

# Решение заданий №17 ЕГЭ профильной математики (задания с параметром)

Выполнили ученики 11  
«Б» класса

Молчанова Марина

Сиволап Алеся

Шмуйлис Дарья

Лемтюгов Кирилл

# Уравнение окружности

№ 484636

При каких значениях  $a$  системы уравнений  $\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$  и  $\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$  равносильны?

**Решение:**

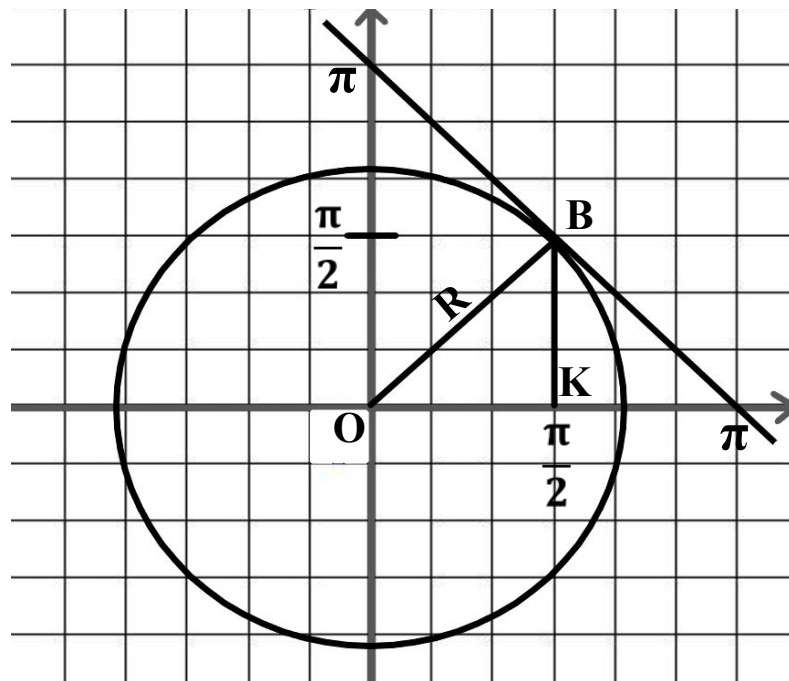
1. При  $a < 0$  ни одна из систем не имеет решений  $\Rightarrow$  они равносильны
2. При  $a = 0$  второе уравнение (общее для обеих систем) имеет единственное решение  $x = 0, y = 0$ , удовлетворяющее и первым уравнениям обеих систем  $\Rightarrow$  системы равносильны
3. При  $a > 0$  второе уравнение задается окружностью, радиус которой равен  $\sqrt{a}$ , а центр находится в начале координат

Уравнение  $\sin(x + y) = 0 \Rightarrow x + y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Системы равносильны тогда и только тогда, когда окружность, определяемая вторым уравнением, имеет общие точки только с прямой  $x + y = 0$ , соответствующей  $n = 0$  в первой системе. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ее радиус был меньше, чем расстояние от начала координат до прямой  $x + y = \pi$  ( $n = 1$  в первой системе), т. е. чем число  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$0 < \sqrt{a} < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 < a < \frac{\pi^2}{2}$$

**Ответ:**  $a \in (-\infty; \frac{\pi^2}{2})$



# Уравнение окружности

№ 548388

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} \log_3(a - x^2) = \log_3(a - y^2), \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Решение:**

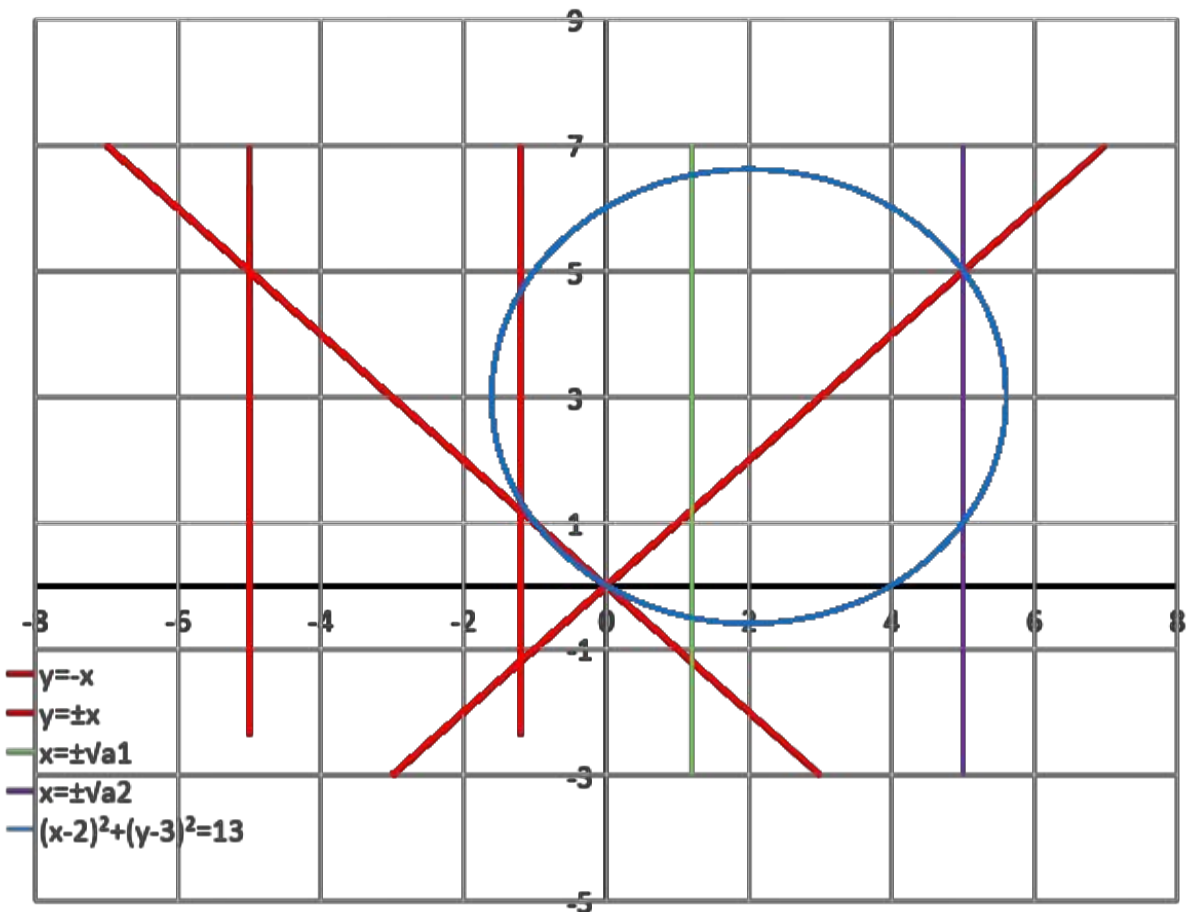
Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \log_3(a - x^2) = \log_3(a - y^2), \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - x^2 = a - y^2, \\ a - x^2 > 0, \\ x^2 - 4x + y^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ a - x^2 > 0, \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm x, \\ -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}, \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13 \end{cases}$$



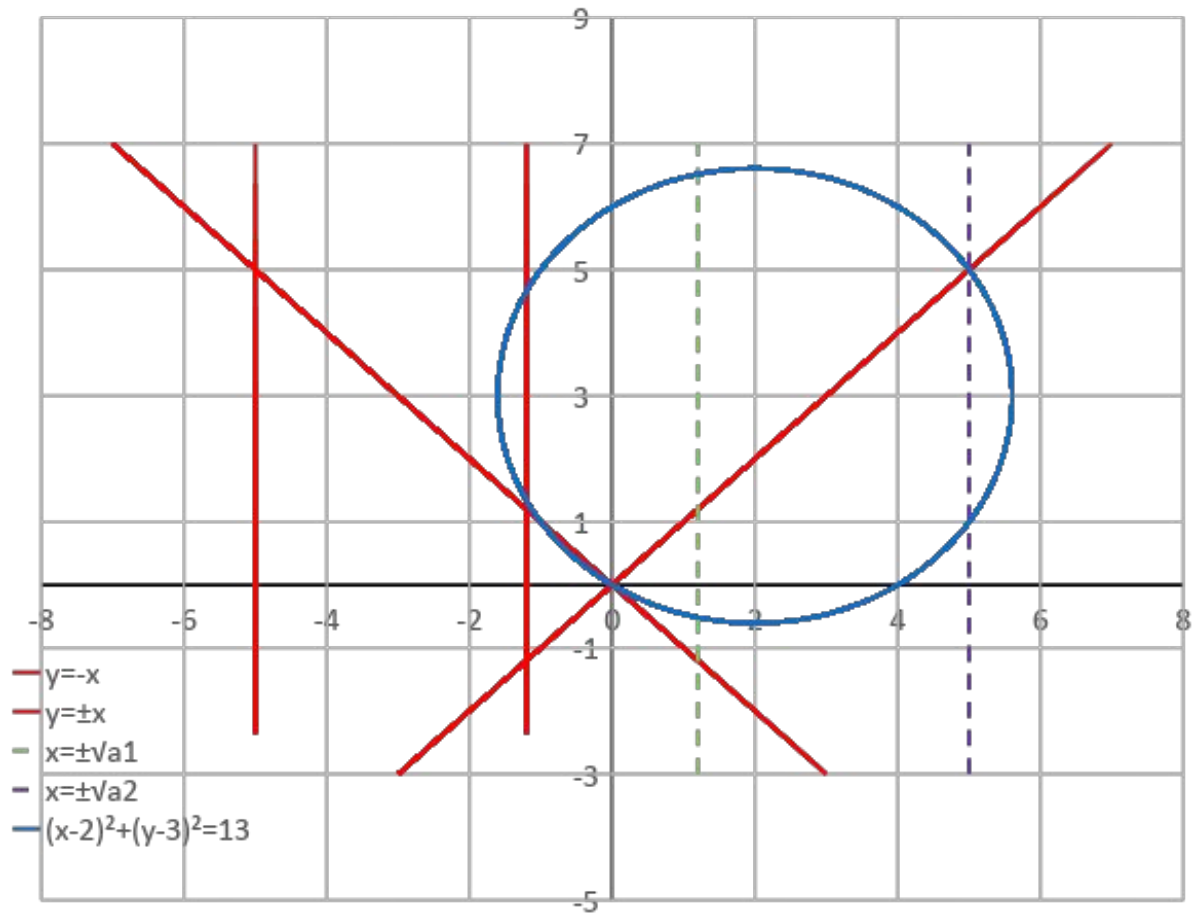
Найдём абсциссы точек пересечения прямой  $y = x$  и окружности.

Получим  $2x^2 = 10x \Rightarrow x = 0$  или  $x = 5$

Аналогично найдём абсциссы точек пересечения прямой  $y = -x$  и окружности.

Получим  $2x^2 = -2x \Rightarrow x = 0$  или  $x = -1$

Получены абсциссы трёх точек  $x = -1, x = 0, x = 5$ , которые могут быть решениями системы при условии существования логарифмов.



Требуется, чтобы (строго) внутри полосы  $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$  симметричной относительно оси ординат, попали ровно две из трех этих точек. Это происходит в точности тогда, когда  $1 < \sqrt{a} \leq 5$ . Таким образом,  $1 < a \leq 25$

**Ответ:  $1 < a \leq 25$**

# Аналитическое решение уравнений, неравенств, систем

№ 560434

Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений 
$$\begin{cases} \log_3(7x + 4y - 11) = \log_3(2x + y - 3) + 1, \\ (y + a)^2 + x + y + a = 7 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Решение:**

1. Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \log_3(7x + 4y - 11) = \log_3(2x + y - 3) + 1, \\ (y + a)^2 + x + y + a = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 4y - 11 = (2x + y - 3) * 3, \\ 2x + y - 3 > 0, \\ (y + a)^2 + x + y + a = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 4 - y - 3 > 0, \\ (y + a)^2 + 2 + a = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y, \\ y < 1, \\ (y + a)^2 = 5 - a \end{cases}$$

2. Чтобы система имела ровно 2 решения, уравнение  $(y + a)^2 = 5 - a$  должно иметь 2 различных корня.  $y + a = \pm\sqrt{5 - a}$   
 $y = -a \pm \sqrt{5 - a}$

3. Корни различны при  $a < 5$ . При этом больший из корней должен меньше 1

$$\begin{cases} -a + \sqrt{5 - a} < 1 \\ a < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 3a - 4 > 0 \\ -1 < a < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5 - a} < 1 + a \\ a < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a < -4, \quad a > 1 \\ -1 < a < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 - a < 1 + 2a + a^2 \\ 1 + a > 0 \\ a < 5 \end{cases} \quad 1 < a < 5$$

**Ответ: (1; 5)**

# Аналитическое решение уравнений, систем

№ 548819

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x^4 \sin \alpha + 2x^2 \cos \alpha + \sin \alpha = 0$  имеет ровно два различных решения.

**Решение:**

1. Пусть  $x^2 = t$ , тогда  $t^2 \sin \alpha + 2t \cos \alpha + \sin \alpha = 0$  (\*)

Полученное уравнение должно иметь один положительный корень, чтобы исходное имело два различных

2. Если  $\sin \alpha = 0$ , то уравнение (\*) равносильно уравнению  $t = 0$ , что не удовлетворяет условию задачи

3. Если  $\sin \alpha \neq 0$ , то

$$t^2 \sin \alpha + 2t \cos \alpha + \sin \alpha = 0$$

$$t^2 + 2t \operatorname{ctg} \alpha + 1 = 0$$

По теореме Виета произведение корней полученного квадратного уравнения равно 1

$\Rightarrow$  это уравнение имеет ровно один положительный корень только в случае, когда его  $D = 0$  и

абсцисса вершины параболы ( $-\frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{2} = -\operatorname{ctg} \alpha$ ), являющейся графиком левой части уравнения,

положительна

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1 = 0 \\ -\operatorname{ctg} \alpha > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha = \pm 1 \\ \operatorname{ctg} \alpha < 0 \end{cases} \quad \operatorname{ctg} \alpha = -1 \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{Ответ: } -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



# Использование монотонности, оценок

№ 513265

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$  не имеет корней.

**Решение:**

Преобразуем уравнение:  $27x^6 + 6x^2 = (2x - 4a)^3 + 2(2x - 4a)$

Рассмотрим функцию  $f(t) = t^3 + 2t$ . Она монотонно возрастает как сумма двух возрастающих функций.

$\Rightarrow$  исходное уравнение примет вид  $f(3x^2) = f(2x - 4a)$  и оно будет равносильно уравнению  $3x^2 = 2x - 4a$  ( $3x^2 - 2x + 4a = 0$ ), которое не имеет корней в тех случаях, когда  $D < 0$

$$1 - 12a < 0$$

$$12a > 1$$

$$a > \frac{1}{12}$$

**Ответ:**  $a > \frac{1}{12}$

# Использование монотонности, оценок

№ 505432

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sin^{14} x + (a - 3 \sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3 \sin x$  имеет хотя бы одно решение.

**Решение:**

Преобразуем уравнение:  $\sin^{14} x + \sin^2 x = (3 \sin x - a)^7 + (3 \sin x - a)$

Рассмотрим функцию  $f(t) = t^7 + t \Rightarrow$  исходное уравнение записывается в виде  $f(\sin^2 x) = f(3 \sin x - a)$

Функция  $f$  возрастает, т.к. является суммой двух возрастающих функций.

Монотонная функция принимает все свои значения единожды  $\Rightarrow \sin^2 x = 3 \sin x - a$   
 $a = 3 \sin x - \sin^2 x$

Функция  $y = \sin x$  принимает значения от  $-1$  до  $1$ , а функция  $z = 3y - y^2$  монотонно возрастает на отрезке  $[-1, 1]$  и принимает на нём значения от  $-4$  до  $2$

$\Rightarrow$  уравнение  $a = 3 \sin x - \sin^2 x$ , а с ним и исходное уравнение имеют решение при  $-4 \leq a \leq 2$

**Ответ:**  $[-4 \ 2]$



# Использование монотонности, оценок

№ 511469

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sin(x + 4a) + \sin\left(\frac{x^2 - 6x - 7a}{2}\right) = 4x - x^2 - a$  не имеет действительных решений.

**Решение:**

$$\text{Пусть } y = \frac{x^2 - 6x - 7a}{2} \Rightarrow x^2 = 2y + 6x + 7a$$

$$\sin(x + 4a) + \sin y = 4x - a - 2y - 6x - 7a - a$$

$$2y + \sin y = -\sin(x + 4a) - 2x - 8a$$

$$2y + \sin y = \sin(-x - 4a) + 2(-x - 4a)$$

Уравнение имеет вид  $f(y) = f(-4a - x)$ .

$$f(t) = 2t + \sin t, f'(t) = 2 + \cos t.$$

Производная принимает положительные значения при всех  $t$ , а значит, функция возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение  $f(y) = f(-4a - x)$  равносильно

$$y = -4a - x$$

$$\frac{x^2 - 6x - 7a}{2} = -4a - x$$

$$x^2 - 6x - 7a = -8a - 2x$$

$$x^2 - 4x + a = 0$$

$$D < 0, D = 4 - a \Rightarrow 4 - a < 0$$

$$a > 4$$

**Ответ:  $a > 4$**

# Использование монотонности, оценок

№ 513268

Найдите все положительные значения параметра  $a$ , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{a+x^2+2\log_5(a^2-4a+5)}{30\sqrt{17x^4+5x^2+a+1}+\log_5^2(a^2-4a+5)}$$
 состоит из одной точки, найдите это решение.

**Решение:**

Решение может быть единственным, если  $x = 0$ . При этом значение неравенства обращается в равенство.

$$1 = \frac{a+2\log_5(a^2-4a+5)}{a+1+\log_5^2(a^2-4a+5)}$$

$$a + 2\log_5(a^2 - 4a + 5) = a + 1 + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)$$

$$\log_5^2(a^2 - 4a + 5) - 2\log_5(a^2 - 4a + 5) + 1 = 0$$

$$(\log_5(a^2 - 4a + 5) - 1)^2 = 0$$

$$\log_5(a^2 - 4a + 5) = 1, \quad 1 = \log_5 5$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 5 = 5$$

$$a^2 - 4a + 5 > 0$$

$$a^2 - 4a = 0$$

$a = 0$  или  $a = 4$ , но  $a = 0$  не соответствует условию задания, т.к. не является положительным числом

$a = 4$ :

$$1 \leq \frac{4+x^2+2 \log_5(16-16+5)}{30\sqrt{17x^4+5x^2+4+1+\log_5^2(16-16+5)}}$$

$$1 \leq \frac{x^2+6}{30\sqrt{17x^4+5x^2+6}}, \text{ знаменатель положительный} \Rightarrow \text{на него можно умножить}$$

$$x^2 + 6 \geq 30\sqrt{17x^4 + 5x^2 + 6}$$

$$x^2 \geq 30\sqrt{17x^4 + 5x^2}$$

$$x^2 \geq \sqrt{900(17x^4 + 5x^2)}$$

$$x^4 \geq 900(17x^4 + 5x^2)$$

$$15299x^4 + 4500x^2 \leq 0$$

$$x = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ подходит}$$

**Ответ:  $a = 4$ , при этом  $x = 0$**

