Тригонометрические формулы

Повторение

- M_1 (cos a; sin a)
- M_2 (cos(-a); sin(-a))

1. sin(-a) = ?
2. cos(-a) = ?
3. tg(-a) = ?
4. ctg(-a) = ?
5. $\sin^2(a) + \cos^2(a)$ = ?



Запишите какой знак имеет выражение:

$$\cos 315^0 =; \quad \sin 245^0 =; \sin 103^0 * \cos 112^0 =$$

\+ -

$$\sin 189^0 =; \quad \cos 279^0 =; \sin 247^0 * \cos 123^0 =$$

Формулы сложения

- *Формулами сложения* называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через косинусы и синусы углов α и β.

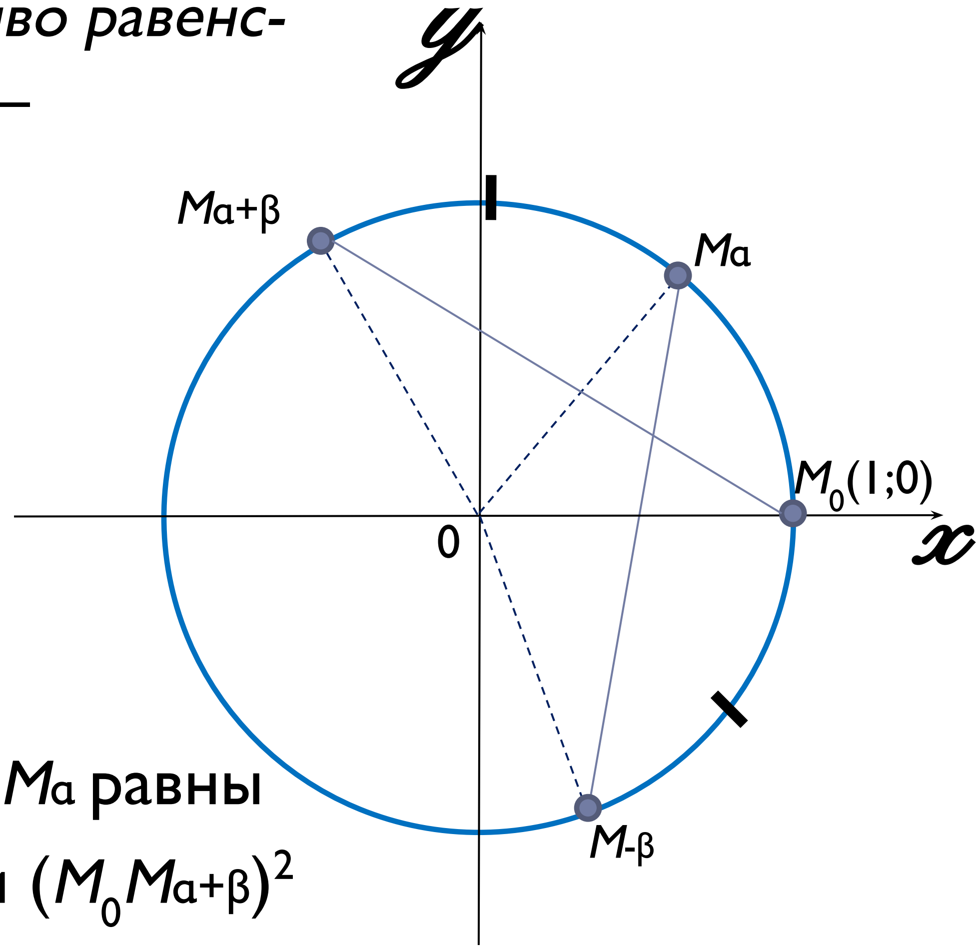
Выучить!!!

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin$

Теорема

- *Для любых α и β справедливо равенство* $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta -$ $- \sin\alpha \sin\beta$
- По определению:
  $M_\alpha (\cos\alpha; \sin\alpha)$
  $M_{-\beta} (\cos(-\beta); \sin(-\beta))$
  $M_{\alpha+\beta} (\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta))$
- $\angle M_0OM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha$
- $\Rightarrow \triangle M_0OM_{\alpha+\beta} = \triangle M_{-\beta}OM_\alpha$
- $\Rightarrow$ основания $M_0M_{\alpha+\beta} = M_{-\beta}M_\alpha$ равны
- А значит равны $(M_{-\beta}M_\alpha)^2$ и $(M_0M_{\alpha+\beta})^2$



Теорема

- Имеем:
  M_0 (1; 0)
  M_α (cos α; sin α)
  $M_{-\beta}$ (cos(-β); sin(-β))
  $M_{\alpha+\beta}$ (cos(α+β); sin(α+β))

  $(M_0 M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta} M_\alpha)^2$
- $\Rightarrow (1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + (\sin(\alpha+\beta))^2 = (\cos(-\beta) - \cos\alpha)^2 +$
  $+ (\sin(-\beta) - \sin\alpha)^2$
- $\Leftrightarrow 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) = \cos^2\beta -$
  $- 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha$
- $\Leftrightarrow 2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$
- $\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Следствие 1

- $\cos(\alpha - \beta) = ?$

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) =$
  $= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$
- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$

- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\pi/2)\cos\alpha + \sin(\pi/2)\sin\alpha = \sin\alpha$
- т.е. $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$

- При $\alpha = \pi/2 - \beta$ имеем:
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\pi/2 - \pi/2 + \beta) = \cos\beta = \sin\alpha = \sin(\pi/2 - \beta)$
- т.е. $\sin(\pi/2 - \beta) = \cos\beta$

Следствие 1

- $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\pi/2 - (\alpha + \beta)) = \cos((\pi/2 - \alpha) - \beta) =$
  $= \cos(\pi/2 - \alpha)\cos\beta + \sin(\pi/2 - \alpha)\sin\beta =$
  $= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$
  $= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Таким образом,

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Следствие 2

- Можно вывести аналогичные формулы для $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta)$ и $\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta)$.

- $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha \pm \beta) / \cos(\alpha \pm \beta) =$
  $=(\sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta)/(\cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta)=$
  $= (\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta) / (1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{tg}\,\beta)$

- Аналогично
  $\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = (\mathrm{ctg}\,\alpha\, \mathrm{ctg}\,\beta \mp 1) / (\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha$

Вычислить:

cos 75° (представим число 75 в виде слагаемых 30 и 45, запишем) = cos (30° + 45°) = (воспользуемся формулой cos суммы углов) = cos 30°cos 45° - sin 30°sin 45° = (подставим табличные значения sin и cos) $\frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Вычислить:

cos 15° (представим число 15 в виде разности чисел 45 и 30, запишем) = cos (45° - 30°) = (воспользуемся формулой cos разности углов) = cos 45°cos 30° + sin 45°sin 30° = (подставим табличные значения sin и cos) $\frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2} =$

$\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Вычислить:

sin 210° (представим число 210 в виде суммы чисел 180 и 30, запишем) = sin (180° + 30°) = (воспользуемся формулой sin суммы углов) = sin 180°cos 30° + cos 180°sin 30° = (подставим табличные значения sin и cos) $0 * \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) * \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Вычислить:

sin $\frac{8\pi}{7} cos \frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$ (воспользуемся формулой sin разности углов) = sin $(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7})$ = sin $(\frac{7\pi}{7})$ = sin π = 0

Домашнее задание

ξ28, формулы выучить!
Выписать и выучить формулу tg суммы углов.
№ 481, 484, 485