
Формулы сложения

Тригонометрические формулы

Повторение

▢ $M_1 (\cos \alpha; \sin \alpha)$

▢ $M_2 (\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$

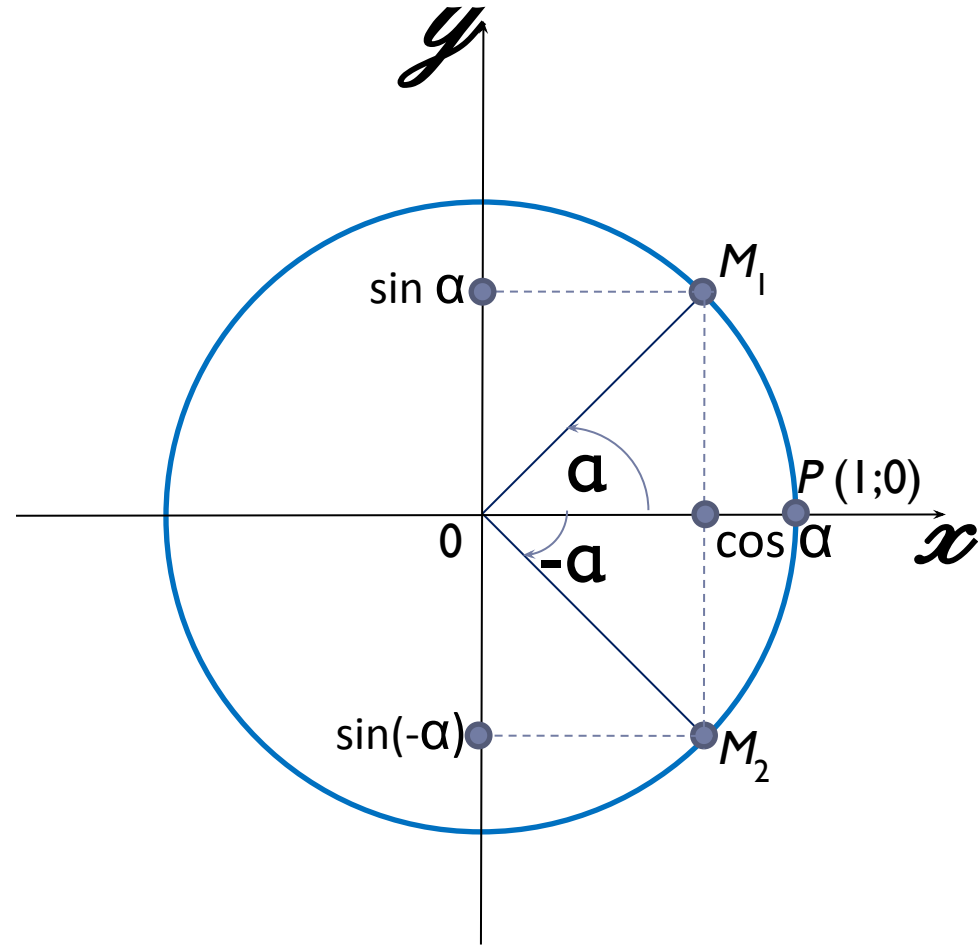
1. $\sin(-\alpha) = ?$

2. $\cos(-\alpha) = ?$

3. $\operatorname{tg}(-\alpha) = ?$

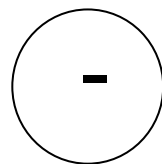
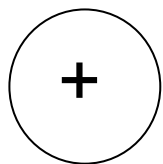
4. $\operatorname{ctg}(-\alpha) = ?$

5. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = ?$



Запишите какой знак имеет
выражение:

$$\cos 315^\circ =; \quad \sin 245^\circ =; \quad \sin 103^\circ * \cos 112^\circ =$$



$$\sin 189^\circ =; \quad \cos 279^\circ =; \quad \sin 247^\circ * \cos 123^\circ =$$



Формулы сложения

□ *Формулами сложения* называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через косинусы и синусы углов α и β .

Выучить!!!

□ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

□ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

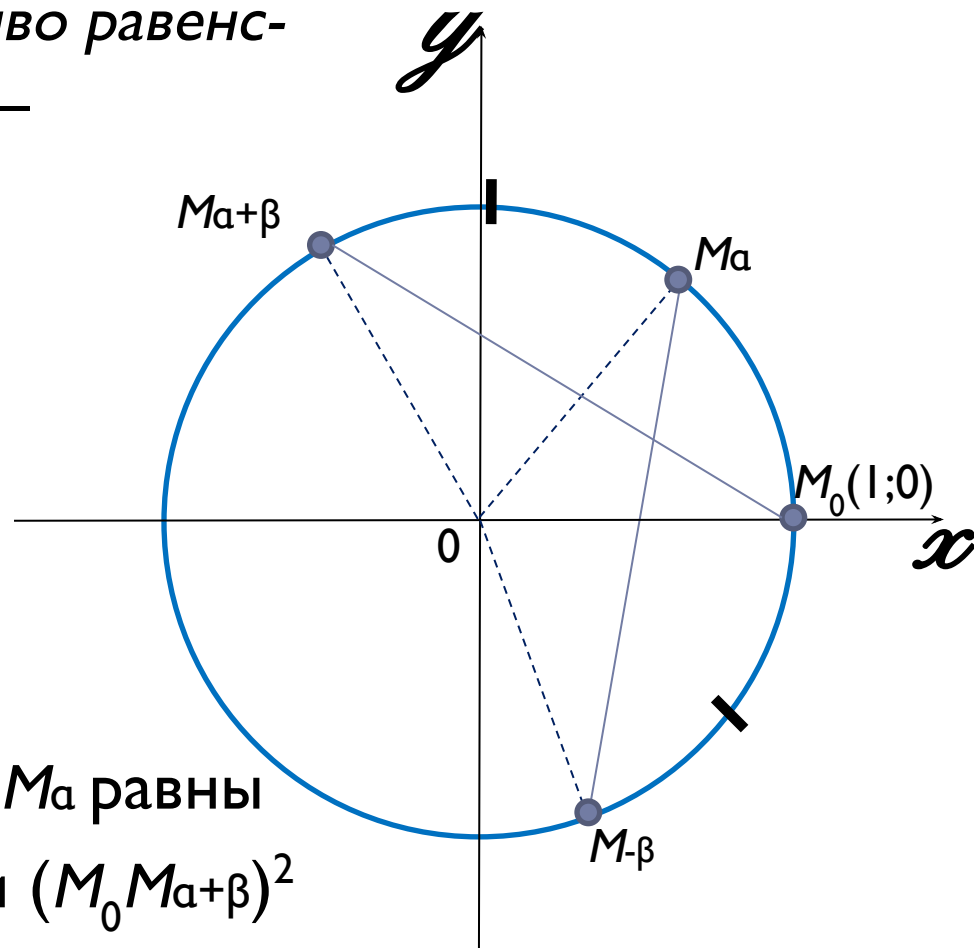
□ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

□ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$



Теорема

- Для любых α и β справедливо равенство $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- По определению:
 $M_\alpha (\cos \alpha; \sin \alpha)$
 $M_{-\beta} (\cos(-\beta); \sin(-\beta))$
 $M_{\alpha+\beta} (\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta))$
- $\angle M_0 O M_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta} O M_\alpha$
- $\Rightarrow \triangle M_0 O M_{\alpha+\beta} = \triangle M_{-\beta} O M_\alpha$
- \Rightarrow основания $M_0 M_{\alpha+\beta} = M_{-\beta} M_\alpha$ равны
- А значит равны $(M_{-\beta} M_\alpha)^2$ и $(M_0 M_{\alpha+\beta})^2$



Теорема

□ Имеем:

$$M_0 (1; 0)$$

$$M_\alpha (\cos \alpha; \sin \alpha)$$

$$M_{-\beta} (\cos(-\beta); \sin(-\beta))$$

$$M_{\alpha+\beta} (\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta))$$

$$(M_0 M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta} M_\alpha)^2$$

$$\square \Rightarrow (1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + (\sin(\alpha+\beta))^2 = (\cos(-\beta) - \cos \alpha)^2 + (\sin(-\beta) - \sin \alpha)^2$$

$$\square \Leftrightarrow 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) = \cos^2 \beta - 2\cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2\sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$\square \Leftrightarrow 2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta$$

$$\square \Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$



Следствие 1

- $\cos(\alpha - \beta) = ?$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$
- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\pi/2) \cos \alpha + \sin(\pi/2) \sin \alpha = \sin \alpha$
- т.е. $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$
- При $\alpha = \pi/2 - \beta$ имеем:
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\pi/2 - \pi/2 + \beta) = \cos \beta = \sin \alpha = \sin(\pi/2 - \beta)$
- т.е. $\sin(\pi/2 - \beta) = \cos \beta$



Следствие 1

$$\begin{aligned}\square \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\pi/2 - (\alpha + \beta)) = \cos((\pi/2 - \alpha) - \beta) = \\ &= \cos(\pi/2 - \alpha) \cos \beta + \sin(\pi/2 - \alpha) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\square \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\square \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\square \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$



Следствие 2

- Можно вывести аналогичные формулы для $\operatorname{tg}(a \pm \beta)$ и $\operatorname{ctg}(a \pm \beta)$.
- $$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a \pm \beta) &= \sin(a \pm \beta) / \cos(a \pm \beta) = \\ &= (\sin a \cos \beta \pm \cos a \sin \beta) / (\cos a \cos \beta \mp \sin a \sin \beta) = \\ &= (\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} \beta) / (1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \beta)\end{aligned}$$
- Аналогично
$$\operatorname{ctg}(a \pm \beta) = (\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} \beta \mp 1) / (\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} a)$$



Вычислить:

$\cos 75^\circ$ (представим число 75 в виде слагаемых 30 и 45, запишем) = $\cos (30^\circ + 45^\circ) =$

(воспользуемся формулой \cos суммы углов) =

$\cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ =$ (подставим

табличные значения \sin и \cos) $\frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$



Вычислить:

$\cos 15^\circ$ (представим число 15 в виде разности чисел 45 и 30, запишем) $= \cos (45^\circ - 30^\circ) =$
(воспользуемся формулой \cos разности углов) $=$
 $\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$ (подставим
табличные значения \sin и \cos) $\frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2} =$
 $\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$



Вычислить:

$$\begin{aligned} \sin 210^\circ & \text{ (представим число 210 в виде суммы} \\ & \text{ чисел 180 и 30, запишем)} = \sin (180^\circ + 30^\circ) = \\ & \text{ (воспользуемся формулой sin суммы углов)} = \\ & \sin 180^\circ \cos 30^\circ + \cos 180^\circ \sin 30^\circ = \text{ (подставим} \\ & \text{ табличные значения sin и cos)} 0 * \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) * \frac{1}{2} = \\ & -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



Вычислить:

$$\sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} \text{ (воспользуемся формулой} \\ \text{sin разности углов)} = \sin \left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \left(\frac{7\pi}{7} \right) = \sin \pi \\ = 0$$



Домашнее задание

§28, формулы выучить!

Выписать и выучить

формулу tg суммы углов.

№ 481, 484, 485

