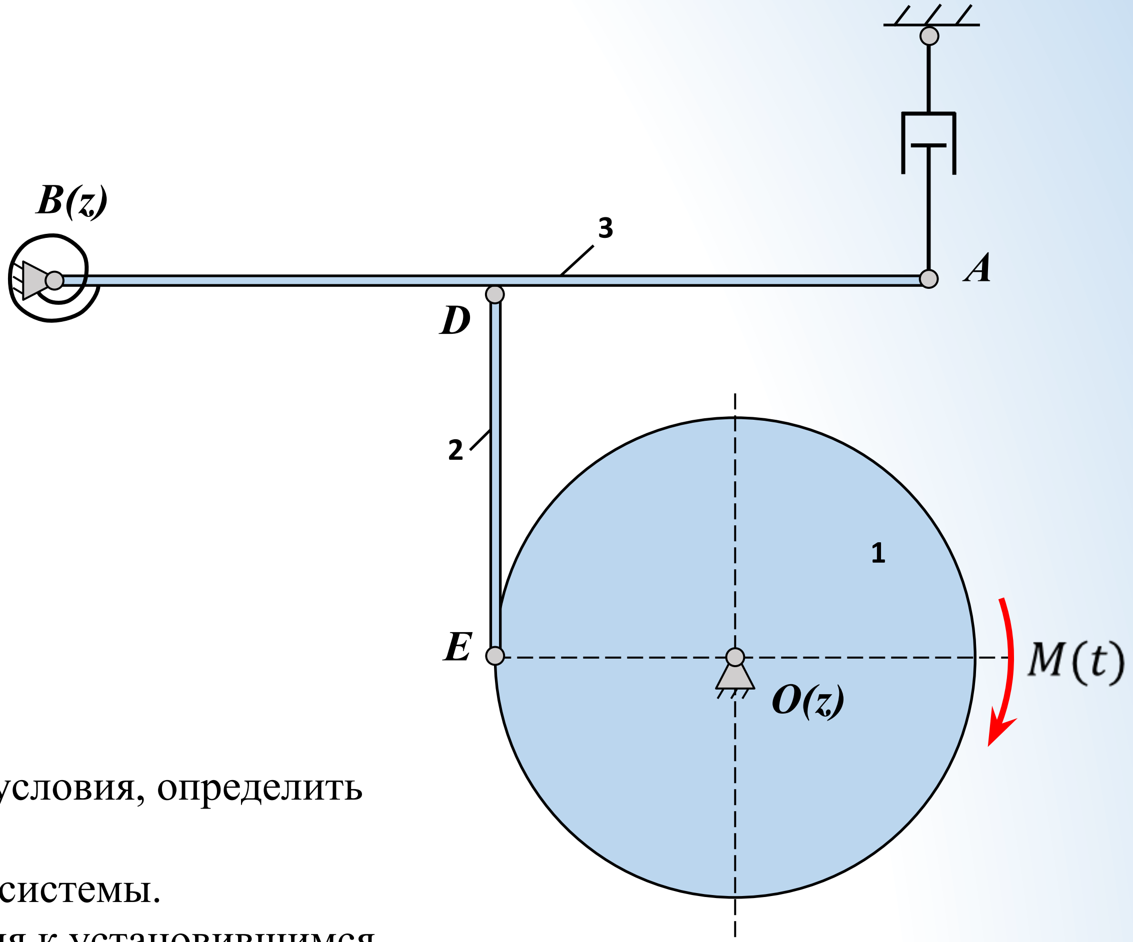
Пример выполнения домашнего задания.

Пара сил с моментом $M(t) = M_0 \sin pt$ $(M_0 = 4$ Нм, $p = 15$рад/с$)$ действует на маховик 1, представляющий собой однородный диск массой $m_1 = 4$ кг и радиусом $r = 0{,}1$ м, который может вращаться вокруг горизонтальной оси $O(z)$. Стержень 2 массой $m_2 = 2$ кг шарнирами E и D связан с однородным стержнем 3 массой $m_3 = 3$ кг и длиной $2l = 0{,}6$ м *(BD = DA)*.

Вращению стержня 3 вокруг горизонтальной оси $B(z)$ препятствует спиральная пружина с коэффициентом жесткости $c = 72$ Нм/рад и демпфер с коэффициентом сопротивления $\mu = 40$Нс/м.

В состоянии равновесия системы стержень 3 занимает горизонтальное положение. В начальный момент времени $t = 0$ стержню 3 в положении равновесия была сообщена начальная скорость $\omega_0 = 1{,}23$ рад/с.

По истечении времени $t^* = 4T_в + 3\tau_0$ амплитуда внешнего воздействия увеличивается в два раза, а еще через такой же промежуток времени внешнее воздействие прекращается.



1. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний системы.
2. Получить решение этого уравнения и, используя заданные начальные условия, определить постоянные интегрирования
3. Исследовать амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики системы.
4. Исследовать процессы перехода от начального возмущенного состояния к установившимся вынужденным колебаниям, от установившихся вынужденных колебаний при исходной амплитуде внешнего воздействия к установившимся колебаниям при удвоении амплитуды и от последних к состоянию покоя после прекращения внешнего воздействия.
5. Построить график *q(t)*, включающий все переходные процессы.

Пример выполнения домашнего задания.

МГТУ им. Н. Э. Баумана

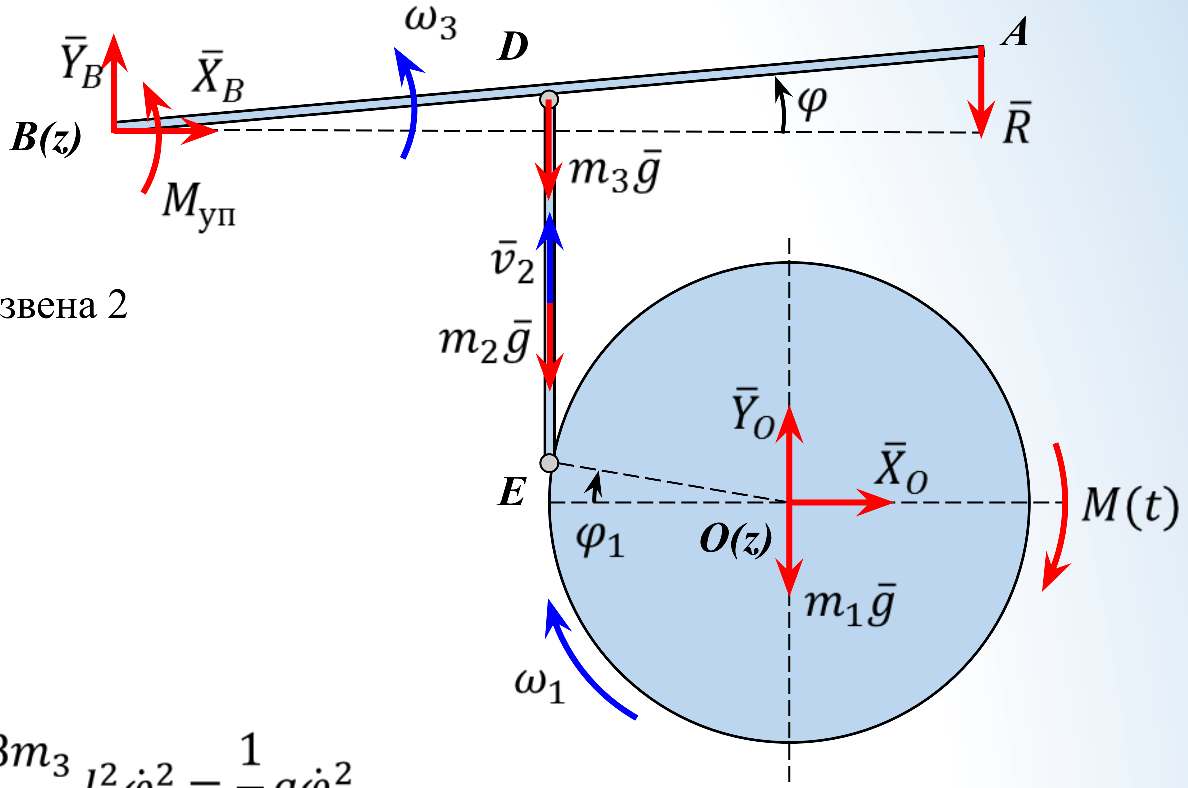
Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота стержня 3. Отбросим наложенные на систему связи и заменим их действие соответствующими реакциями.

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{oz}\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 r^2}{2}\dot{\varphi}^2 \frac{l^2}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{m_1 l^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\frac{l}{r}$$



При малых колебаниях вращательной составляющей при движении звена 2 можно пренебречь и рассматривать его как поступательное, тогда:

$$v_2 = v_D = v_E = \dot{\varphi} l; \qquad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{Bz}\omega_3^2 = \frac{1}{2}\frac{m_3 4l^2}{3}\dot{\varphi}^2$$

Тогда кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2}\frac{m_1 l^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_3 4l^2}{3}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{3m_1 + 6m_2 + 8m_3}{6} l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} a\dot{\varphi}^2$$

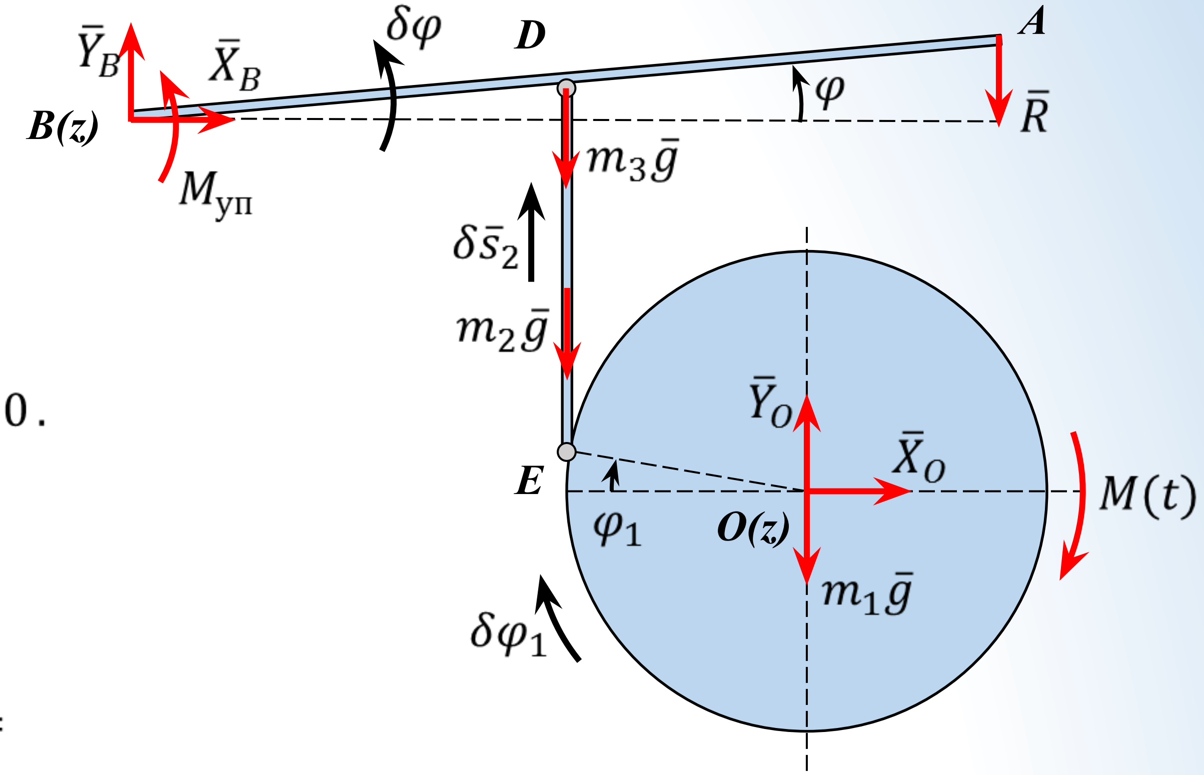
где $a = \dfrac{3m_1 + 6m_2 + 8m_3}{6} l^2 = 0{,}72\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$ – обобщенный инерционный коэффициент.

Пример выполнения домашнего задания.

Обобщенную силу представим в виде:

$$Q = Q_{\text{П}} + Q_{\text{Д}} + Q_{\text{в}}(\mathrm{t}).$$

Потенциальная энергия системы:



$$\Pi = \frac{1}{2}c(\varphi_{\text{ст}} - \varphi)^2 - \frac{1}{2}c\varphi_{\text{ст}}^2 + m_2 gl\sin\varphi + m_3 gl\sin\varphi$$

$\varphi_{\text{ст}}$ – статическая деформация пружины.

Определим $\varphi_{\text{ст}}$ из условия равновесия системы: $\sum_k \bar{F}_k \delta\bar{r}_k = 0$.

$$M_{\text{уп}}\delta\varphi - m_3 gl\delta\varphi - m_2 gl\delta\varphi = 0$$

$$c\varphi_{\text{ст}} = (m_3 + m_2)gl; \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\text{ст}} = \frac{(m_3 + m_2)gl}{c}.$$

$$\Pi \approx \cancel{\frac{1}{2}c\varphi_{\text{ст}}^2} + \frac{1}{2}c\varphi^2 - c\varphi\varphi_{\text{ст}} - \cancel{\frac{1}{2}c\varphi_{\text{ст}}^2} + (m_2 + m_3)gl\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}c\varphi^2 - \cancel{c}\varphi\cancel{\frac{(m_3 + m_2)gl}{c}} + \cancel{(m_2 + m_3)gl\varphi} = \frac{1}{2}c\varphi^2 = \frac{1}{2}\tilde{c}\varphi^2$$

где $\tilde{c} = c = 72\ \text{Н} \cdot \text{м}$ – обобщенный упругий коэффициент.

$$Q_{\text{П}} = -\frac{\partial\Pi}{\partial q} = -\tilde{c}\varphi$$

Пример выполнения домашнего задания.

Диссипативная функция Рэлея:

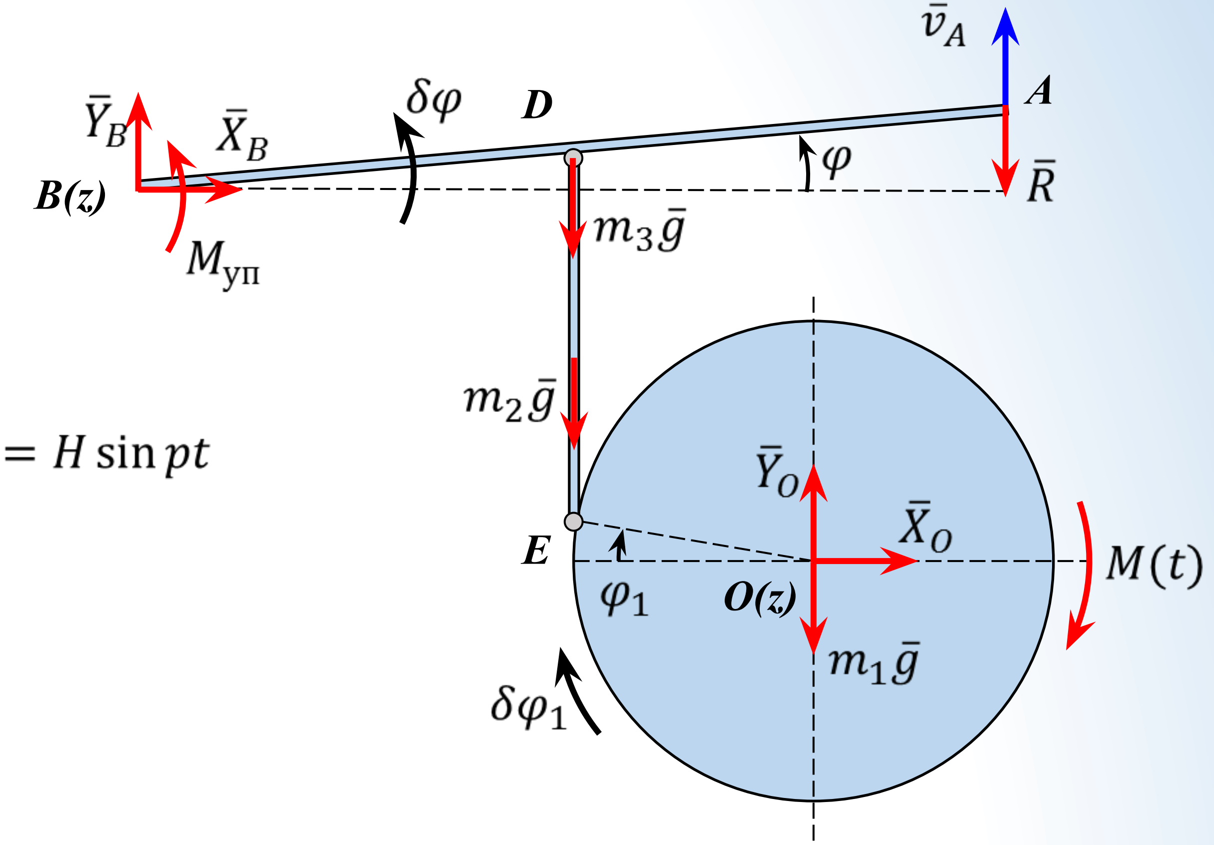
$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_k \mu_k v_k^2 = \frac{1}{2}\mu v_A^2 = \frac{1}{2}\mu\cdot 4l^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}b\dot{\varphi}^2$$

$$b = 4\mu l^2 = 14{,}4\ \text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$$

$$Q_{\text{Д}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\varphi}} = -b\dot{\varphi}$$

$$Q_{\text{в}}(t) = \frac{\delta A(M(t))}{\delta\varphi} = \frac{M(t)\delta\varphi_1}{\delta\varphi} = \frac{M(t)\frac{l}{r}\delta\varphi}{\delta\varphi} = \frac{M_0 l}{r}\sin pt = H\sin pt$$

$$H = \frac{M_0 l}{r} = 12\ \text{Н}\cdot\text{м}$$



Дифференциальное уравнение движения системы имеет вид:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + \tilde{c}q = H\sin pt$$

в канонической форме: $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h\sin pt$; где:

$$n = \frac{b}{2a} = \frac{14{,}4}{2\cdot 0{,}72} = 10\,\frac{\text{рад}}{\text{с}};\qquad k = \sqrt{\frac{\tilde{c}}{a}} = \sqrt{\frac{72}{0{,}72}} = 10\,\frac{\text{рад}}{\text{с}};\qquad h = \frac{H}{a} = \frac{12}{0{,}72} = 16{,}67\ \text{рад/с}^2$$

Пример выполнения домашнего задания.

Поскольку $n = k$, имеем случай критического сопротивления, поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$q_{\text{о.о.}} = e^{-nt}(C_1 + C_2 t).$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$q_{\text{ч.н.}} = Dsin(pt - \varepsilon)$$

где: $$D = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{16{,}16}{\sqrt{(10^2 - 15^2)^2 + 4 \cdot 10^2 \cdot 15^2}} = 0{,}0513\text{рад};$$

$$\varepsilon = arctg\frac{2np}{k^2 - p^2} = arctg\frac{2 \cdot 10 \cdot 15}{10^2 - 15^2} = arctg(-2{,}4) = -1{,}176;$$

поскольку ε меняется в пределах от 0 до π, то: $\varepsilon = \pi - 1{,}176 = 1{,}966$ рад.

$$q(t) = e^{-10t}(C_1 + C_2 t) + 0{,}0513sin(15t - 1{,}966) \text{ рад.}$$

Константы интегрирования определяем из начальных условий:

$$t = 0 \quad q(0) = q_0 = 0,\ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = \omega_0 = 1{,}23 \text{ рад/с}$$

$$C_1 = q_0 + D\sin\varepsilon = 0{,}0473 \text{ рад;}$$

$$C_2 = \dot{q}_0 + nq_0 + D(n \cdot \sin\varepsilon - p \cdot \cos\varepsilon) = 2 \text{ рад/с.}$$

Пример выполнения домашнего задания.

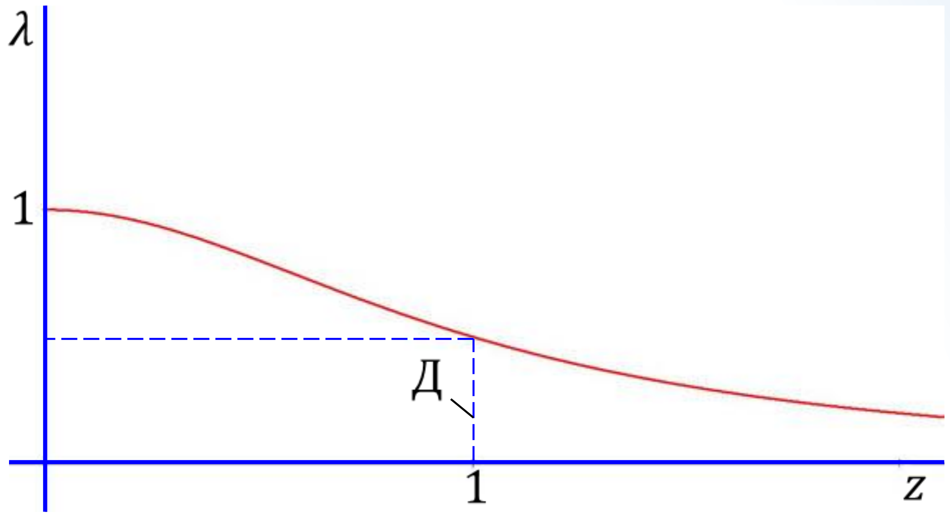
Амплитудно-частотная характеристика.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+d^2z^2}}$$

$\frac{p}{k} = z$ – коэффициент расстройки;

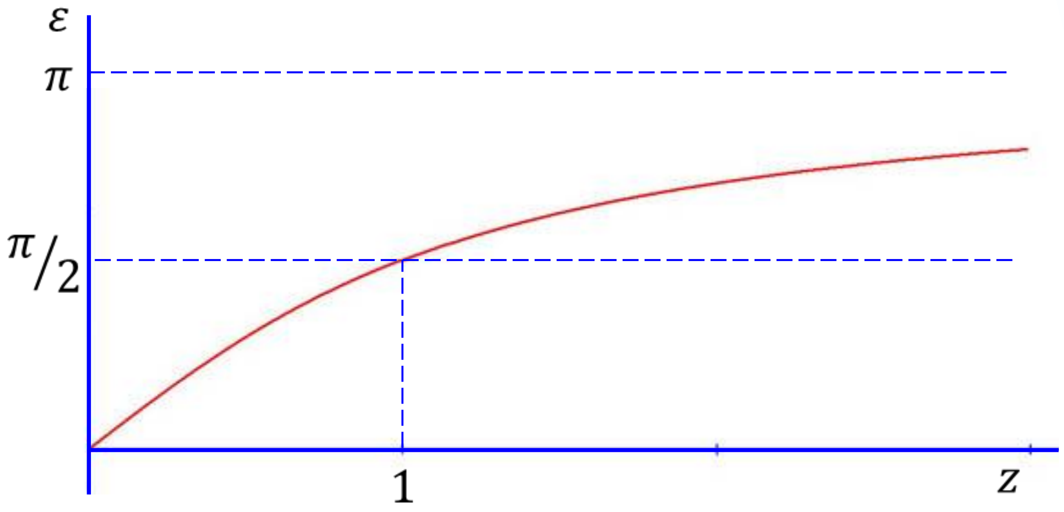
$\mathrm{d} = \frac{2n}{k} = 2$ – безразмерный коэффициент затухания.

$Д = \frac{k}{2n} = 0{,}5$ – добротность системы.



Фазочастоная характеристика.

$$\varepsilon = arctg\frac{d\cdot z}{1-z^2}$$



Пример выполнения домашнего задания.

Исследуем переходные процессы.

На первом участке уравнение движения имеет вид:

$$q_1(t) = e^{-10t}(0{,}0473 + 2t) + 0{,}0513 sin(15t - 1{,}966) \text{ рад.}$$

По истечении времени $t^* = 4T_в + 3\tau_0$ амплитуда внешнего воздействия увеличивается в два раза.

$t^* = 4T_в + 3\tau_0 = 1{,}976$ с.

Амплитуда обобщенной вынуждающей силы: $H = 2\dfrac{M_0 l}{r} = 24 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Амплитуда вынужденных колебаний на втором участке: $D = 2 \cdot 0{,}0513 = 0{,}1026$ рад

На втором участке уравнение движения имеет вид:

$$q_2(t) = e^{-10t}(C_1^* + C_2^* t) + 0{,}1026 sin(15t - 1{,}966) \text{ рад.}$$

Константы интегрирования C_1^*, C_2^* находим из начальных условий. Начальными условиями для второго участка будут являться координата и скорость на первом участке в момент времени t^*:

$$q_{20} = q_1(t^*) = 0{,}02898 \text{ рад}; \qquad \dot{q}_{20} = \dot{q}_1(t^*) = -0{,}6349 \text{ рад}/c;$$

$$C_1^* = q_{20} + D \sin\varepsilon = 0{,}1237 \text{ рад;}$$

$$C_2^* = \dot{q}_{20} + n q_{20} + D(n \cdot \sin\varepsilon - p \cdot \cos\varepsilon) = 1{,}1943 \text{ рад/с.}$$

Тогда на втором участке уравнение движения имеет вид:

$$q_2(t) = e^{-10t}(0{,}1237 + 1{,}1943t) + 0{,}1026 sin(15t - 1{,}966) \text{ рад.}$$

Пример выполнения домашнего задания.

Еще через такой же промежуток времени ($t^* = 4T_в + 3\tau_0$) внешнее воздействие прекращается.

На третьем участке уравнение движения имеет вид:

$$q_3(t) = e^{-10t}\left(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t\right) \text{ рад.}$$

Константы интегрирования $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ находим из начальных условий. Начальными условиями для третьего участка будут являться координата и скорость на втором участке в момент времени t^*:

$$q_{30} = q_2(t^*) = 0{,}05796 \text{ рад}; \qquad \dot{q}_{30} = \dot{q}_2(t^*) = -1{,}2699 \text{ рад}/c;$$

$$\tilde{C}_1 = q_{30} = 0{,}05796 \text{ рад}; \qquad \tilde{C}_2 = \dot{q}_{30} + n \cdot q_{30} = -0{,}6903 \text{ рад};$$

Тогда на третьем участке уравнение движения имеет вид:

$$q_2(t) = e^{-10t}(0{,}05796 - 0{,}6903t) \text{ рад.}$$

Строим графики.