

Решение заданий №17 ЕГЭ профильной математики (задания с параметром)

Выполнили ученики 11
«Б» класса

Молчанова Марина

Сиволап Алеся

Шмуйлис Дарья

Лемтюгов Кирилл

Уравнение окружности

№ 484636

При каких значениях a системы уравнений $\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ равносильны?

Решение:

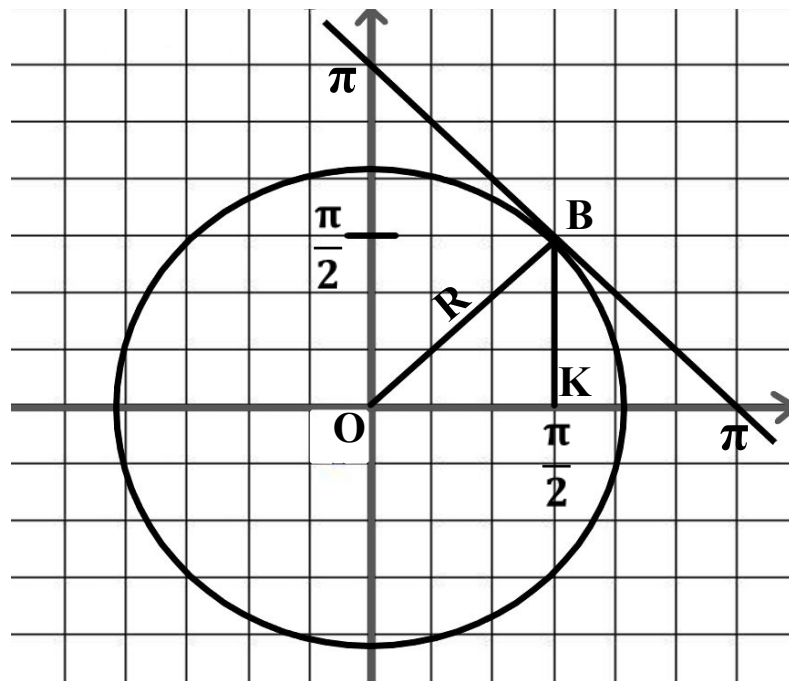
1. При $a < 0$ ни одна из систем не имеет решений \Rightarrow они равносильны
2. При $a = 0$ второе уравнение (общее для обеих систем) имеет единственное решение $x = 0, y = 0$, удовлетворяющее и первым уравнениям обеих систем \Rightarrow системы равносильны
3. При $a > 0$ второе уравнение задается окружностью, радиус которой равен \sqrt{a} , а центр находится в начале координат

Уравнение $\sin(x + y) = 0 \Rightarrow x + y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Системы равносильны тогда и только тогда, когда окружность, определяемая вторым уравнением, имеет общие точки только с прямой $x + y = 0$, соответствующей $n = 0$ в первой системе. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ее радиус был меньше, чем расстояние от начала координат до прямой $x + y = \pi$ ($n = 1$ в первой системе), т. е. чем число $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$0 < \sqrt{a} < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 < a < \frac{\pi^2}{2}$$

Ответ: $a \in (-\infty; \frac{\pi^2}{2})$



Уравнение окружности

№ 548388

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \log_3(a - x^2) = \log_3(a - y^2), \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение:

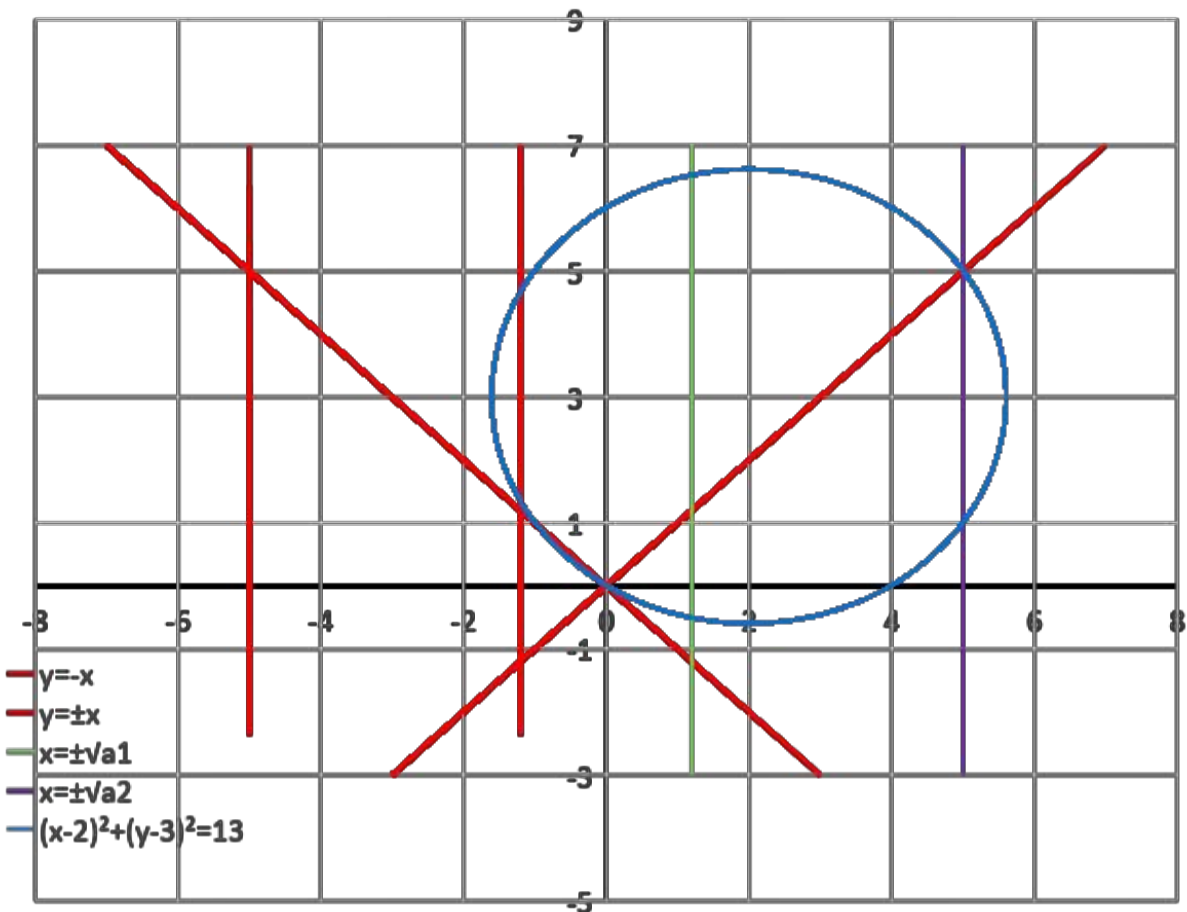
Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \log_3(a - x^2) = \log_3(a - y^2), \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - x^2 = a - y^2, \\ a - x^2 > 0, \\ x^2 - 4x + y^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ a - x^2 > 0, \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm x, \\ -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}, \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13 \end{cases}$$



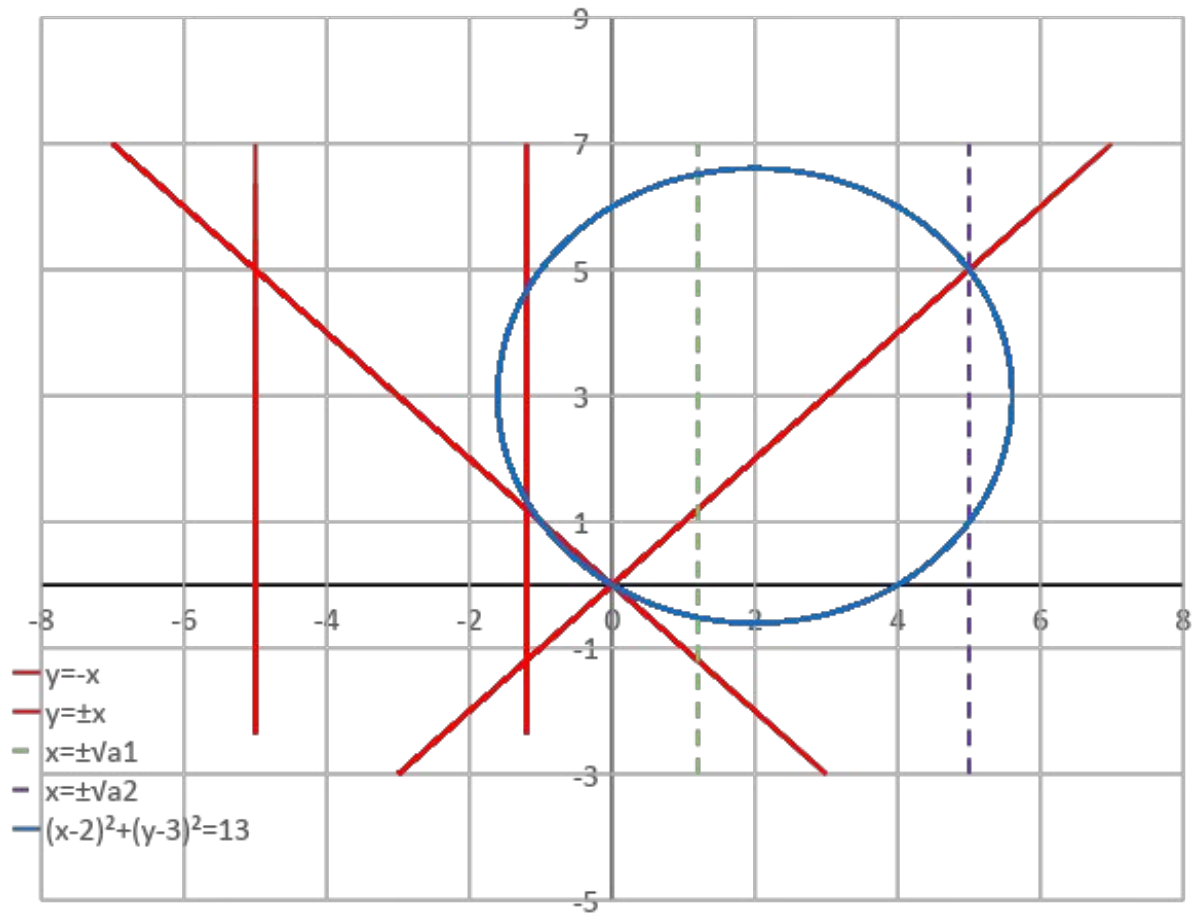
Найдём абсциссы точек пересечения прямой $y = x$ и окружности.

Получим $2x^2 = 10x \Rightarrow x = 0$ или $x = 5$

Аналогично найдём абсциссы точек пересечения прямой $y = -x$ и окружности.

Получим $2x^2 = -2x \Rightarrow x = 0$ или $x = -1$

Получены абсциссы трёх точек $x = -1, x = 0, x = 5$, которые могут быть решениями системы при условии существования логарифмов.



Требуется, чтобы (строго) внутри полосы $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ симметричной относительно оси ординат, попали ровно две из трех этих точек. Это происходит в точности тогда, когда $1 < \sqrt{a} \leq 5$ Таким образом, $1 < a \leq 25$

Ответ: $1 < a \leq 25$

Аналитическое решение уравнений, неравенств, систем

№ 560434

Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений
$$\begin{cases} \log_3(7x + 4y - 11) = \log_3(2x + y - 3) + 1, \\ (y + a)^2 + x + y + a = 7 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение:

1. Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \log_3(7x + 4y - 11) = \log_3(2x + y - 3) + 1, \\ (y + a)^2 + x + y + a = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 4y - 11 = (2x + y - 3) * 3, \\ 2x + y - 3 > 0, \\ (y + a)^2 + x + y + a = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 4 - y - 3 > 0, \\ (y + a)^2 + 2 + a = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y, \\ y < 1, \\ (y + a)^2 = 5 - a \end{cases}$$

2. Чтобы система имела ровно 2 решения, уравнение $(y + a)^2 = 5 - a$ должно иметь 2 различных корня. $y + a = \pm\sqrt{5 - a}$
 $y = -a \pm \sqrt{5 - a}$

3. Корни различны при $a < 5$. При этом больший из корней должен меньше 1

$$\begin{cases} -a + \sqrt{5 - a} < 1 \\ a < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 3a - 4 > 0 \\ -1 < a < 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sqrt{5 - a} < 1 + a \\ a < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a < -4, \quad a > 1 \\ -1 < a < 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 5 - a < 1 + 2a + a^2 \\ 1 + a > 0 \\ a < 5 \end{cases} \quad 1 < a < 5$$

Ответ: (1; 5)

Аналитическое решение уравнений, систем

№ 548819

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 \sin \alpha + 2x^2 \cos \alpha + \sin \alpha = 0$ имеет ровно два различных решения.

Решение:

1. Пусть $x^2 = t$, тогда $t^2 \sin \alpha + 2t \cos \alpha + \sin \alpha = 0$ (*)

Полученное уравнение должно иметь один положительный корень, чтобы исходное имело два различных

2. Если $\sin \alpha = 0$, то уравнение (*) равносильно уравнению $t = 0$, что не удовлетворяет условию задачи

3. Если $\sin \alpha \neq 0$, то

$$\begin{aligned} t^2 \sin \alpha + 2t \cos \alpha + \sin \alpha &= 0 \\ t^2 + 2t \operatorname{ctg} \alpha + 1 &= 0 \end{aligned}$$

По теореме Виета произведение корней полученного квадратного уравнения равно 1

\Rightarrow это уравнение имеет ровно один положительный корень только в случае, когда его $D = 0$ и

абсцисса вершины параболы ($-\frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{2} = -\operatorname{ctg} \alpha$), являющейся графиком левой части уравнения,

положительна

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1 = 0 \\ -\operatorname{ctg} \alpha > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha = \pm 1 \\ \operatorname{ctg} \alpha < 0 \end{cases} \quad \operatorname{ctg} \alpha = -1 \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{Ответ: } -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Использование монотонности, оценок

№ 513265

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$ не имеет корней.

Решение:

Преобразуем уравнение: $27x^6 + 6x^2 = (2x - 4a)^3 + 2(2x - 4a)$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + 2t$. Она монотонно возрастает как сумма двух возрастающих функций.

\Rightarrow исходное уравнение примет вид $f(3x^2) = f(2x - 4a)$ и оно будет равносильно уравнению $3x^2 = 2x - 4a$ ($3x^2 - 2x + 4a = 0$), которое не имеет корней в тех случаях, когда $D < 0$

$$1 - 12a < 0$$

$$12a > 1$$

$$a > \frac{1}{12}$$

Ответ: $a > \frac{1}{12}$

Использование монотонности, оценок

№ 505432

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sin^{14} x + (a - 3 \sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3 \sin x$ имеет хотя бы одно решение.

Решение:

Преобразуем уравнение: $\sin^{14} x + \sin^2 x = (3 \sin x - a)^7 + (3 \sin x - a)$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^7 + t \Rightarrow$ исходное уравнение записывается в виде $f(\sin^2 x) = f(3 \sin x - a)$

Функция f возрастает, т.к. является суммой двух возрастающих функций.

Монотонная функция принимает все свои значения единожды $\Rightarrow \sin^2 x = 3 \sin x - a$
 $a = 3 \sin x - \sin^2 x$

Функция $y = \sin x$ принимает значения от -1 до 1 , а функция $z = 3y - y^2$ монотонно возрастает на отрезке $[-1, 1]$ и принимает на нём значения от -4 до 2

\Rightarrow уравнение $a = 3 \sin x - \sin^2 x$, а с ним и исходное уравнение имеют решение при $-4 \leq a \leq 2$

Ответ: $[-4 \ 2]$

Использование монотонности, оценок

№ 511469

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sin(x + 4a) + \sin\left(\frac{x^2 - 6x - 7a}{2}\right) = 4x - x^2 - a$ не имеет действительных решений.

Решение:

$$\text{Пусть } y = \frac{x^2 - 6x - 7a}{2} \Rightarrow x^2 = 2y + 6x + 7a$$

$$\sin(x + 4a) + \sin y = 4x - a - 2y - 6x - 7a - a$$

$$2y + \sin y = -\sin(x + 4a) - 2x - 8a$$

$$2y + \sin y = \sin(-x - 4a) + 2(-x - 4a)$$

Уравнение имеет вид $f(y) = f(-4a - x)$.

$$f(t) = 2t + \sin t, f'(t) = 2 + \cos t.$$

Производная принимает положительные значения при всех t , а значит, функция возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение $f(y) = f(-4a - x)$ равносильно

$$y = -4a - x$$

$$\frac{x^2 - 6x - 7a}{2} = -4a - x$$

$$x^2 - 6x - 7a = -8a - 2x$$

$$x^2 - 4x + a = 0$$

$$D < 0, D = 4 - a \Rightarrow 4 - a < 0$$

$$a > 4$$

Ответ: $a > 4$

Использование монотонности, оценок

№ 513268

Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{a+x^2+2\log_5(a^2-4a+5)}{30\sqrt{17x^4+5x^2+a+1}+\log_5^2(a^2-4a+5)}$$
 состоит из одной точки, найдите это решение.

Решение:

Решение может быть единственным, если $x = 0$. При этом значение неравенства обращается в равенство.

$$1 = \frac{a+2\log_5(a^2-4a+5)}{a+1+\log_5^2(a^2-4a+5)}$$

$$a + 2\log_5(a^2 - 4a + 5) = a + 1 + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)$$

$$\log_5^2(a^2 - 4a + 5) - 2\log_5(a^2 - 4a + 5) + 1 = 0$$

$$(\log_5(a^2 - 4a + 5) - 1)^2 = 0$$

$$\log_5(a^2 - 4a + 5) = 1, \quad 1 = \log_5 5$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 5 = 5$$

$$a^2 - 4a + 5 > 0$$

$$a^2 - 4a = 0$$

$a = 0$ или $a = 4$, но $a = 0$ не соответствует условию задания, т.к. не является положительным числом

$a = 4$:

$$1 \leq \frac{4+x^2+2\log_5(16-16+5)}{30\sqrt{17x^4+5x^2+4+1+\log_5^2(16-16+5)}}$$

$$1 \leq \frac{x^2+6}{30\sqrt{17x^4+5x^2+6}}, \text{ знаменатель положительный} \Rightarrow \text{на него можно умножить}$$

$$x^2 + 6 \geq 30\sqrt{17x^4 + 5x^2 + 6}$$

$$x^2 \geq 30\sqrt{17x^4 + 5x^2}$$

$$x^2 \geq \sqrt{900(17x^4 + 5x^2)}$$

$$x^4 \geq 900(17x^4 + 5x^2)$$

$$15299x^4 + 4500x^2 \leq 0$$

$$x = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ подходит}$$

Ответ: $a = 4$, при этом $x = 0$

