

# Практическая работа №1

Оптимизационное  
моделирование в Excel



**Цель работы:** освоение инструментария **Поиск решения** для решения оптимизационных задач в MS Excel.



## **Пример 1: Задача определения оптимального ассортимента продукции**

Предприятие изготавливает четыре вида продукции – А, В, С и D. Для производства продукции используются ресурсы – трудовые, материальные, финансовые. Максимальный запас ресурсов на производстве 800, 2000, 2900 соответственно. Расход ресурсов на единицу производства продукции

А, В, С и D и предельно допустимые значения выпуска каждого вида даны в табл. 1.



Ресурсы	Расход ресурса на единицу продукции				Запас ресурса
	A	B	C	D	
Трудовые	8	3	4	4	800
Материальные	7	8	12	10	2000
Финансовые	15	14	13	14	2900
Нижняя граница выпуска	12		3		
Верхняя граница выпуска	30	25			



Прибыль от реализации единицы продукции равны: 8 д. е. – для А, 10 д. е. – для В, 7 д. е. – для С, 8 д. е. – для D.

Какой объем продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы прибыль от реализации продукции была максимальной?



Решение. Составим математическую модель для решения поставленной задачи.

Обозначим переменные:

$x_1$  – объем произведенной продукции вида А;

$x_2$  – объем произведенной продукции вида В;

$x_3$  – объем произведенной продукции вида С;

$x_4$  – объем произведенной продукции вида D

Поскольку производство продукции ограничено имеющимися в распоряжении предприятия ресурсами и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что объем изготавливаемой продукции не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:



$$\left\{ \begin{array}{l} 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 800, \\ 7x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4 \leq 2000, \\ 15x_1 + 14x_2 + 13x_3 + 14x_4 \leq 2900, \\ 12 \leq x_1 \leq 30, \\ 0 \leq x_2 \leq 25, \\ x_3 \geq 3, \\ x_4 \geq 0. \end{array} \right.$$



Прибыль от реализации продукции составит:

$$F = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 8x_4$$

Среди всех неотрицательных решений системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция  $F$  принимает максимальное значение  $F_{\max}$ .

Рассматриваемая задача относится к разряду типовых задач оптимизации производственной программы предприятия. В качестве критериев оптимальности в этих задачах могут быть также использованы прибыль, себестоимость, номенклатура производимой продукции, затраты станочного времени и др.

Создадим на рабочем листе EXCEL. таблицу для ввода исходных данных. Заливкой выделены ячейки для ввода формул и вывода результата.

	A	B	C	D	E	F	G
1		<b>Продукция</b>					
2		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		
3	Объем выпускаемой продукции					<b>Прибыль (целевая функция)</b>	
4	Прибыль от реализации продукции						
5							
6		<b>Ограничения</b>					
7		Расход ресурса на единицу продукции				<b>Ограничения по ресурсам</b>	<b>Запас ресурса</b>
8	Ресурсы	A	B	C	D		
9	Трудовые						
10	Материальные						
11	Финансовые						
12	Нижняя граница выпуска						
13	Верхняя граница выпуска						



Заполним таблицу.

Блок ячеек В3:Е3 содержит оптимальное решение, значение этих ячеек будет получено в результате решения задачи.

Блок ячеек В4:Е4 содержит значения прибыли от реализации продукции. В ячейках В9: Е13 отображен расход ресурсов на единицу производства продукции А, В, С и D и предельно допустимые значения выпуска каждого вида.

Для вычисления целевой функции в ячейке F4 используем функцию

СУММПРОИЗВ



=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B4:E4)

A

B

C

D

E

F

1

Продукция

2

 $x_1$  $x_2$  $x_3$  $x_4$ 

3

Объем выпускаемой  
продукции

Прибыль (целевая функция)

4

Прибыль от реализации  
продукции

8

10

7

8

=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B4:E4)

5

6

7

8

Ресурсы

A

9

Трудовые

10

Материальные

11

Финансовые

12

Нижняя граница выпуска

13

Верхняя граница выпуска

Аргументы функции

СУММПРОИЗВ

Массив1

B3:E3



= {0;0;0;0}

Массив2

B4:E4



= {8;10;7;8}

Массив3



= массив

= 0

Возвращает сумму произведений диапазонов или массивов.

В ячейки F9:F11 введены формулы для расчета ограничений по ресурсам. Ниже представлена таблица с исходными данными, целевой функцией, ограничениями и граничными условиями.

	A	B	C	D	E	F	G
1		<b>Продукция</b>					
2		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		
3	Объем выпускаемой продукции					<b>Прибыль (целевая функция)</b>	
4	Прибыль от реализации продукции	8	10	7	8	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B4:E4)	
5							
6		<b>Ограничения</b>					
7		Расход ресурса на единицу продукции				<b>Ограничения по ресурсам</b>	<b>Запас ресурса</b>
8	Ресурсы	A	B	C	D		
9	Трудовые	8	3	4	4	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$E\$3;B9:E9)	800
10	Материальные	7	8	12	10	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$E\$3;B10:E10)	2000
11	Финансовые	15	14	13	14	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$E\$3;B11:E11)	2900
12	Нижняя граница выпуска	12		3			
13	Верхняя граница выпуска	30	25				



Остановимся подробно на добавлении ограничений в область В соответствии с ограничениями.

Все ограничения указаны в системе. Для добавления ограничения необходимо выбрать кнопку Добавить. Отобразится окно диалога Добавление ограничений.

Добавляем ограничения для неравенств:

$$8x_1 + 3x_2 + 4x_2 + 4x_2 \leq 800$$

$$7x_1 + 8x_2 + 12x_2 + 10x_2 \leq 2000$$

$$15x_1 + 14 + 13x_2 + 14x_2 \leq 2900$$



В поле Ссылка на ячейки указываем адрес диапазона F9:F11, выбираем в раскрывающемся списке знак неравенства  $\leq$ , в поле Ограничение выделяем диапазон G9:G11 и нажимаем кнопку Добавить. Результатом этого действия будет добавление текущего ограничения в список ограничений, поля окна Добавление ограничения будут очищены для ввода следующего ограничения.

Добавление ограничения

Ссылка на ячейки:    $\leq$   

Порядок ввода ограничений не имеет значения. Главное — не забыть ни одно из ограничений.



Ограничения  $x_2 \geq 0$  и  $x_4 \geq 0$  можно не добавлять, т. к. в окне Параметры поиска решения установлен флажок в поле Сделать переменные **без ограничений неотрицательными**.

Для принятия последнего ограничения и возврата к диалоговому окну.

Параметры поиска решения нажмем кнопку ОК.  
После указания всех необходимых параметров в диалоговое окно Параметры поиска решения примет

вид



Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

\$F\$4

До:

Максимум

Минимум

Значения:

0

Изменяя ячейки переменных:

\$B\$3:\$E\$3

В соответствии с ограничениями:

\$B\$3 <= 30  
\$B\$3 >= 12  
\$C\$3 <= 25  
\$D\$3 >= 3  
\$F\$9:\$F\$11 <= \$G\$9:\$G\$11

Добавить

Изменить

Удалить

Сбросить

Загрузить/сохранить

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Поиск решения линейных задач симплекс-методом

Параметры

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Справка

Найти решение

Закреть



На вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения.

На экране отобразится диалоговое окно

Параметры поиска решения, в котором установим следующие параметры:

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До:  Максимум  Минимум  Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

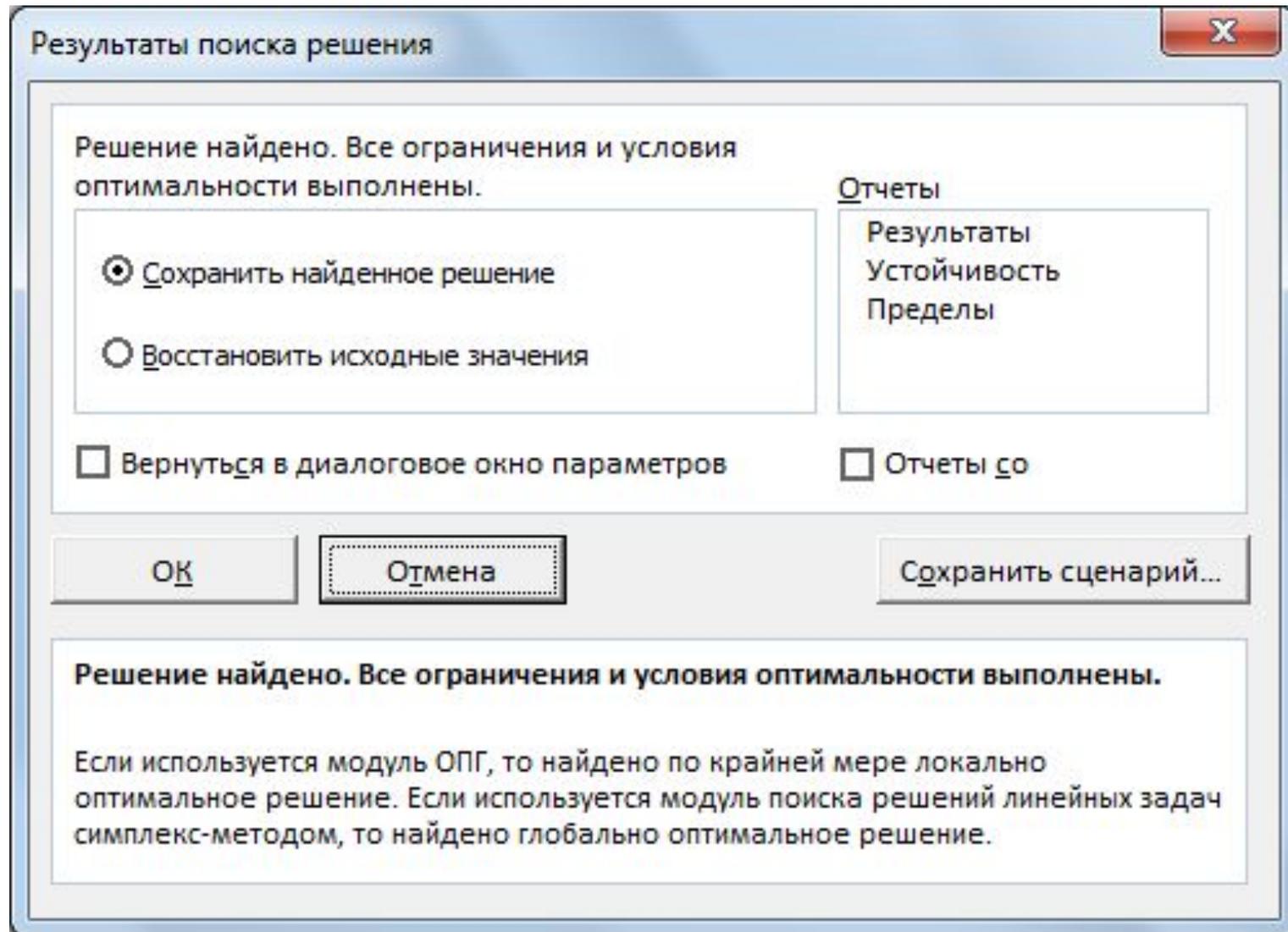
Выберите метод решения:

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

- в поле Оптимизировать целевую функцию указываем адрес ячейки со значением целевой функции – F4;
- выбираем нахождение максимума целевой функции;
  - в поле Изменяя ячейки переменных указываем адреса ячеек со значениями искомым переменных B3:E3;
  - в области B соответствии с ограничениями с помощью кнопки Добавить размещаем все ограничения задачи (добавление ограничений будет рассмотрено ниже);
  - установим флажок в поле Сделать переменные без ограничений неотрицательными;
  - в списке Выберите метод решения указываем Поиск решения линейных задач симплекс-методом;
  - нажимаем кнопку Найти решение.

После выбора кнопки Найти решение отобразится окно Результаты поиска решения.



Для сохранения полученного решения необходимо установить переключатель Сохранить найденное решение и нажать кнопку ОК. После чего на рабочем листе отобразится решение задачи.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Продукция</b>						
2		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		
3	Объем выпускаемой продукции	12,00	25,00	3,00	154,25	Прибыль (целевая функция)	
4	Прибыль от реализации продукции	8	10	7	8	1601	
5							
6	<b>Ограничения</b>						
7		Расход ресурса на единицу продукции				<b>Ограничения по ресурсам</b>	<b>Запас ресурса</b>
8	Ресурсы	A	B	C	D		
9	Трудовые	8	3	4	4	800,0	800
10	Материальные	7	8	12	10	1862,5	2000
11	Финансовые	15	14	13	14	2728,5	2900
12	Нижняя граница выпуска	12		3			
13	Верхняя граница выпуска	30	25				

Таким образом, максимальная прибыль при реализации продукции будет получена в размере 1601 д. е. при следующем плане производства:

12,00 – объем продукции типа А;

25,00 – объем продукции типа В;

3,00 – объем продукции типа С;

124,25 – объем продукции типа D;



Кроме вставки оптимальных значений в изменяемые ячейки, Поиск решения позволяет представлять результаты в виде трех отчетов: Результаты, Устойчивость и Пределы. Для генерации одного или нескольких отчетов необходимо выделить их названия в окне диалога Результаты поиска решения. Для выбора нескольких отчетов из списка использовать клавишу Shift.



Отчет по результатам содержит три таблицы: в первой приведены сведения о целевой функции до начала вычисления и окончательное значение, во второй – значения искомым переменных: исходные и полученные в результате решения задачи, в третьей – результаты оптимального решения для ограничений. Этот отчет также содержит информацию о таких параметрах каждого ограничения, как состояние и допуск. Состояние принимает значение «Привязка», если вводимые ограничения совпадают с ограничениями, полученными в результате вычислений, и значение «Без привязки» в противном случае.



По значениям столбца **Допуск** можно сделать вывод о недоиспользованных ресурсах. В рассматриваемой задаче трудовые ресурсы были использованы полностью (значение в столбце **Допуск** равно 0), материальные ресурсы использованы не полностью (недоиспользованными оказались 137,5 единиц), также недоиспользовано 171,5 ед. финансовых ресурсов.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J																																																							
1	Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах																																																																
2	Лист: [Поиск решения.xlsx]Решение																																																																
3	Отчет создан: 28.11.2015 23:22:17																																																																
4	Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.																																																																
5	Модуль поиска решения																																																																
6	Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом																																																																
7	Время решения: 0,016 секунд.																																																																
8	Число итераций: 4 Число подзадач: 0																																																																
9	Параметры поиска решения																																																																
10	Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование																																																																
11	Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными																																																																
12																																																																	
13																																																																	
14	Ячейка целевой функции (Максимум)																																																																
15	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Ячейка</th> <th>Имя</th> <th>Исходное значение</th> <th>Окончательное значение</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$F\$4</td> <td>Прибыль от реализации продукции</td> <td>Прибыль (целевая функция)</td> <td>0</td> <td>1601</td> </tr> </tbody> </table>											Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	\$F\$4	Прибыль от реализации продукции	Прибыль (целевая функция)	0	1601																																													
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение																																																														
\$F\$4	Прибыль от реализации продукции	Прибыль (целевая функция)	0	1601																																																													
16																																																																	
17																																																																	
18																																																																	
19	Ячейки переменных																																																																
20	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Ячейка</th> <th>Имя</th> <th>Исходное значение</th> <th>Окончательное значение</th> <th>Целочисленное</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$B\$3</td> <td>Объем выпускаемой продукции x1</td> <td>0,00</td> <td>12,00</td> <td>Продолжить</td> </tr> <tr> <td>\$C\$3</td> <td>Объем выпускаемой продукции x2</td> <td>0,00</td> <td>25,00</td> <td>Продолжить</td> </tr> <tr> <td>\$D\$3</td> <td>Объем выпускаемой продукции x3</td> <td>0,00</td> <td>3,00</td> <td>Продолжить</td> </tr> <tr> <td>\$E\$3</td> <td>Объем выпускаемой продукции x4</td> <td>0,00</td> <td>154,25</td> <td>Продолжить</td> </tr> </tbody> </table>											Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное	\$B\$3	Объем выпускаемой продукции x1	0,00	12,00	Продолжить	\$C\$3	Объем выпускаемой продукции x2	0,00	25,00	Продолжить	\$D\$3	Объем выпускаемой продукции x3	0,00	3,00	Продолжить	\$E\$3	Объем выпускаемой продукции x4	0,00	154,25	Продолжить																													
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное																																																													
\$B\$3	Объем выпускаемой продукции x1	0,00	12,00	Продолжить																																																													
\$C\$3	Объем выпускаемой продукции x2	0,00	25,00	Продолжить																																																													
\$D\$3	Объем выпускаемой продукции x3	0,00	3,00	Продолжить																																																													
\$E\$3	Объем выпускаемой продукции x4	0,00	154,25	Продолжить																																																													
21																																																																	
22																																																																	
23																																																																	
24																																																																	
25																																																																	
26																																																																	
27	Ограничения																																																																
28	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Ячейка</th> <th>Имя</th> <th>Значение ячейки</th> <th>Формула</th> <th>Состояние</th> <th>Допуск</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$F\$9</td> <td>Трудовые Ограничения по ресурсам</td> <td>800,0</td> <td>\$F\$9&lt;=\$G\$9</td> <td>Привязка</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>\$F\$10</td> <td>Материальные Ограничения по ресурсам</td> <td>1862,5</td> <td>\$F\$10&lt;=\$G\$10</td> <td>Без привязки</td> <td>137,5</td> </tr> <tr> <td>\$F\$11</td> <td>Финансовые Ограничения по ресурсам</td> <td>2728,5</td> <td>\$F\$11&lt;=\$G\$11</td> <td>Без привязки</td> <td>171,5</td> </tr> <tr> <td>\$B\$3</td> <td>Объем выпускаемой продукции x1</td> <td>12,00</td> <td>\$B\$3&lt;=30</td> <td>Без привязки</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td>\$B\$3</td> <td>Объем выпускаемой продукции x1</td> <td>12,00</td> <td>\$B\$3&gt;=12</td> <td>Привязка</td> <td>0,00</td> </tr> <tr> <td>\$C\$3</td> <td>Объем выпускаемой продукции x2</td> <td>25,00</td> <td>\$C\$3&lt;=25</td> <td>Привязка</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>\$D\$3</td> <td>Объем выпускаемой продукции x3</td> <td>3,00</td> <td>\$D\$3&gt;=3</td> <td>Привязка</td> <td>0,00</td> </tr> <tr> <td>\$E\$3</td> <td>Объем выпускаемой продукции x4</td> <td>154,25</td> <td>\$E\$3&gt;=0</td> <td>Без привязки</td> <td>154,25</td> </tr> </tbody> </table>											Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск	\$F\$9	Трудовые Ограничения по ресурсам	800,0	\$F\$9<=\$G\$9	Привязка	0	\$F\$10	Материальные Ограничения по ресурсам	1862,5	\$F\$10<=\$G\$10	Без привязки	137,5	\$F\$11	Финансовые Ограничения по ресурсам	2728,5	\$F\$11<=\$G\$11	Без привязки	171,5	\$B\$3	Объем выпускаемой продукции x1	12,00	\$B\$3<=30	Без привязки	18	\$B\$3	Объем выпускаемой продукции x1	12,00	\$B\$3>=12	Привязка	0,00	\$C\$3	Объем выпускаемой продукции x2	25,00	\$C\$3<=25	Привязка	0	\$D\$3	Объем выпускаемой продукции x3	3,00	\$D\$3>=3	Привязка	0,00	\$E\$3	Объем выпускаемой продукции x4	154,25	\$E\$3>=0	Без привязки	154,25
Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск																																																												
\$F\$9	Трудовые Ограничения по ресурсам	800,0	\$F\$9<=\$G\$9	Привязка	0																																																												
\$F\$10	Материальные Ограничения по ресурсам	1862,5	\$F\$10<=\$G\$10	Без привязки	137,5																																																												
\$F\$11	Финансовые Ограничения по ресурсам	2728,5	\$F\$11<=\$G\$11	Без привязки	171,5																																																												
\$B\$3	Объем выпускаемой продукции x1	12,00	\$B\$3<=30	Без привязки	18																																																												
\$B\$3	Объем выпускаемой продукции x1	12,00	\$B\$3>=12	Привязка	0,00																																																												
\$C\$3	Объем выпускаемой продукции x2	25,00	\$C\$3<=25	Привязка	0																																																												
\$D\$3	Объем выпускаемой продукции x3	3,00	\$D\$3>=3	Привязка	0,00																																																												
\$E\$3	Объем выпускаемой продукции x4	154,25	\$E\$3>=0	Без привязки	154,25																																																												
29																																																																	
30																																																																	
31																																																																	
32																																																																	
33																																																																	
34																																																																	
35																																																																	
36																																																																	

Отчет по устойчивости содержит два блока: Ячейки переменных и Ограничения. Первый блок содержит информацию по допустимому увеличению и уменьшению коэффициентов целевой функции при условии, что объем оптимальной продукции не изменится. Второй блок касается увеличения и уменьшения значений ограничений.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости							
2	Лист: [Поиск решения.xlsx]Решение							
3	Отчет создан: 29.11.2015 12:15:28							
4								
5								
6	Ячейки переменных							
7			Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое	
8	Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение	
9	\$B\$3	Объем выпускаемой продукции x1	12	-8	8	8	1E+30	
10	\$C\$3	Объем выпускаемой продукции x2	25	4	10	1E+30	4	
11	\$D\$3	Объем выпускаемой продукции x3	3	-1	7	1	1E+30	
12	\$E\$3	Объем выпускаемой продукции x4	154,25	0	8	5,333333333	1	
13								
14	Ограничения							
15			Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое	
16	Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение	
17	\$F\$9	Трудовые Ограничения по ресурсам	800	2	800	49	617	
18	\$F\$10	Материальные Ограничения по ресурсам	1862,5	0	2000	1E+30	137,5	
19	\$F\$11	Финансовые Ограничения по ресурсам	2728,5	0	2900	1E+30	171,5	



Отчет по пределам содержит информацию о том, в каких пределах значения изменяемых ячеек могут быть увеличены или уменьшены без нарушения ограничений задачи. Для каждой изменяемой ячейки этот отчет содержит оптимальное значение, а также наименьшие значения, которые ячейка может принимать без нарушения ограничений.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах									
2	Лист: [Поиск решения.xlsx]Решение									
3	Отчет создан: 29.11.2015 13:36:00									
4										
5										
6	<b>Целевая функция</b>									
7	<b>Ячейка</b>	<b>Имя</b>	<b>Значение</b>							
8	\$F\$4	Прибыль от р	1601							
9										
10										
11	<b>Переменная</b>			<b>Нижний</b>	<b>Целевая функция</b>		<b>Верхний</b>	<b>Целевая функция</b>		
12	<b>Ячейка</b>	<b>Имя</b>	<b>Значение</b>	<b>Предел</b>	<b>Результат</b>		<b>Предел</b>	<b>Результат</b>		
13	\$B\$3	Объем выпуск	12,00	12,00	1601,00		12,00	1601,00		
14	\$C\$3	Объем выпуск	25,00	0,00	1351,00		25,00	1601,00		
15	\$D\$3	Объем выпуск	3,00	3,00	1601,00		3,00	1601,00		
16	\$E\$3	Объем выпуск	154,25	0,00	367,00		154,25	1601,00		



## Индивидуальное задание

Найдите решение задачи оптимизации, условие которой приведено выше при изменении начальных параметров, согласно своему варианту:

1. Постройте модель задачи;
2. Оформите рабочий лист для решения задачи;
3. Найдите решение с помощью инструмента Поиск решения;
4. Исследуйте решение модели на устойчивость;
5. Сделайте выводы о результатах найденного решения и проведенного анализа.

