Решение заданий №17 ЕГЭ профильной математики
(задания с параметром)

Выполнили ученики 11 «Б» класса
Молчанова Марина
Сиволап Алеся
Шмуйлис Дарья
Лемтюгов Кирилл

Уравнение окружности

№ 484636

При каких значениях a системы уравнений $\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ равносильны?

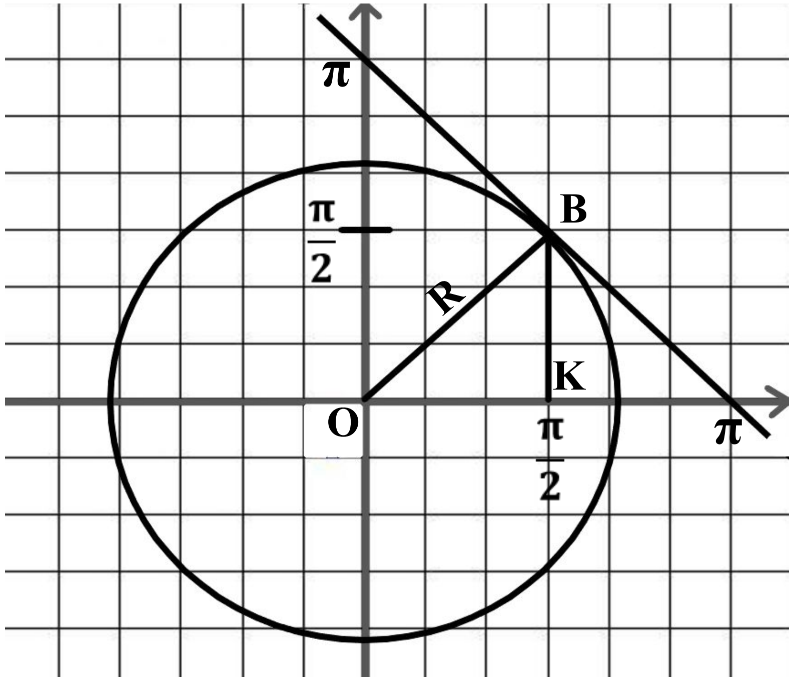
Решение:

1. При $a < 0$ ни одна из систем не имеет решений $\Rightarrow$ они равносильны
2. При $a = 0$ второе уравнение (общее для обеих систем) имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, удовлетворяющее и первым уравнениям обеих систем $\Rightarrow$ системы равносильны
3. При $a > 0$ второе уравнение задается окружностью, радиус которой равен $\sqrt{a}$, а центр находится в начале координат

   Уравнение $\sin(x+y)=0 \Rightarrow x+y=\pi n, n \in Z$

   Системы равносильны тогда и только тогда, когда окружность, определяемая вторым уравнением, имеет общие точки только с прямой $x + y = 0$, соответствующей $n = 0$ в первой системе. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ее радиус был меньше, чем расстояние от начала координат до прямой $x+y=\pi$ ($n = 1$ в первой системе), т. е. чем число $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

   $$0 < \sqrt{a} < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 0 < a < \frac{\pi^2}{2}$$



Ответ: a ∈ (-∞; $\frac{\pi^2}{2}$)

Уравнение окружности

№ 548388

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \log_3(a-x^2) = \log_3(a-y^2), \\ x^2+y^2 = 4x+6y \end{cases}$

имеет ровно два различных решения.

Решение:

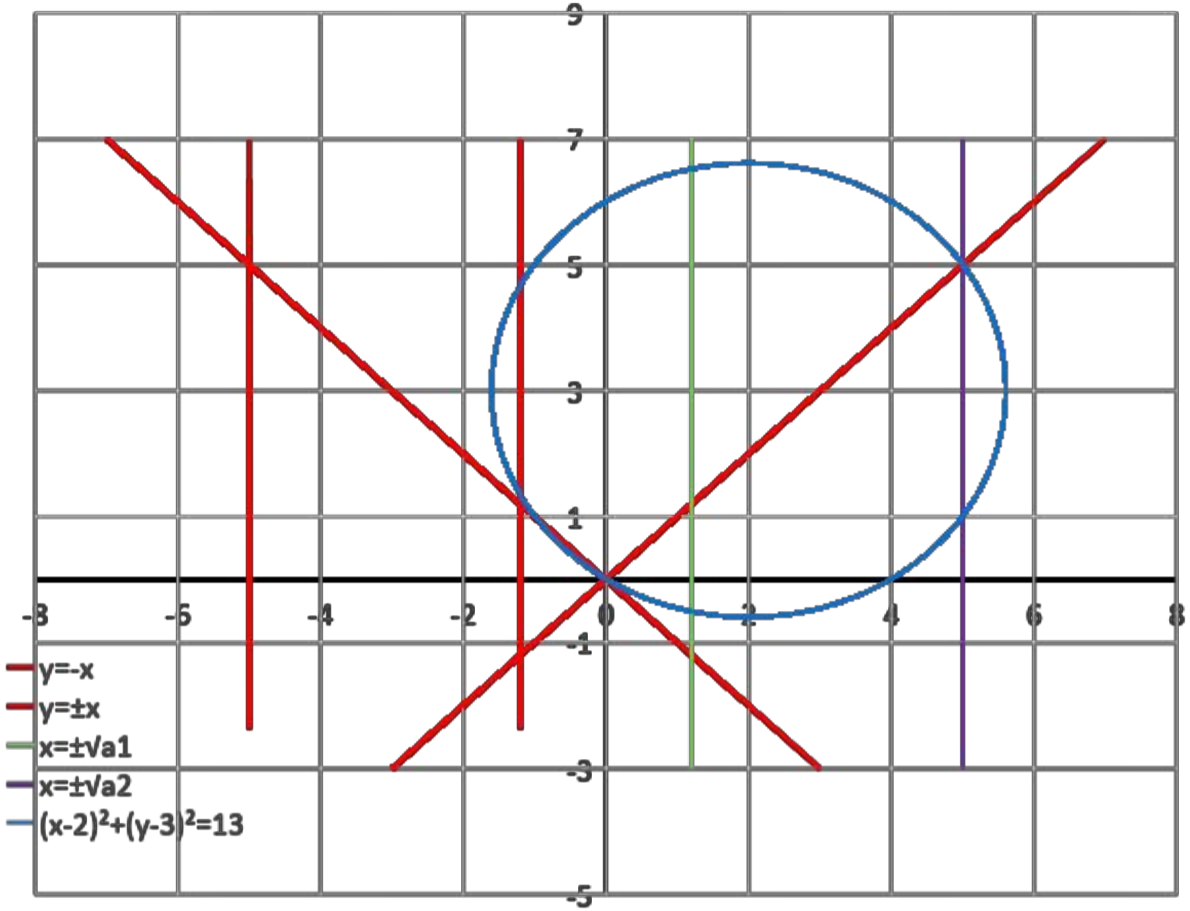
Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \log_3(a-x^2) = \log_3(a-y^2), \\ x^2+y^2 = 4x+6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-x^2 = a-y^2, \\ a-x^2 > 0, \\ x^2-4x+y^2-6y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ a-x^2 > 0, \\ x^2-4x+4+y^2-6y+9 = 13 \end{cases}$$

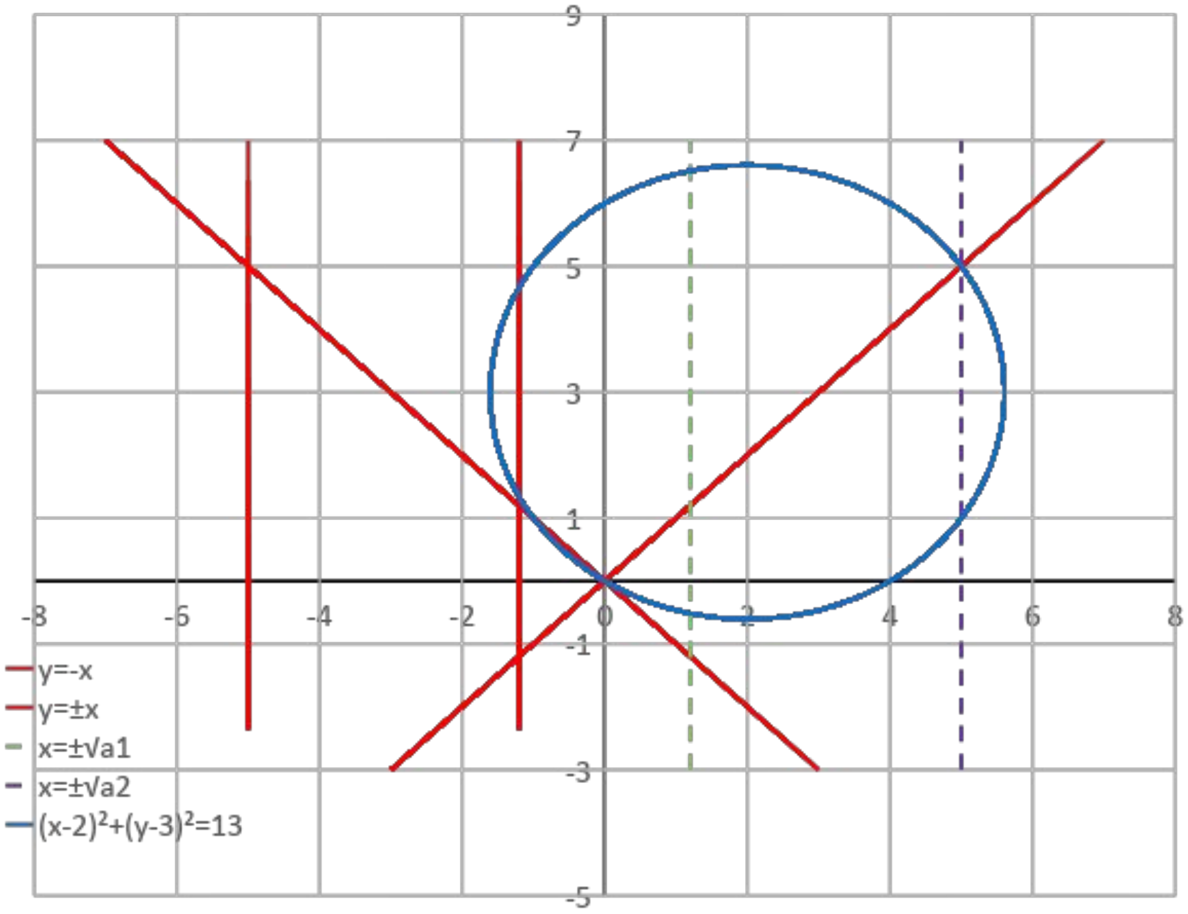
$$\begin{cases} y = \pm x, \\ -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}, \\ (x-2)^2+(y-3)^2 = 13 \end{cases}$$



Найдём абсциссы точек пересечения прямой $y = x$ и окружности.
Получим $2x^2 = 10x \Rightarrow x = 0$ или $x = 5$

Аналогично найдём абсциссы точек пересечения прямой $y = -x$ и окружности.
Получим $2x^2 = -2x \Rightarrow x = 0$ или $x = -1$

Получены абсциссы трёх точек $x = -1, x = 0$, $x = 5$, которые могут быть решениями системы при условии существования логарифмов.



Требуется, чтобы (строго) внутрь полосы $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ симметричной относительно оси ординат, попали ровно две из трех этих точек. Это происходит в точности тогда, когда $1 < \sqrt{a} \leq 5$ Таким образом, $1 < a \leq 25$

Ответ: $\mathbf{1 < a \leq 25}$

Аналитическое решение уравнений, неравенств, систем

№ 560434

Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}\log_3(7x+4y-11)=\log_3(2x+y-3)+1,\\ (y+a)^2+x+y+a=7\end{cases}$

имеет ровно два решения.

Решение:

1. Преобразуем систему:

$$\begin{cases}\log_3(7x+4y-11)=\log_3(2x+y-3)+1,\\ (y+a)^2+x+y+a=7\end{cases}$$

$$\begin{cases}7x+4y-11=(2x+y-3)*3,\\ 2x+y-3>0,\\ (y+a)^2+x+y+a=7\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=2,\\ 4-y-3>0,\\ (y+a)^2+2+a=7\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2-y,\\ y<1,\\ (y+a)^2=5-a\end{cases}$$

2. Чтобы система имела ровно 2 решения, уравнение $(y+a)^2=5-a$ должно иметь 2 различных корня.

$$(y+a)^2=5-a$$
$$y+a=\pm\sqrt{5-a}$$
$$y=-a\pm\sqrt{5-a}$$

3. Корни различны при $a<5$. При этом больший из корней должен меньше 1

$$\begin{cases}-a+\sqrt{5-a}<1\\ a<5\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{5-a}<1+a\\ a<5\end{cases}$$

$$\begin{cases}5-a<1+2a+a^2\\ 1+a>0\\ a<5\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+3a-4>0\\ -1<a<5\end{cases}$$

$$\begin{cases}a<-4,\quad a>1\\ -1<a<5\end{cases}$$

$$1<a<5$$

Ответ: $(1;5)$

Аналитическое решение уравнений, систем

№ 548819

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 \sin \alpha + 2x^2 \cos \alpha + \sin \alpha = 0$ имеет ровно два различных решения.

Решение:

1. Пусть $x^2 = t$, тогда $t^2 \sin \alpha + 2t \cos \alpha + \sin \alpha = 0$ (*)
   Полученное уравнение должно иметь один положительный корень, чтобы исходное имело два различных
2. Если $\sin \alpha = 0$, то уравнение (*) равносильно уравнению $t = 0$, что не удовлетворяет условию задачи
3. Если $\sin \alpha \neq 0$, то

$$t^2 \sin \alpha + 2t \cos \alpha + \sin \alpha = 0$$
$$t^2 + 2t\, ctg\, \alpha + 1 = 0$$

По теореме Виета произведение корней полученного квадратного уравнения равно 1
$\Rightarrow$ это уравнение имеет ровно один положительный корень только в случае, когда его $D = 0$ и абсцисса вершины параболы ($\frac{-2\, ctg\, \alpha}{2} = -ctg\, \alpha$), являющейся графиком левой части уравнения, положительна

$$\begin{cases} ctg^2\alpha - 1 = 0 \\ -ctg\, \alpha > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ctg\, \alpha = \pm 1 \\ ctg\, \alpha < 0 \end{cases} \quad ctg\, \alpha = -1 \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Использование монотонности, оценок

№ 513265

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$ не имеет корней.

Решение:

Преобразуем уравнение: $27x^6 + 6x^2 = (2x - 4a)^3 + 2(2x - 4a)$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + 2t$. Она монотонно возрастает как сумма двух возрастающих функций.

$\Rightarrow$ исходное уравнение примет вид $f(3x^2) = f(2x - 4a)$ и оно будет равносильно уравнению $3x^2 = 2x - 4a$

$(3x^2 - 2x + 4a = 0)$, которое не имеет корней в тех случаях, когда $D < 0$

$$1 - 12a < 0$$

$$12a > 1$$

$$a > \frac{1}{12}$$

Ответ: $\boldsymbol{a > \frac{1}{12}}$

Использование монотонности, оценок

№ 505432

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sin^{14} x + (a - 3\sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3\sin x$ имеет хотя бы одно решение.

Решение:

Преобразуем уравнение: $\sin^{14} x + \sin^2 x = (3\sin x - a)^7 + (3\sin x - a)$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^7 + t \Rightarrow$ исходное уравнение записывается в виде $f(\sin^2 x) = f(3\sin x - a)$

Функция f возрастает, т.к. является суммой двух возрастающих функция.

Монотонная функция принимает все свои значения единожды $\Rightarrow \sin^2 x = 3\sin x - a$

$$a = 3\sin x - \sin^2 x$$

Функция $y = \sin x$ принимает значения от -1 до 1, а функция $z = 3y - y^2$ монотонно возрастает на отрезке $[-1, 1]$ и принимает на нём значения от -4 до 2

$\Rightarrow$ уравнение $a = 3\sin x - \sin^2 x$, а с ним и исходное уравнение имеют решение при $-4 \le a \le 2$

Ответ: $[-4\ 2]$

Использование монотонности, оценок

№ 511469

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin(x+4a)+\sin\left(\frac{x^2-6x-7a}{2}\right)=4x-x^2-a$ не имеет действительных решений.

Решение:

Пусть $y=\frac{x^2-6x-7a}{2}\Rightarrow x^2=2y+6x+7a$

$$\sin(x+4a)+\sin y=4x-a-2y-6x-7a-a$$

$$2y+\sin y=-\sin(x+4a)-2x-8a$$

$$2y+\sin y=\sin(-x-4a)+2(-x-4a)$$

Уравнение имеет вид $f(y)=f(-4a-x)$.

$f(t)=2t+\sin t$, $f'(t)=2+\cos t$.

Производная принимает положительные значения при всех t, а значит, функция возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение $f(y)=f(-4a-x)$ равносильно

$$y=-4a-x$$

$$\frac{x^2-6x-7a}{2}=-4a-x$$

$$x^2-6x-7a=-8a-2x$$

$$x^2-4x+a=0$$

$$D<0,\ D=4-a\Rightarrow 4-a<0$$

$$a>4$$

Ответ: $\boldsymbol{a>4}$

Использование монотонности, оценок

№ 513268

Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $1 \le \frac{a+x^2+2\log_5(a^2-4a+5)}{30\sqrt{17x^4+5x^2}+a+1+\log_5^2(a^2-4a+5)}$ состоит из одной точки, найдите это решение.

Решение:

Решение может быть единственным, если $x = 0$. При этом значение неравенства обращается в равенство.

$$1 = \frac{a+2\log_5(a^2-4a+5)}{a+1+\log_5^2(a^2-4a+5)}$$

$$a + 2\log_5(a^2 - 4a + 5) = a + 1 + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)$$

$$\log_5^2(a^2 - 4a + 5) - 2\log_5(a^2 - 4a + 5) + 1 = 0$$

$$(\log_5(a^2 - 4a + 5) - 1)^2 = 0$$

$$\log_5(a^2 - 4a + 5) = 1, \quad 1 = \log_5 5$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 5 = 5$$

$$a^2 - 4a + 5 > 0$$

$$a^2 - 4a = 0$$

$a = 0$ или $a = 4$, но $a = 0$ не соответствует условию задания, т.к. не является положительным числом

$a = 4$:

$$1 \leq \frac{4+x^2+2\log_5(16-16+5)}{30\sqrt{17x^4+5x^2}+4+1+\log_5^2(16-16+5)}$$

$1 \leq \frac{x^2+6}{30\sqrt{17x^4+5x^2}+6}$, знаменатель положительный $\Rightarrow$ на него можно умножить

$$x^2 + 6 \geq 30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + 6$$

$$x^2 \geq 30\sqrt{17x^4 + 5x^2}$$

$$x^2 \geq \sqrt{900(17x^4 + 5x^2)}$$

$$x^4 \geq 900(17x^4 + 5x^2)$$

$$15299x^4 + 4500x^2 \leq 0$$

$x = 0 \Rightarrow a = 4$ подходит

Ответ: $a = 4$, при этом $x = 0$