Дом. : РАЗОБРАТЬ ВСЕ ПРИМЕРЫ В ПРЕЗЕНТАЦИИ,Решу ЕГЭ.№ 7, (3, ТАМ 30 ЗАД.) будет с.р. (геом. и прим. производной)

Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы

Применение производной к исследованию функции

1. Промежутки монотонности

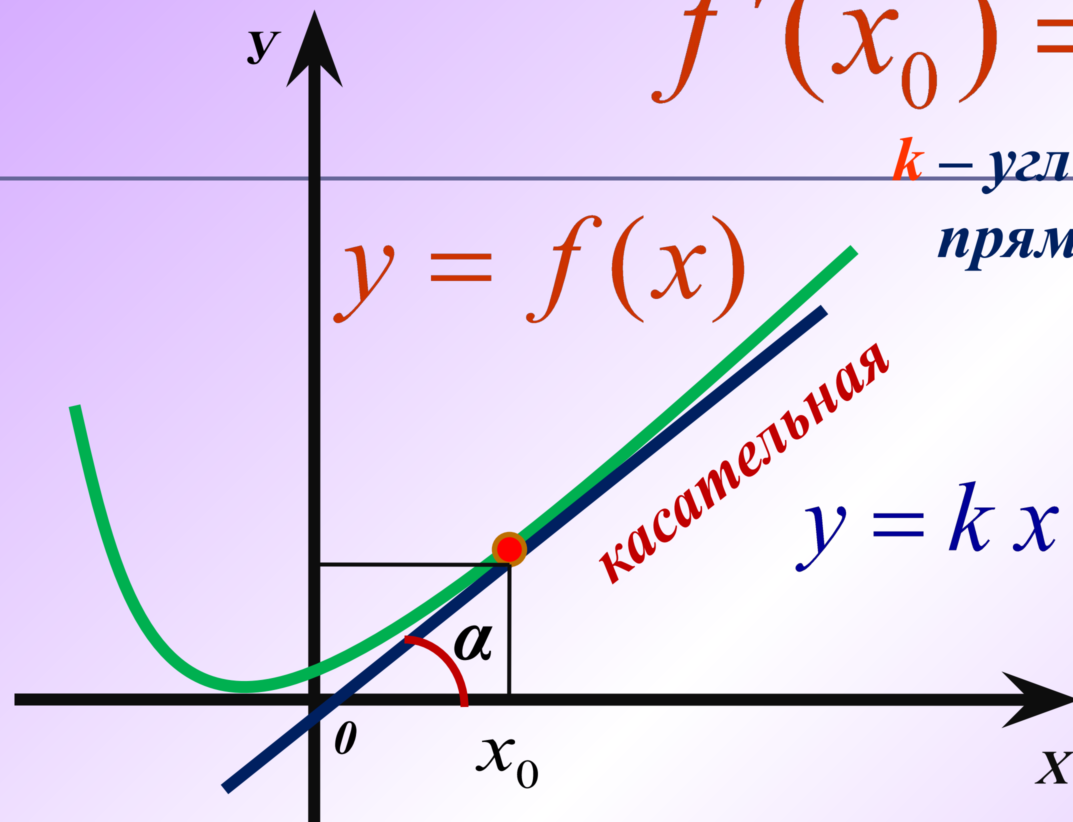
2. Точки экстремума и значение функции в этих точках

3. Наибольшее и наименьшее значение функции

4. Построение графика функции

$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой (касательной)



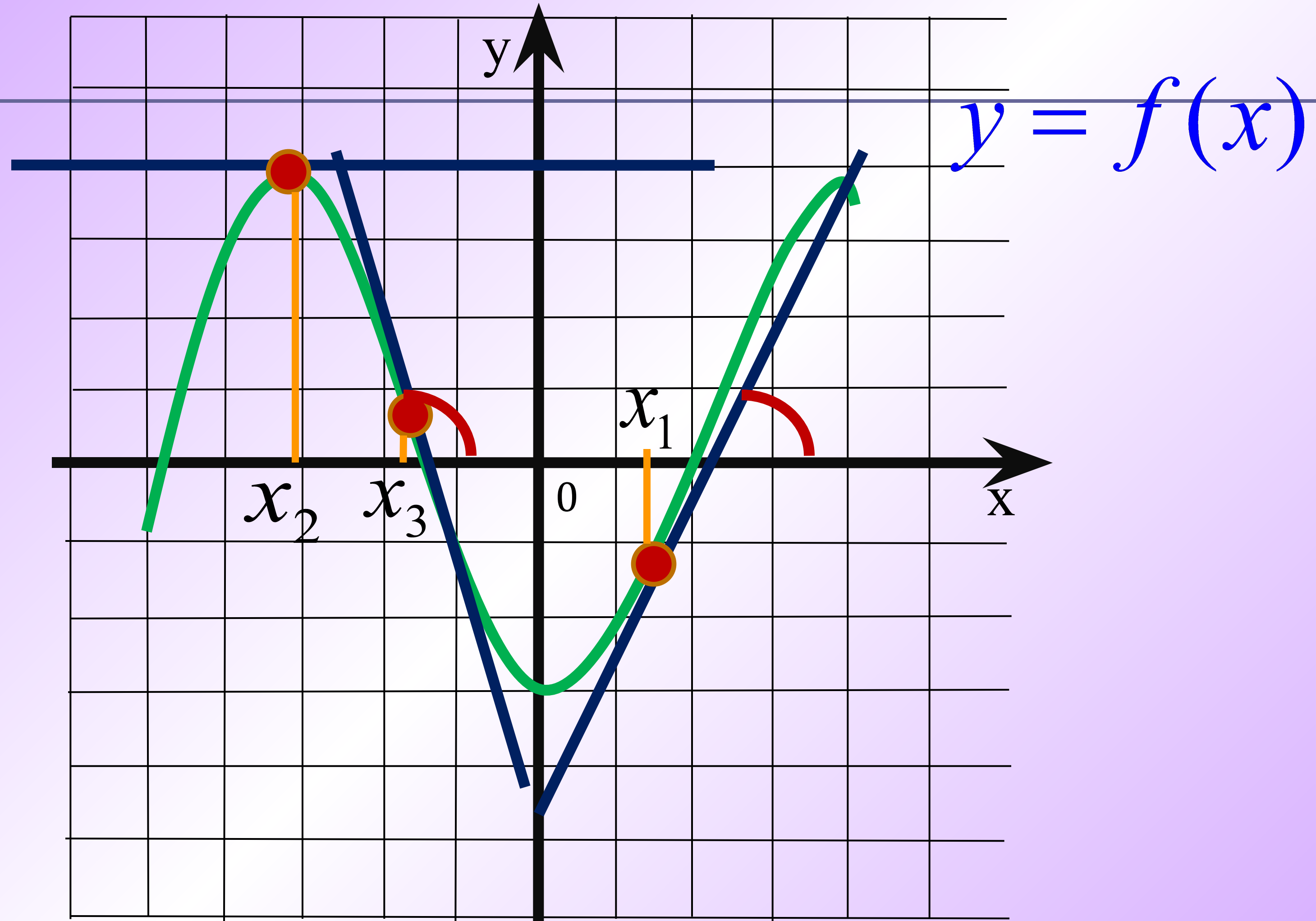
$$y = kx + b$$

***Геометрический смысл производной:* если к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x_0 можно провести касательную, непараллельную оси у, то $f'(x_0)$ выражает угловой коэффициент касательной, т.е.**

$$f'(x_0) = k$$

Поскольку ***, то верно равенство*** $f'(x_0) = tg\alpha$

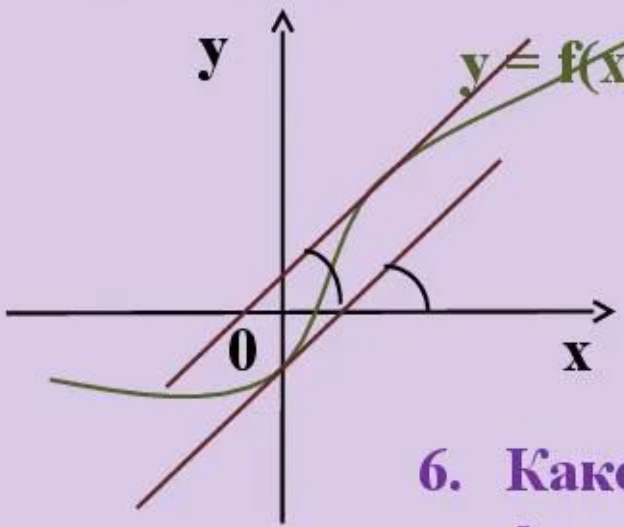
Если α < 90°, то k > 0. **Если α > 90°, то k < 0.**



Если α = 0°, то k = 0.

Касательная параллельна оси OX.

3. Как направлен график возрастающей функции?



4. Под каким углом к положительному направлению оси абсцисс расположена касательная к графику?

5. Какой знак имеет угловой коэффициент касательной к графику данной функции?

6. Какой знак имеет производная данной функции на заданном промежутке?

Вывод. Если на заданном промежутке функция возрастает, то производная на этом промежутке положительна.

Обратно. Если на заданном промежутке производная положительна, то функция на этом промежутке возрастает.

Монотонность функции

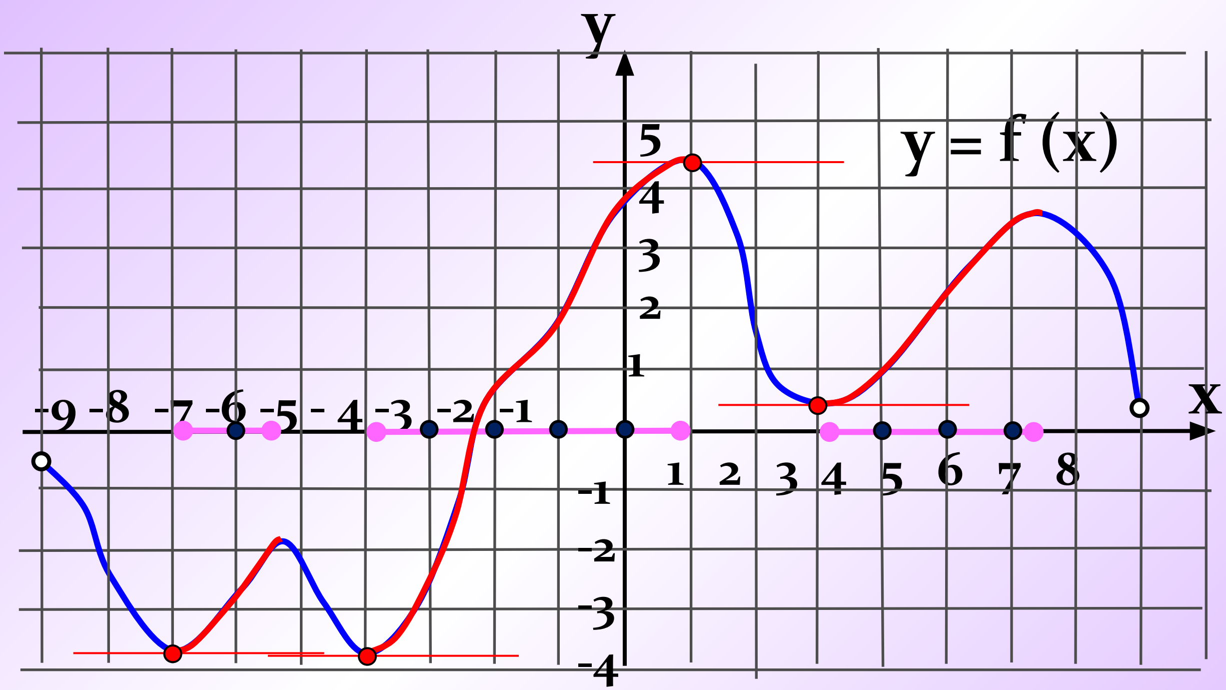
- Если производная функции y=f(x) ***положительна*** на некотором интервале, то функция в этом интервале ***монотонно возрастает***

- Если производная функции y=f(x) ***отрицательна*** на некотором интервале, то функция в этом интервале ***монотонно убывает***.

На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (-9; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решение: 1. $f'(x) > 0$, значит, функция возрастает. Найдем эти участки графика.

2. Найдем все целые точки на этих отрезках.

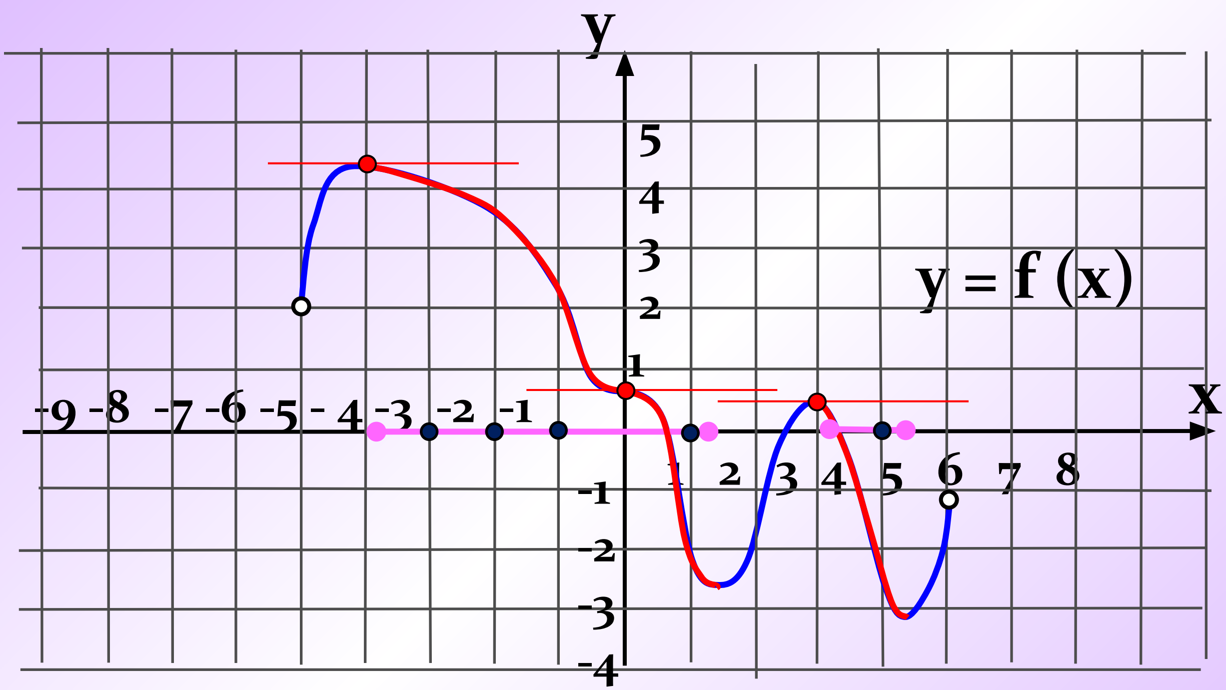


Ответ: 8

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-5; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Решение: 1. $f'(x) < 0$, значит, функция убывает. Найдем эти участки графика.

2. Найдем все целые точки на этих отрезках.



Ответ: 5

Точки экстремума

Если функция y=f(x) имеет экстремум в точке x=x0,
то в этой точке **производная** функции
или **равна нулю**, или **не существует**

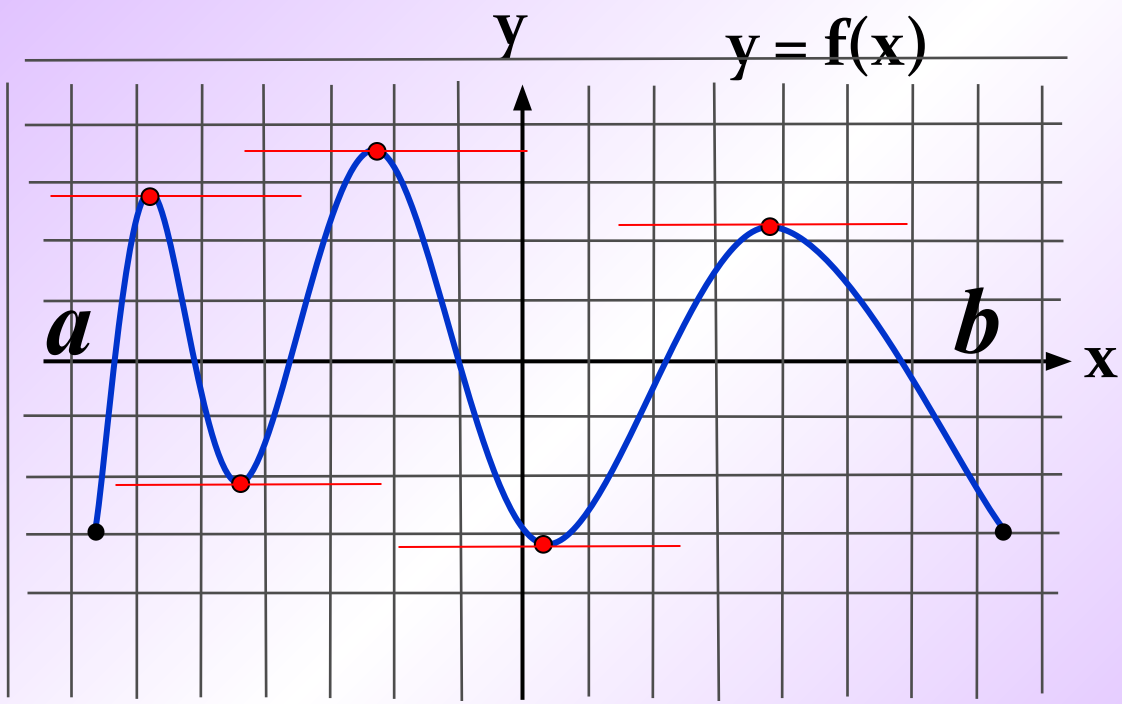
Стационарные точки

Критические точки

Касательная в таких точках графика параллельна оси OX

Касательная в таких точках графика не существует

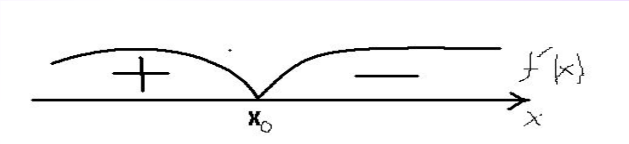
Непрерывная функция y = f(x) задана на отрезке [***a;b***]
На рисунке изображен ее график. В ответе укажите количество точек графика этой функции, в которых касательная параллельна оси Ох.



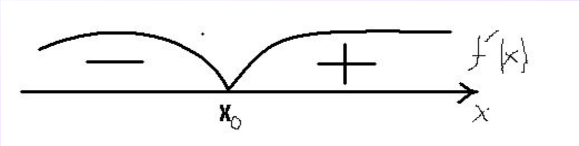
Ответ: 5

Достаточное условие существования экстремума функции:

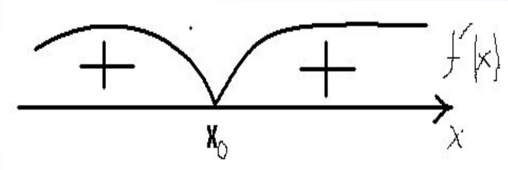
- Если при переходе через стационарную точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка максимума функции f(x).

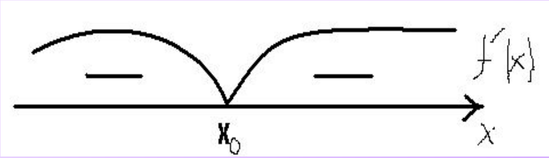


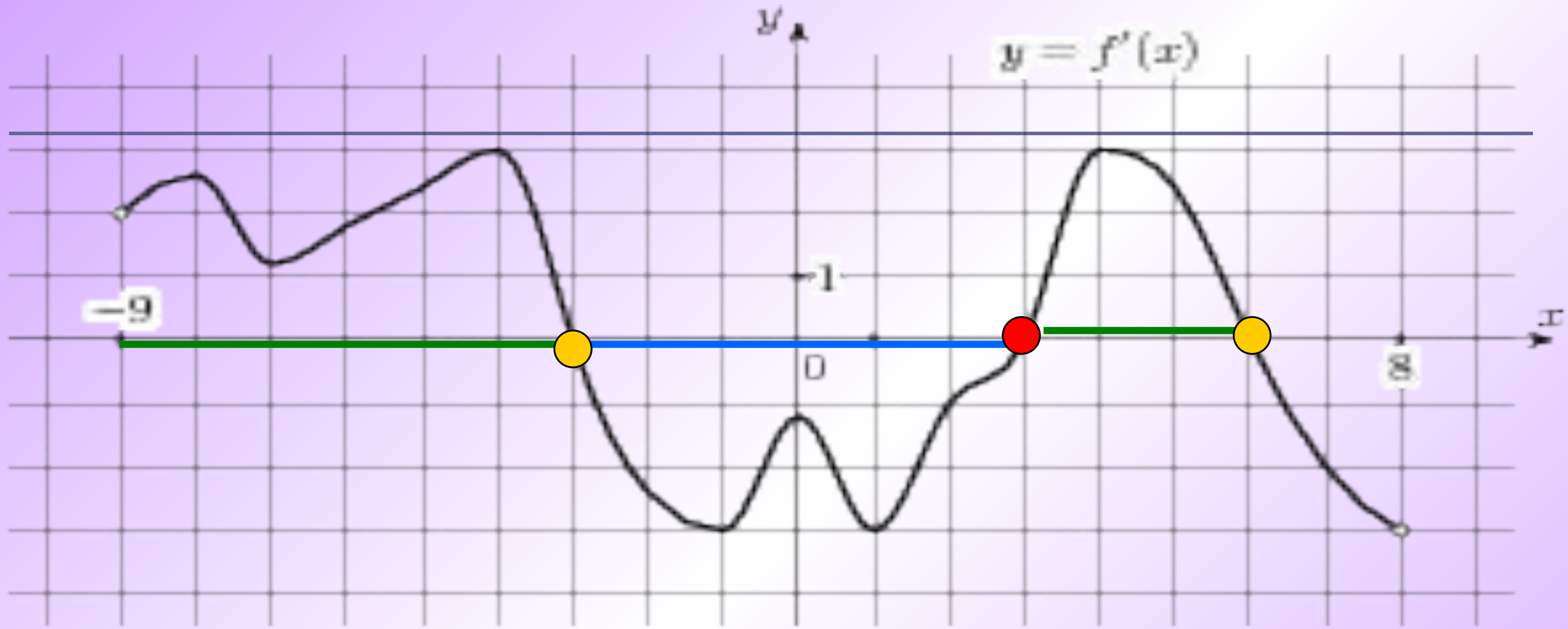
- Если при переходе через стационарную точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка минимума функции f(x).



- Если при переходе через стационарную точку x_0 функции f(x) ее производная не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.







Возрастает:

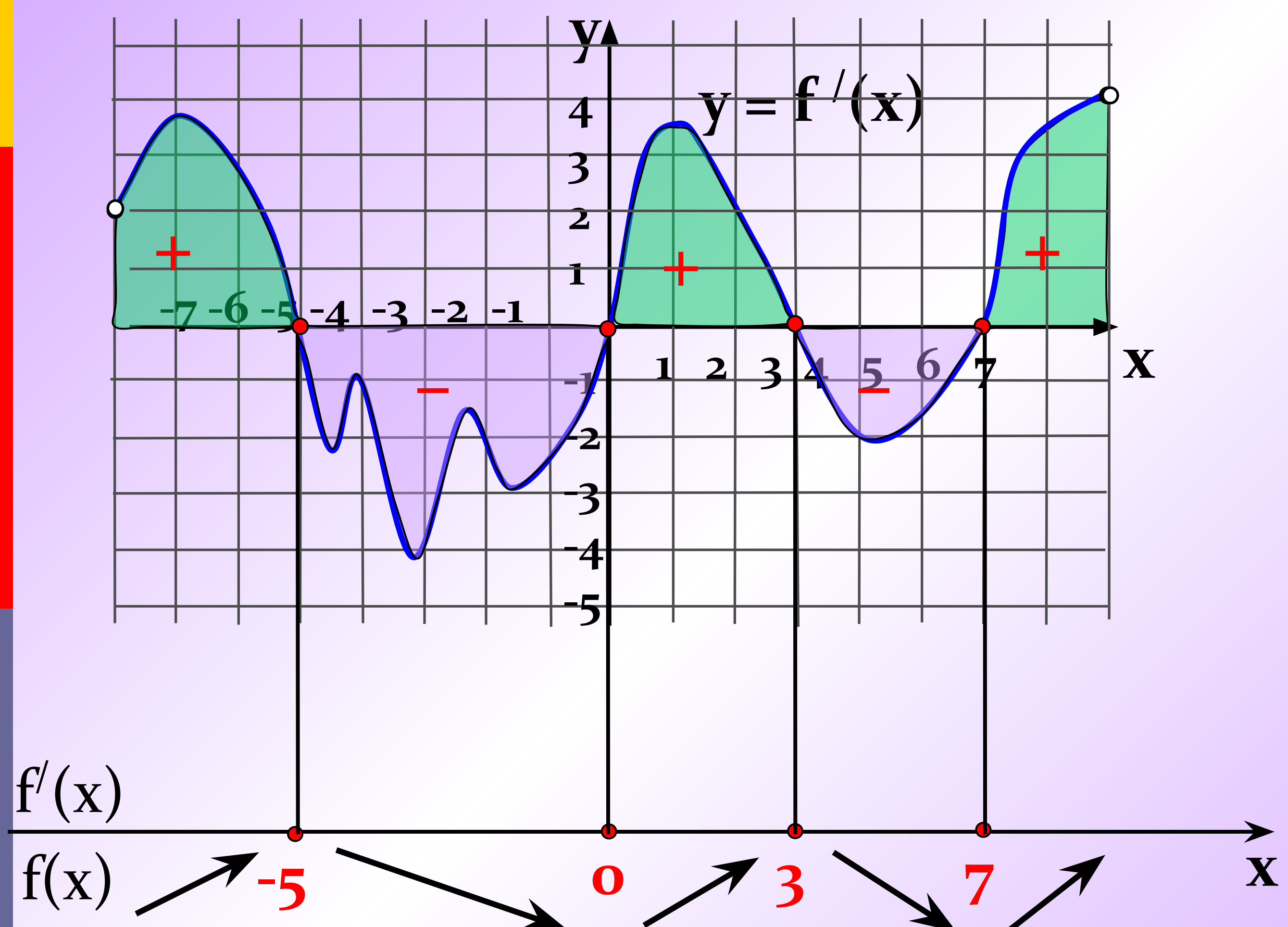
Убывает:

Максимум:

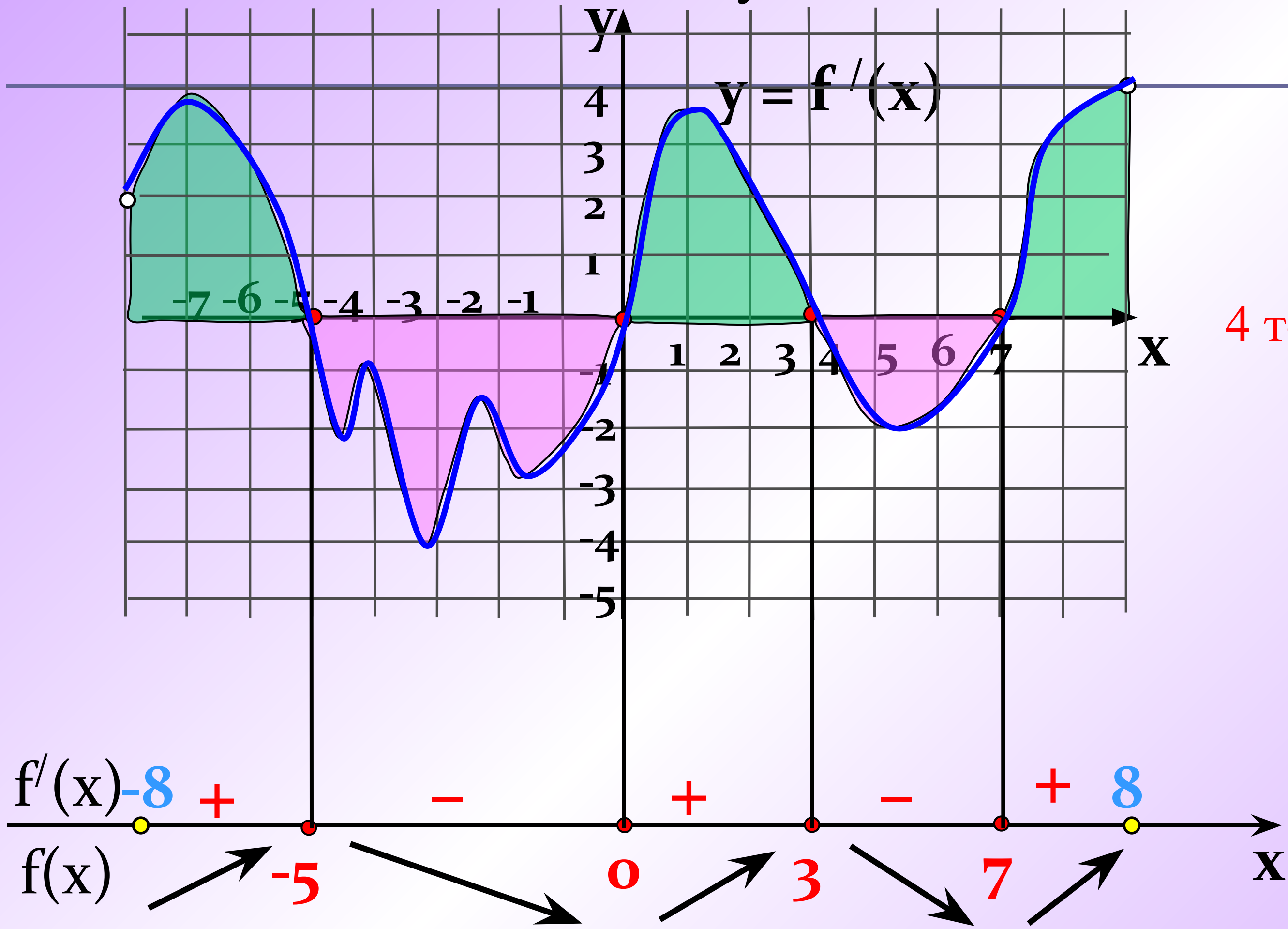
Минимум;

На рисунке изображен график производной функции у =f (x), заданной на промежутке (- 8; 8).

Найти точки, в которых $f^{/}(x)=0$ (это нули функции).



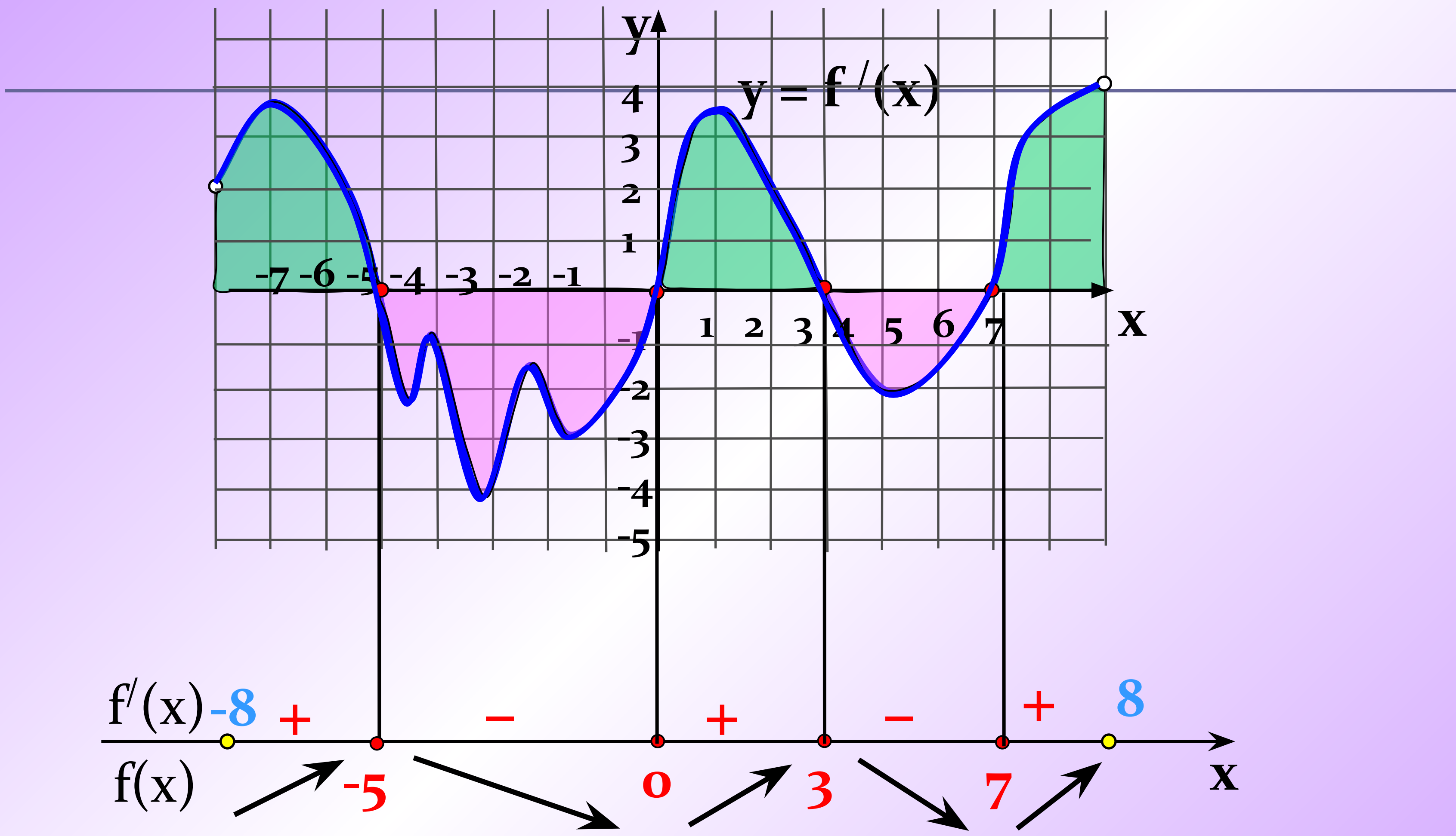
Исследуйте функцию y =f (x) на экстремум и укажите количество ее точек минимума.



4 точки экстремума

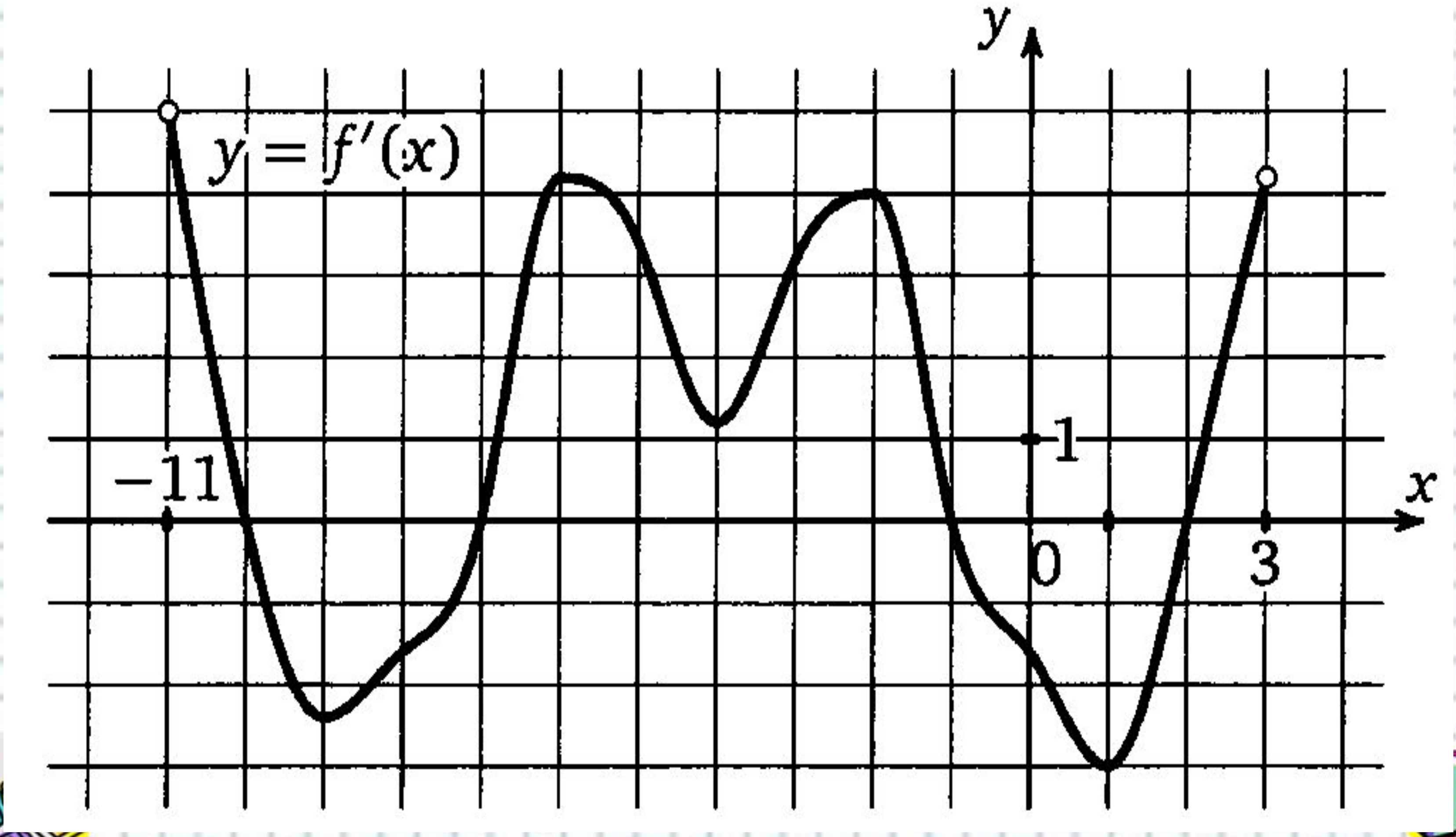
Ответ:2

Найдите количество точек экстремума функции y =f (x) на отрезке [– 3; 7]

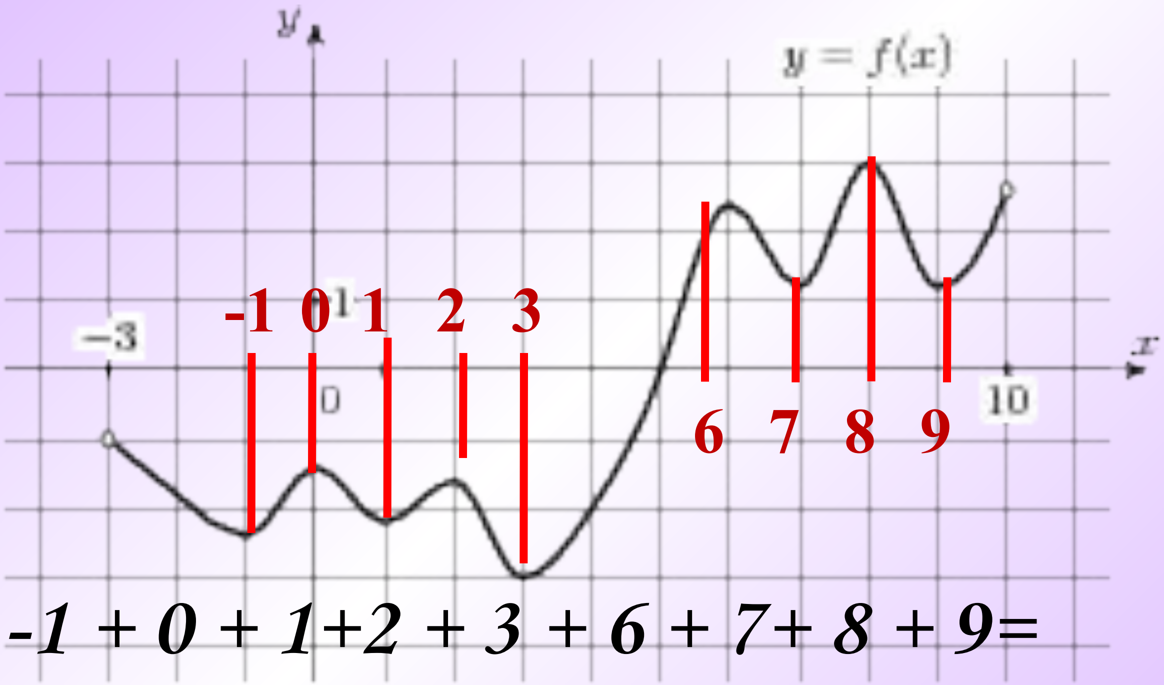


Ответ: 3

На рисунке изображен график производной функции y=f(x), определенной на интервале (- 11; 3). Найти промежутки возрастания функции. В ответе указать длину наибольшего из них



На рисунке изображен график функции f(x), определенной на интервале (-3;10) . Найдите сумму точек экстремума функции f(x) .



-1 + 0 + 1+2 + 3 + 6 + 7+ 8 + 9= 35

Ответ: 35

Исследование функции на монотонность

- Найти D(f) и исследовать на непрерывность функцию f (x).
- Найти производную f ´.
- Найти стационарные и критические точки функции f (x).
- Отметить промежутки знакопостоянства f ´. и промежутки монотонности функции f (x).

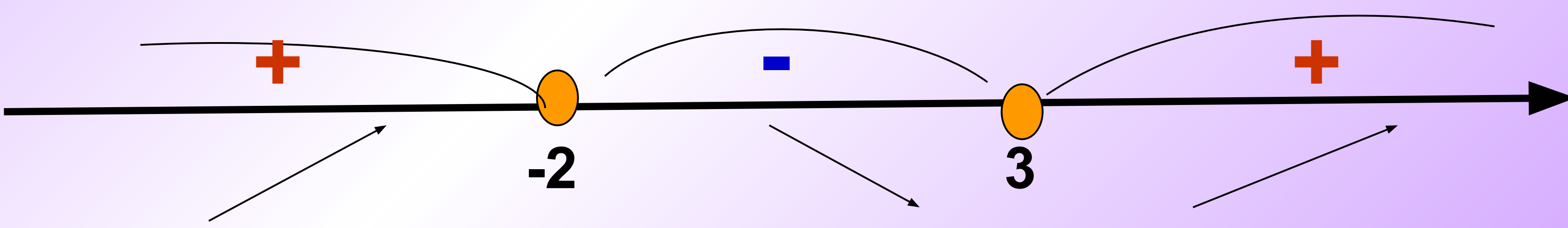
Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$

1. **Область определения**: R. Функция непрерывна.
2. **Вычисляем производную :** $y'=6x^2-6x-36$.
3. **Находим стационарные точки:** $y'=0$.

$$x^2-x-6=0$$

$$Д=1-4*(-6)*1=1+24=25$$

$$x_1=\frac{1-5}{2}=-2 \qquad x_2=\frac{1+5}{2}=3$$



5.Функция возрастает при **x**$\in$ ***(-∞; -2)∪(3; +∞)***,

*функция **убывает** при* **x**$\in$ ***(-2; 3)***.

Найти промежутки монотонности функции $y=x^3-3x^2$

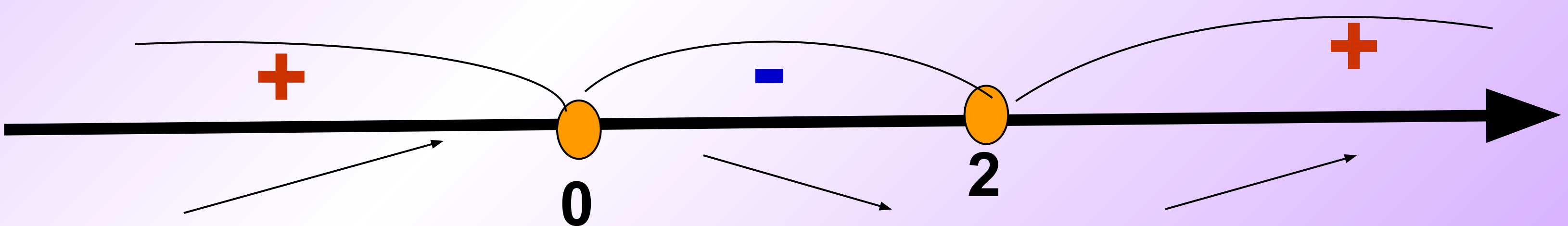
1. **Область определения**: R. Функция непрерывна.
2. **Вычисляем производную :** $y'=3x^2-6x$.
3. **Находим критические точки:** $y'=0$.

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$x_1=0 \text{ и } x_2=2$$

4. **Делим область определения на интервалы:**



5. **Функция возрастает** при $x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$,

функция **убывает** при $x\in[0;2]$.

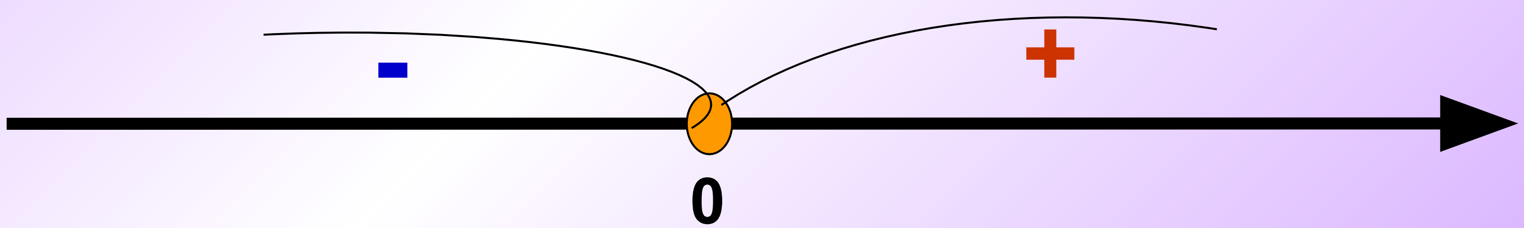
Алгоритм исследования функции f(x) на экстремум с помощью производной :

- Найти D(f) и исследовать на непрерывность функцию f (x).
- Найти производную f ´
- Найти стационарные и критические точки функции f(x) и на координатной прямой отметить промежутки знакопостоянства f ´.
- Посмотрев на рисунок знаков f ´, определить точки минимума и максимума функции и вычислить значения f(x) в этих точках.

Исследовать на экстремум функцию $y=x^2+2$.

Решение:

1. Находим область определения функции: D(y)=R.
2. Находим производную: $y'=(x^2+2)'=2x$.
3. Приравниваем её к нулю: $2x=0$, откуда $x = 0$ – критическая точка.
4. Делим на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



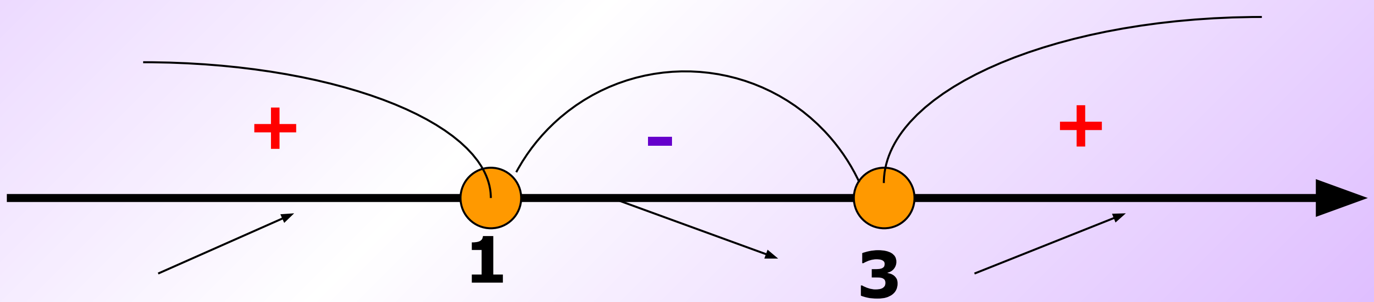
5. **x** =0 – точка минимума.

Найдём минимум функции $\mathbf{y}_{min}=2$.

Исследовать на экстремум функцию $y=1/3x^3-2x^2+3x+1$.

Решение:

1. Находим область определения функции: D(y)=R.
2. Находим производную: $y'=(1/3x^3-2x^2+3x+1)'=x^2-4x+3$.
3. Приравниваем её к нулю: $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$ – критические точки.
4. Делим на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



5. x=1 – точка максимума. Найдём максимум функции $y_{max}=7/3$.

x=3 – точка минимума. Найдём минимум функции: $y_{min}=1$.

Общая схема исследования функции

- Найти область определения функции f(x).
- Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование, то есть является ли функция f(x):

а) четной или нечетной;

б) периодической.

- Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.
- Найти промежутки знакопостоянства производной функции f(x) .
- Выяснить, на каких промежутках функция f (x) возрастает, а на каких убывает.
- Найти точки экстремума (максимум или минимум) и вычислить значения f (x) в этих точках.
- Исследовать поведение функции f (x) в окрестности характерных точек не входящих в область определения.
- Построить график функции.

Исследовать функцию $f(x)=x^4-2x^2-3$

- **Область определения**: **D (f)=R**

- **Четность – нечетность функции**:

$f(-x)=x^4-2x^2-3$,

значит f (-x) = f (x) для любого x, принадлежащего D (f) – функция является чётной.

- **Координаты точек пересечения графика с осями координат**

с ось Оу: $f(x)=0$: $(x^2-3)(x^2+1)=0$; $x=\pm\sqrt{3}$;

с осью Ох: $f(0)=-3$

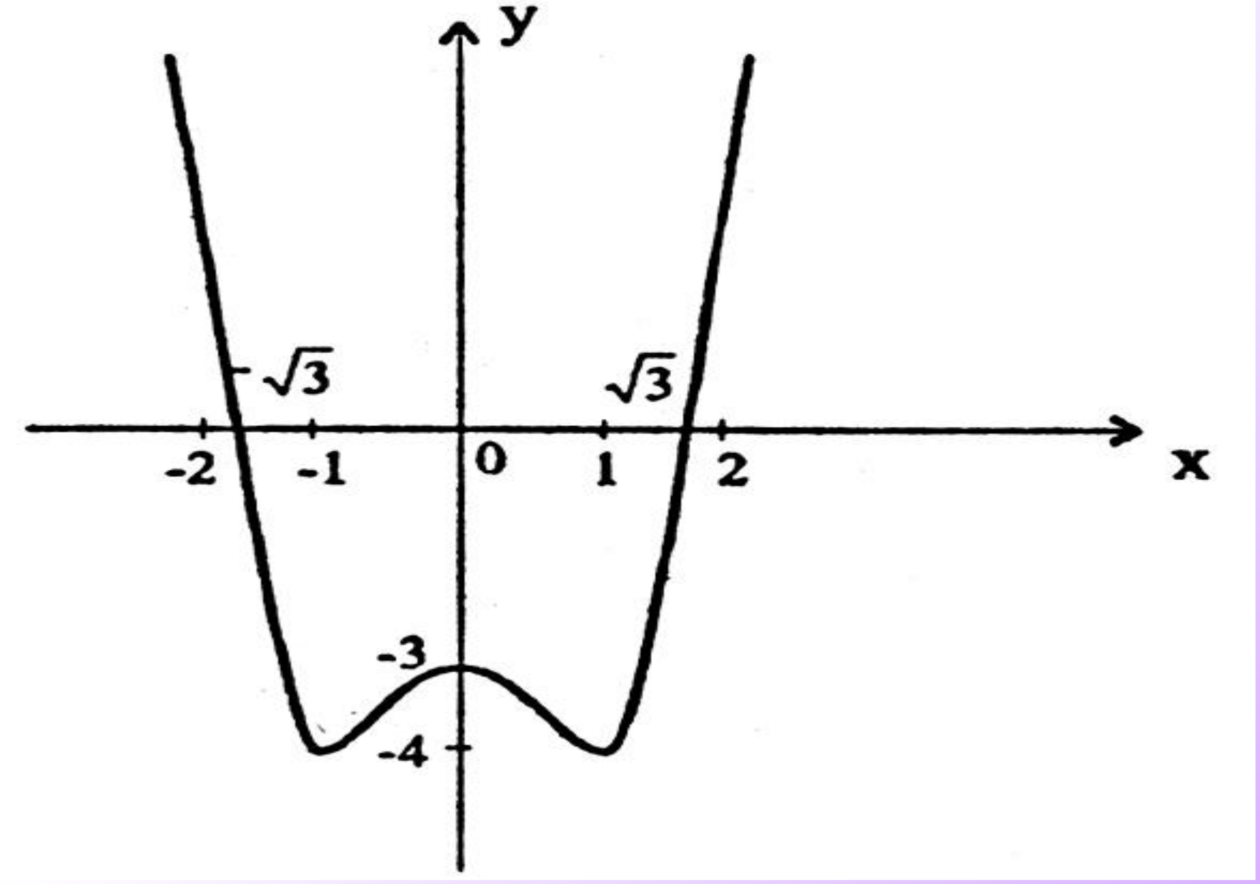
- **Промежутки знакопостоянства производной f'.**
- **$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)=0$ ⇒ $x = -1; 0; 1$.**

- Промежутки монотонности функция f(x).

- Точки экстремума и значения f в этих точках.
- Составить таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		-4		-3		-4	
		min		*max*		*min*	

❑ Построить график функции.



Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f(x) на отрезке [a;b]

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции f(x) на промежутке [a;b], <u>нужно</u>

- вычислить её значения f(a) и f(b) на концах данного промежутка;
- вычислить её значения в точках экстремума, принадлежащих этому промежутку;
- Выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Записывают : $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$.

1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{8}$, $f(2) = 9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$, $3x^4 - 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Интервалу $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ принадлежит одна стационарная точка $x_1 = 1$, $f(1) = 4$.

3) Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

Ответ Наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.