

В конечных разностях уравнение (4) имеет вид:

$$\overline{\tau_{xx}} + \overline{\tau_{yy}} = 0,$$

где $\overline{\tau_{xx}}$ и $\overline{\tau_{yy}}$ — вторые конечные разности функции τ соответственно по x и по y .

Выписывая их подробно, получим (рис. 20):

$$\frac{1}{\Delta^2} (\tau_{x+\Delta,y} - 2\tau_{x,y} + \tau_{x-\Delta,y}) + \frac{1}{\Delta^2} (\tau_{x,y+\Delta} - 2\tau_{x,y} + \tau_{x,y-\Delta}) = 0,$$

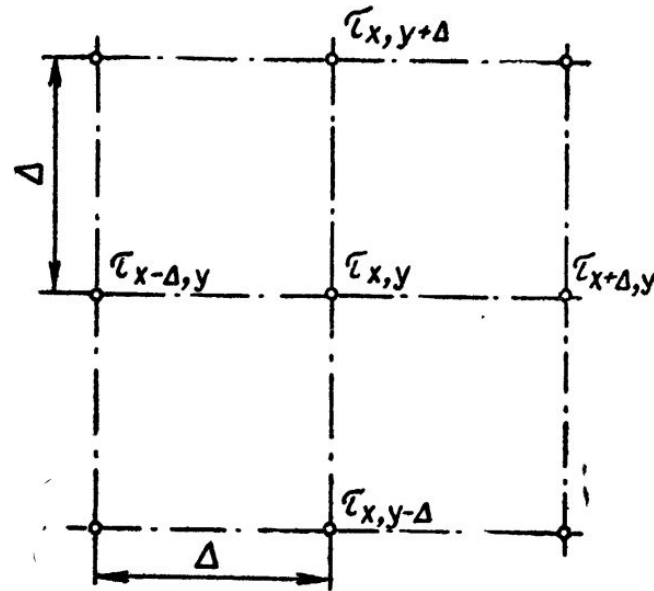


Рис. 20. Схема для расчета плоского температурного поля при наложении квадратной сетки

откуда, решая полученное уравнение относительно $\tau_{x,y}$, будем иметь:

$$\tau_{x,y} = \frac{\tau_{x+\Delta,y} + \tau_{x-\Delta,y} + \tau_{x,y+\Delta} + \tau_{x,y-\Delta}}{4}, \quad (32)$$

т. е. в однородном поле температура в каждом узле сетки должна равняться средней арифметической температур четырех соседних узлов.

Если поле неоднородно, т. е. в нем имеются материалы с различными коэффициентами теплопроводности, поступаем следующим образом. Накладываем на исследуемую конструкцию квадратную сетку с расстояниями между ее узлами Δ таким образом, чтобы узлы сетки располагались по возможности в тех точках, в которых требуется определять температуру. Кроме того, направление одних нитей сетки должно быть параллельным, а других — перпендикулярным основному направлению теплового потока. На рис. 21 приведен пример наложения сетки на стальную колонну двутаврового сечения. Вертикальные нити сетки направлены параллельно оси колонны; одна из горизонтальных нитей совпадает с наружной поверхностью полки двутавра.

Рассмотрим узел с температурой $\tau_{x,y}$. Квадрат, в центре которого находится этот узел, получает (или отдает) тепло в направлении к точкам, расположенным в четырех соседних узлах сетки, имеющих температуры $\tau_{x-\Delta,y}$, $\tau_{x,y+\Delta}$, $\tau_{x+\Delta,y}$ и $\tau_{x,y-\Delta}$. Количество тепла, которым обменивается с окружающим материалом квадрат, вырезанный вокруг точки x, y , будет зависеть не только от температуры соседних узлов, но и от величины коэффициентов теплопередачи в направлении нитей сетки между точкой x, y и этими точками. Обозначив коэффициенты теплопередачи буквами k с соответствующими индексами, получим:

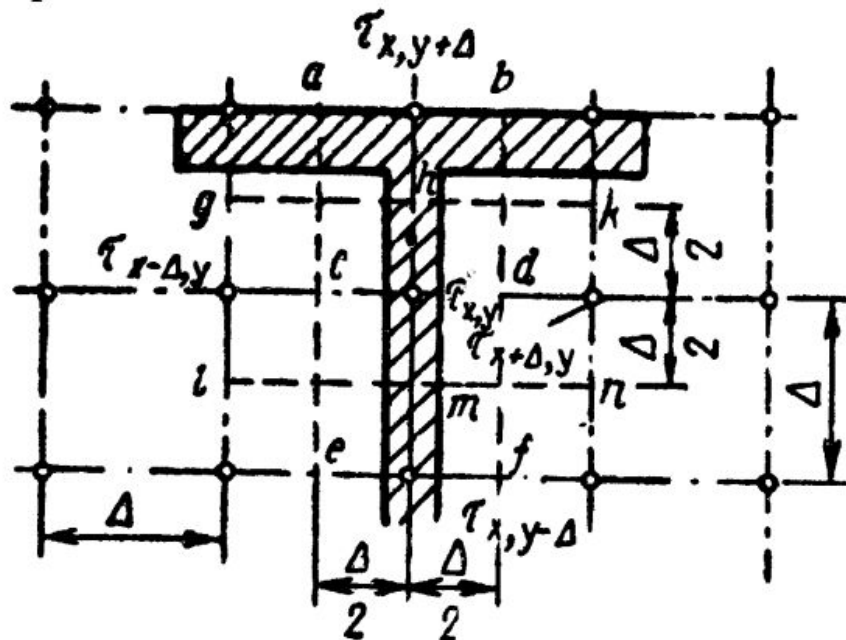


Рис. 21. Схема наложения квадратной сетки при расчете температурного поля колонны двутаврового сечения

количество тепла, передаваемого в направлении от узла x, y к узлу с температурой $\tau_{x-\Delta, y}$;

$$Q_1 = (\tau_{x, y} - \tau_{x-\Delta, y}) k_{x-\Delta};$$

количество тепла, передаваемого в направлении от узла x, y к узлу с температурой $\tau_{x, y+\Delta}$;

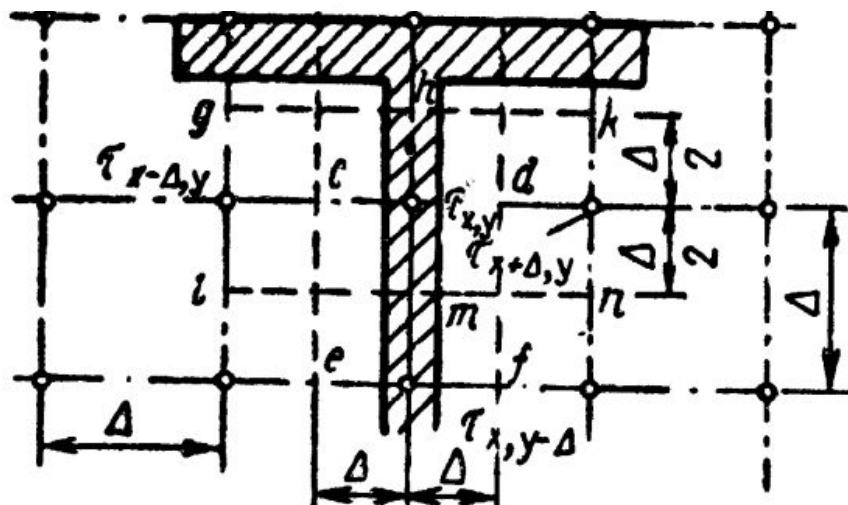
$$Q_2 = (\tau_{x, y} - \tau_{x, y+\Delta}) k_{y+\Delta};$$

количество тепла, передаваемого в направлении от узла x, y к узлу с температурой $\tau_{x+\Delta, y}$;

$$Q_3 = (\tau_{x, y} - \tau_{x+\Delta, y}) k_{x+\Delta};$$

количество тепла, передаваемого в направлении от узла x, y к узлу с температурой $\tau_{x, y-\Delta}$;

$$Q_4 = (\tau_{x, y} - \tau_{x, y-\Delta}) k_{y-\Delta}.$$



Из условия теплового баланса сумма этих количеств тепла должна быть равна нулю, т. е.

$$\begin{aligned} (\tau_{x,y} - \tau_{x-\Delta,y}) k_{x-\Delta} + (\tau_{x,y} - \tau_{x,y+\Delta}) k_{y+\Delta} + (\tau_{x,y} - \tau_{x+\Delta,y}) k_{x+\Delta} + \\ + (\tau_{x,y} - \tau_{x,y-\Delta}) k_{y-\Delta} = 0. \end{aligned}$$

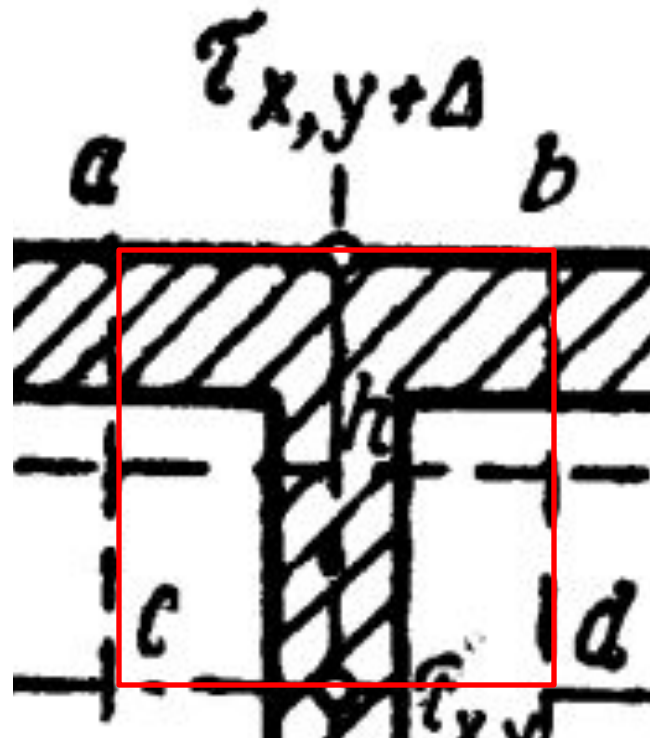
Решая это уравнение относительно $\tau_{x,y}$, получим окончательно

$$\tau_{x,y} = \frac{k_{x-\Delta} \tau_{x-\Delta,y} + k_{y+\Delta} \tau_{x,y+\Delta} + k_{x+\Delta} \tau_{x+\Delta,y} + k_{y-\Delta} \tau_{x,y-\Delta}}{k_{x-\Delta} + k_{y+\Delta} + k_{x+\Delta} + k_{y-\Delta}}. \quad (33)$$

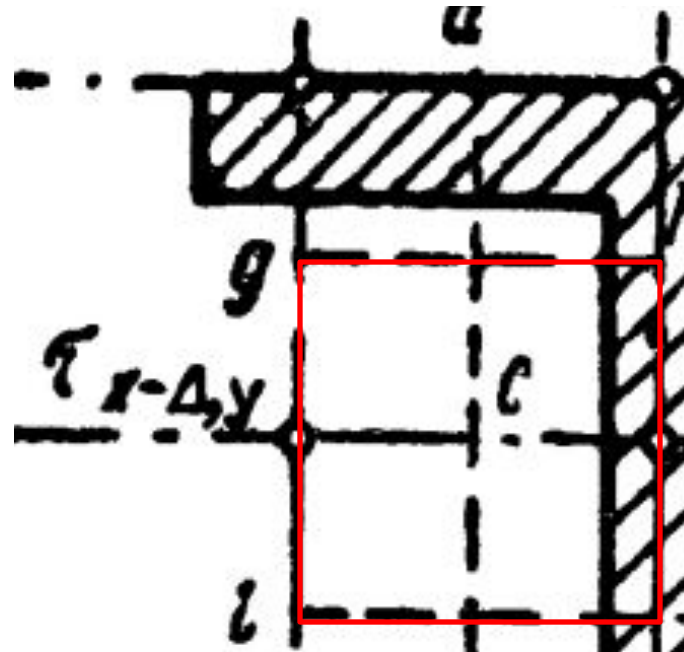
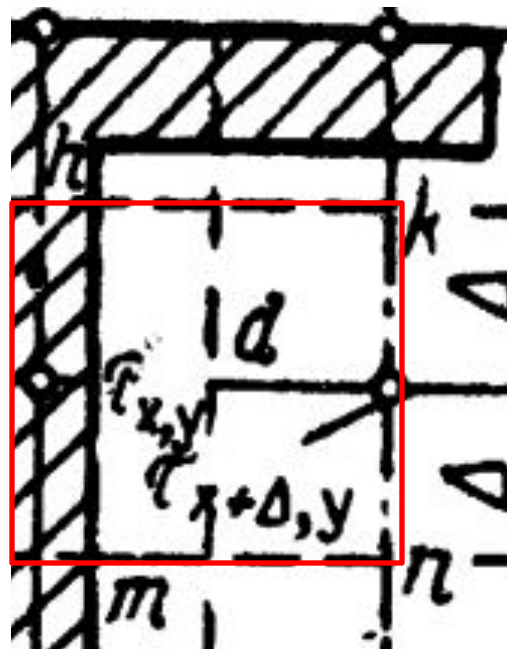
Это и есть общая формула для вычисления температуры во всех узлах сетки.

В частном случае, если все четыре квадрата, примыкающие к узлу с температурой $\tau_{x,y}$, лежат в пределах одного материала (однородное температурное поле), то $k_{x-\Delta} = k_{y+\Delta} = k_{x+\Delta} = k_{y-\Delta}$ и в этом случае формула (33) обращается в формулу (32).

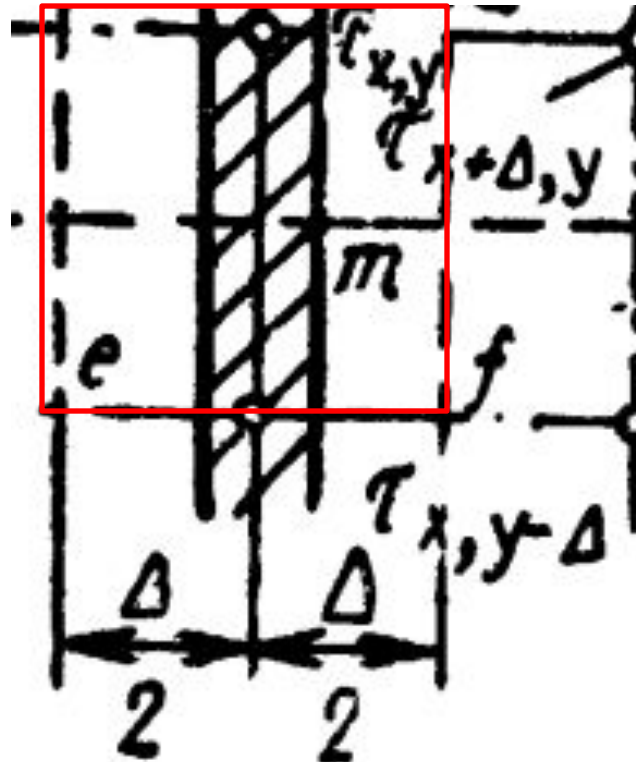
Коэффициенты теплопередачи между узлами сетки определяются следующим образом (см. рис. 21). Принимаем, что от узла с температурой $\tau_{x,y}$ к узлу с температурой $\tau_{x,y+\Delta}$ передача тепла происходит только по квадрату $abcd$. Тогда коэффициент теплопередачи $k_{y+\Delta}$ определится как величина, обратная сопротивлению теплопередаче квадрата $abcd$. Сопротивление теплопередаче этого квадрата определяется как ограждение, в котором однородность материала нарушена в перпендикулярном и параллельном тепловому потоку направлениях.



Передача тепла от узла с температурой $\tau_{x,y}$ к узлу с температурой $\tau_{x+\Delta,y}$ происходит по квадрату $hknm$, а к узлу с температурой $\tau_{x-\Delta,y}$ — по квадрату $ghml$. Сопротивление теплопередаче этих квадратов определяется, как для двухслойной стены.



В направлении к узлу с температурой $\tau_{x,y-\Delta}$ передача тепла происходит по квадрату $cdfe$, сопротивление теплопередаче которого определяется, как для стены, состоящей из двух материалов, каждый из которых имеет толщину, равную толщине стены.



Для квадратов, в которые входит только один материал, $k = \lambda/\Delta$, где λ — коэффициент теплопроводности материала, $\Delta =$ расстояние между узлами сетки в m .

Если узел с температурой $\tau_{x,y}$ лежит в плоскости, граничащей с воздушной средой, то коэффициент теплопередачи к воздуху будет равен соответствующей величине коэффициента тепловосприятия α_v или теплоотдачи α_n . В этом случае величины k к соседним узлам, лежащим в этой плоскости, берутся с коэффициентом 0,5 на основании того, что в направлении к этим узлам передача тепла по материалу будет происходить только по площади, равной половине квадрата сетки, а по воздуху, в котором окажется вторая половина квадрата, передачи тепла не будет.

Иногда удобнее для расчета температурного поля пользоваться **прямоугольной сеткой** (рис. 22). Располагая нити сетки более густо в области поля, в которой нас наиболее интересует распределение температуры, например в местах теплопроводных включений, и более редко в остальной области поля, удастся значительно сократить число узлов сетки, а следовательно, и число расчетных уравнений.

При прямоугольной сетке коэффициенты теплопередачи между узлами определяются с учетом площади, по которой передается тепло; размер поля в направлении оси z принимается равным 1 м. При этом, если узлы сетки лежат в области одного материала, имеющего коэффициент теплопроводности λ (однородное поле), то по рис. 22 получим следующие значения величин коэффициентов теплопередачи между узлом с температурой τ_x и соседними узлами:

к узлу 1 — площадь теплопередачи будет: $F_1 = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2}{2}$;

коэффициент теплопередачи $k_{x-1} = \frac{\lambda}{\Delta x_1} F_1$;

к узлу 2 — $F_2 = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2}$; $k_{x-2} = \frac{\lambda}{\Delta y_2} F_2$;

к узлу 3 — $F_3 = F_1$; $k_{x-3} = \frac{\lambda}{\Delta x_2} F_3$;

к узлу 4 — $F_4 = F_2$; $k_{x-4} = \frac{\lambda}{\Delta y_1} F_4$.

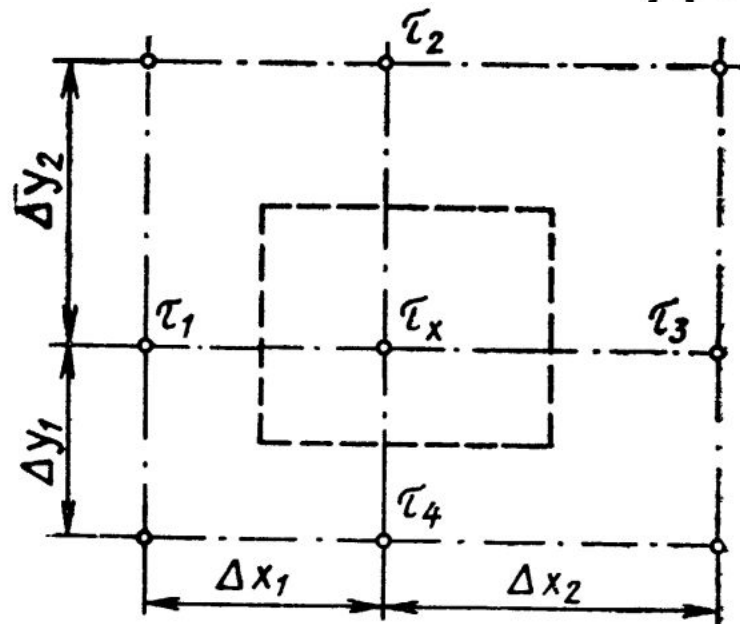


Рис. 22. Схема для расчета плоского температурного поля при наложении прямоугольной неравномерной сетки

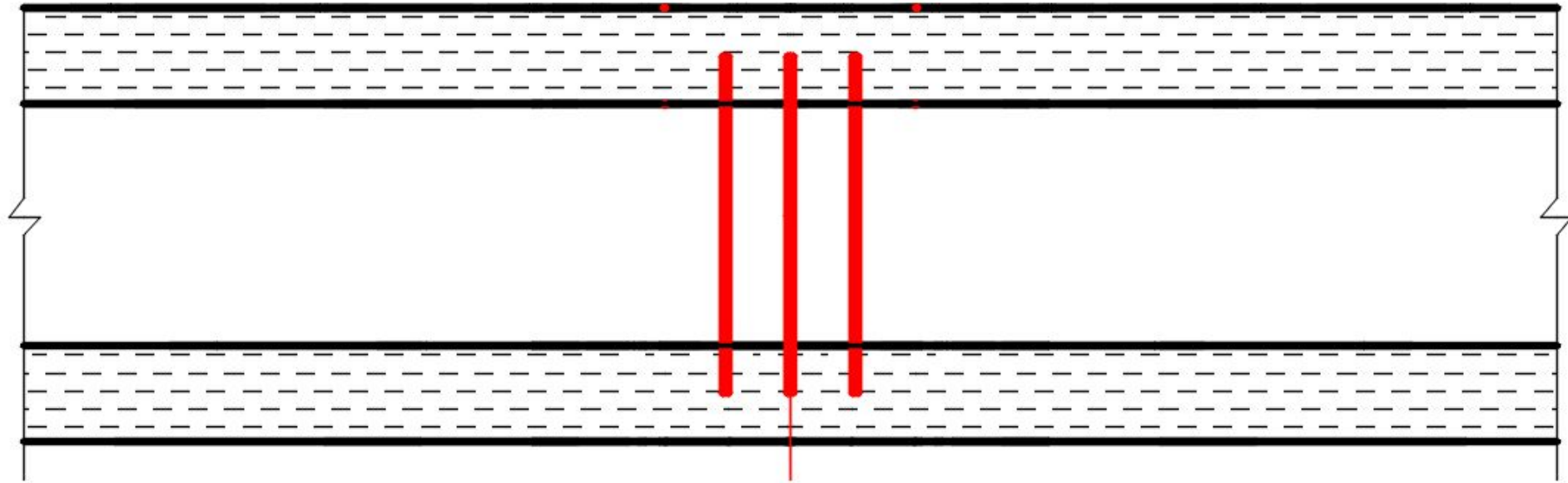
Если поле неоднородно, то коэффициенты теплопередачи между узлами сетки определяются так же, как и при квадратной сетке, но с умножением их на соответствующие площади теплопередачи F в m^2 . При этом размерность коэффициентов теплопередачи между узлами прямоугольной сетки будет *ккал/ч·град*.

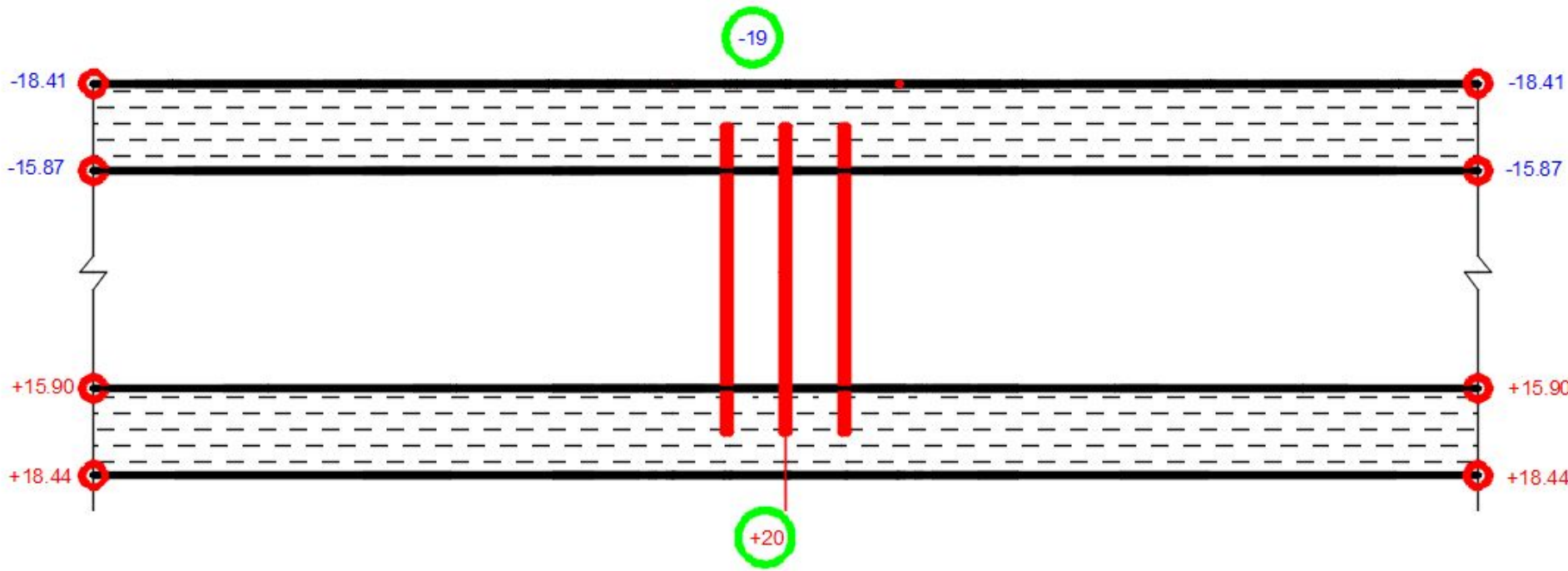
Расчеты температурного поля делаются методом итерации следующим образом. Предварительно задаются некоторыми произвольными значениями температур во всех узлах сетки. Затем по формуле (33) последовательно вычисляют значения температур во всех узлах, заменяя полученными значениями температур предыдущие до тех пор, пока в каждом узле сетки поля температура не станет удовлетворять соответствующим уравнениям при заданных температурах воздуха с одной и с другой стороны ограждения. Процесс расчета можно считать законченным только тогда, когда в пределах заданной точности температуры остаются постоянными во всех узлах сетки. Продолжительность расчета зависит от того, насколько правильно были заданы начальные температуры.

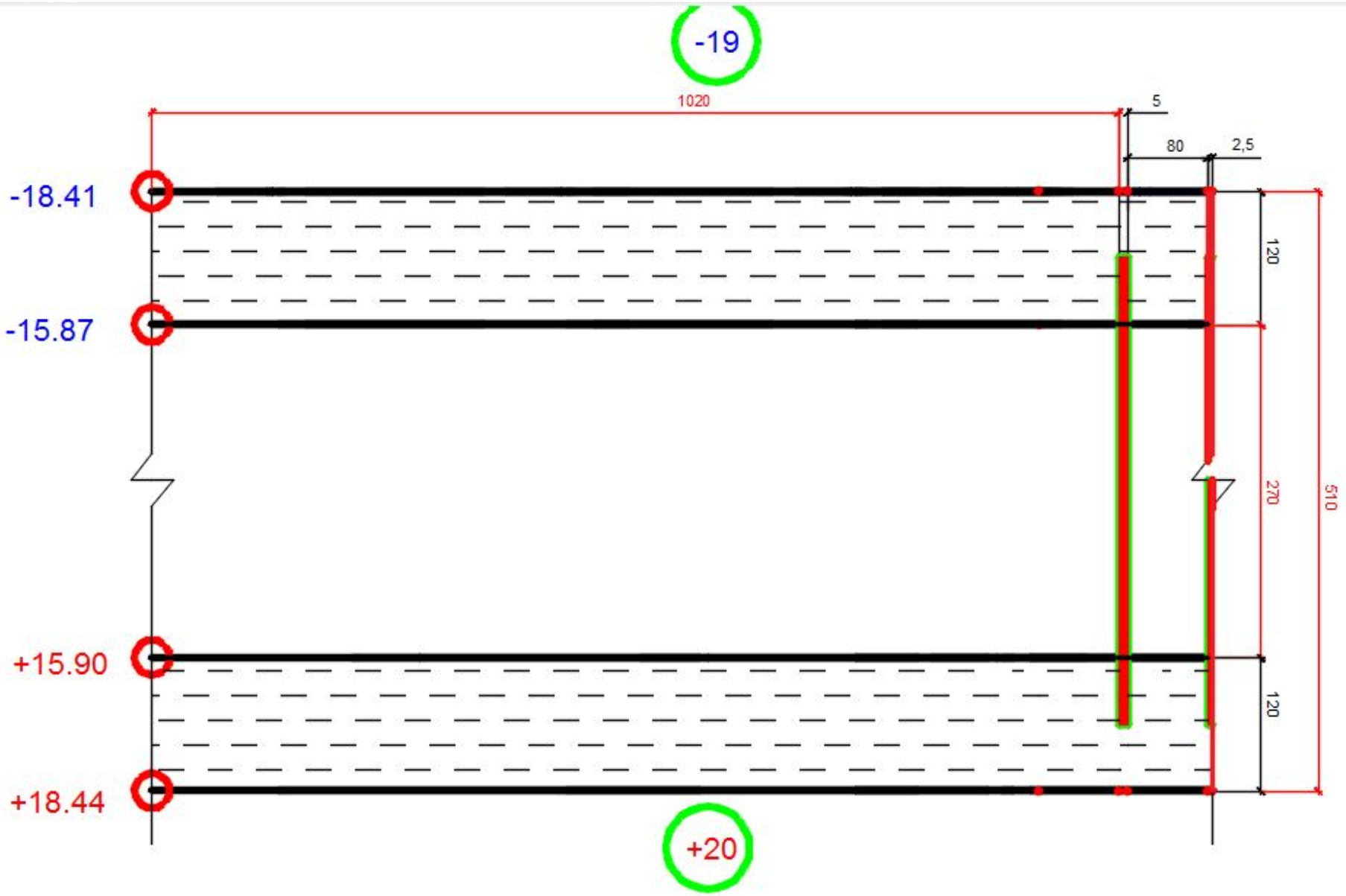
Температурное поле, полученное для данных значений температур внутреннего и наружного воздуха, легко пересчитывается и для других значений этих температур на основании того, что разность температур любой точки поля и внутреннего или наружного воздуха изменяется пропорционально изменению разности температур внутреннего и наружного воздуха.

Для расчета температурного поля накладываем на горизонтальное сечение прямоугольную неравномерную сетку, располагая горизонтальные нити сетки по плоскостям раздела материалов ограждения, а вертикальные от оси симметрии (более часто у самого теплопроводного включения и далее – менее редко).

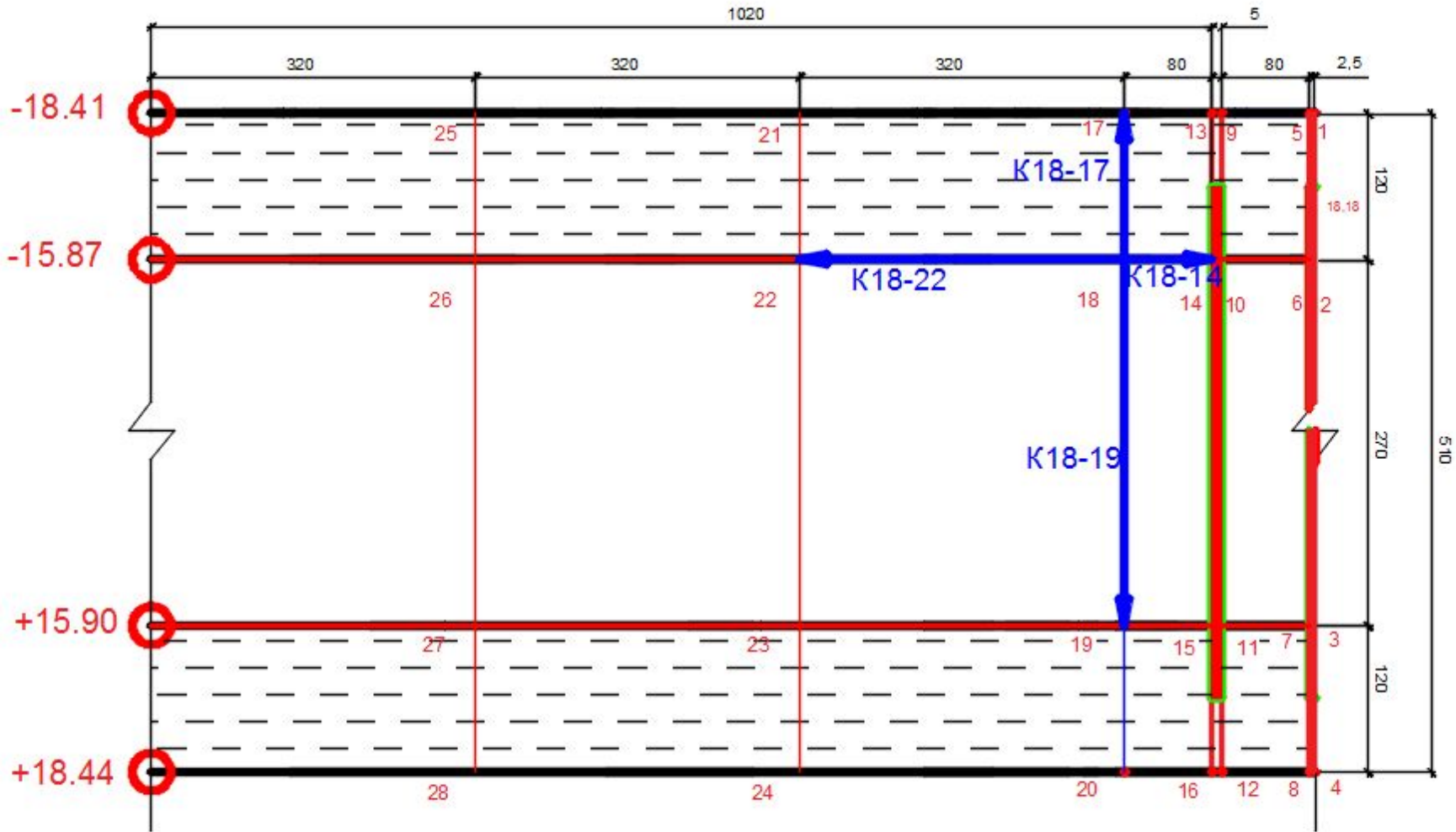
Полагая что на расстоянии двух толщин стены от стыка распределение температуры по толщине стены не нарушается, берем протяженность поля от оси стыка равной: $510 * 2 = 1020 \text{ мм}$.





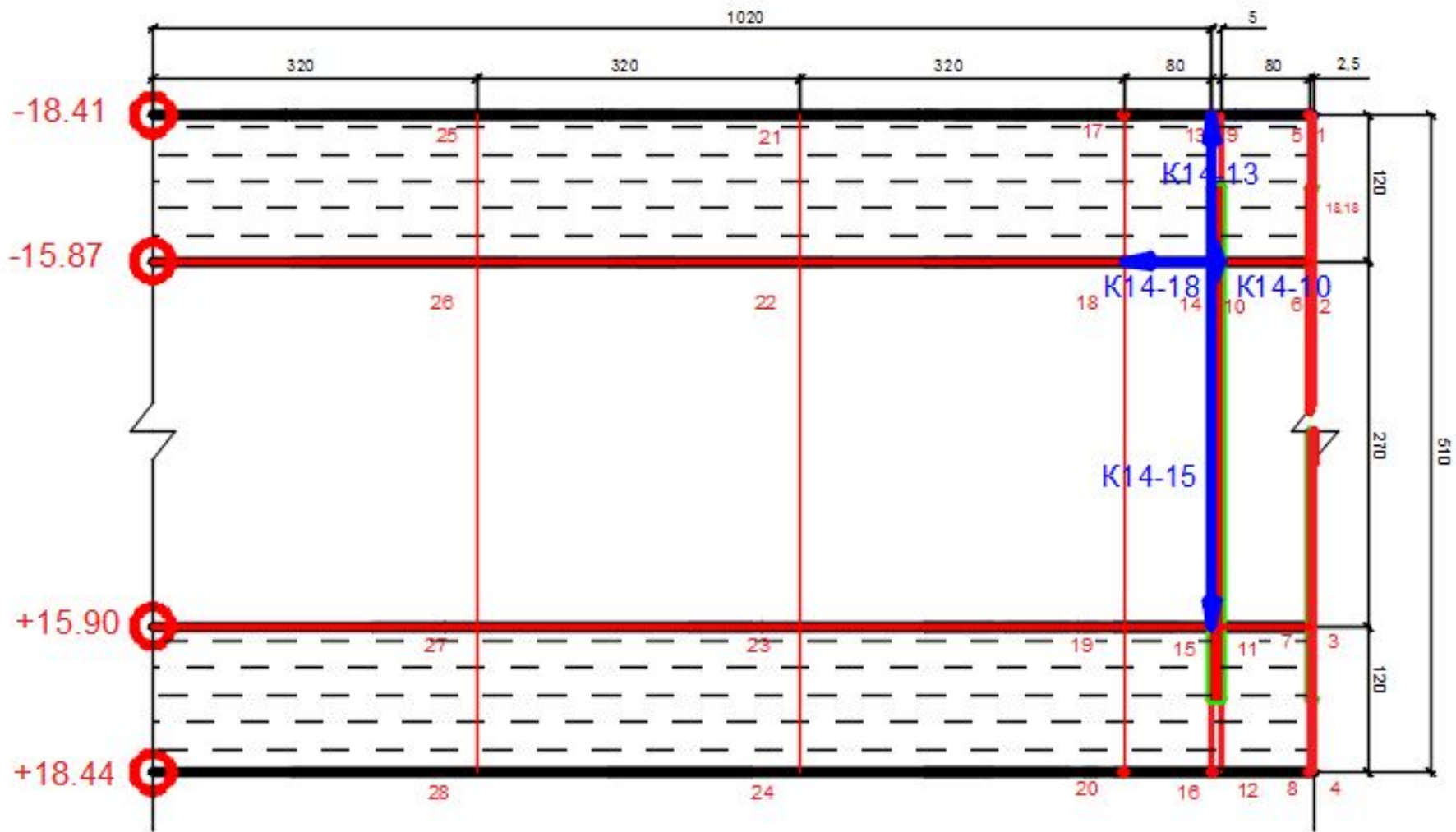


-19

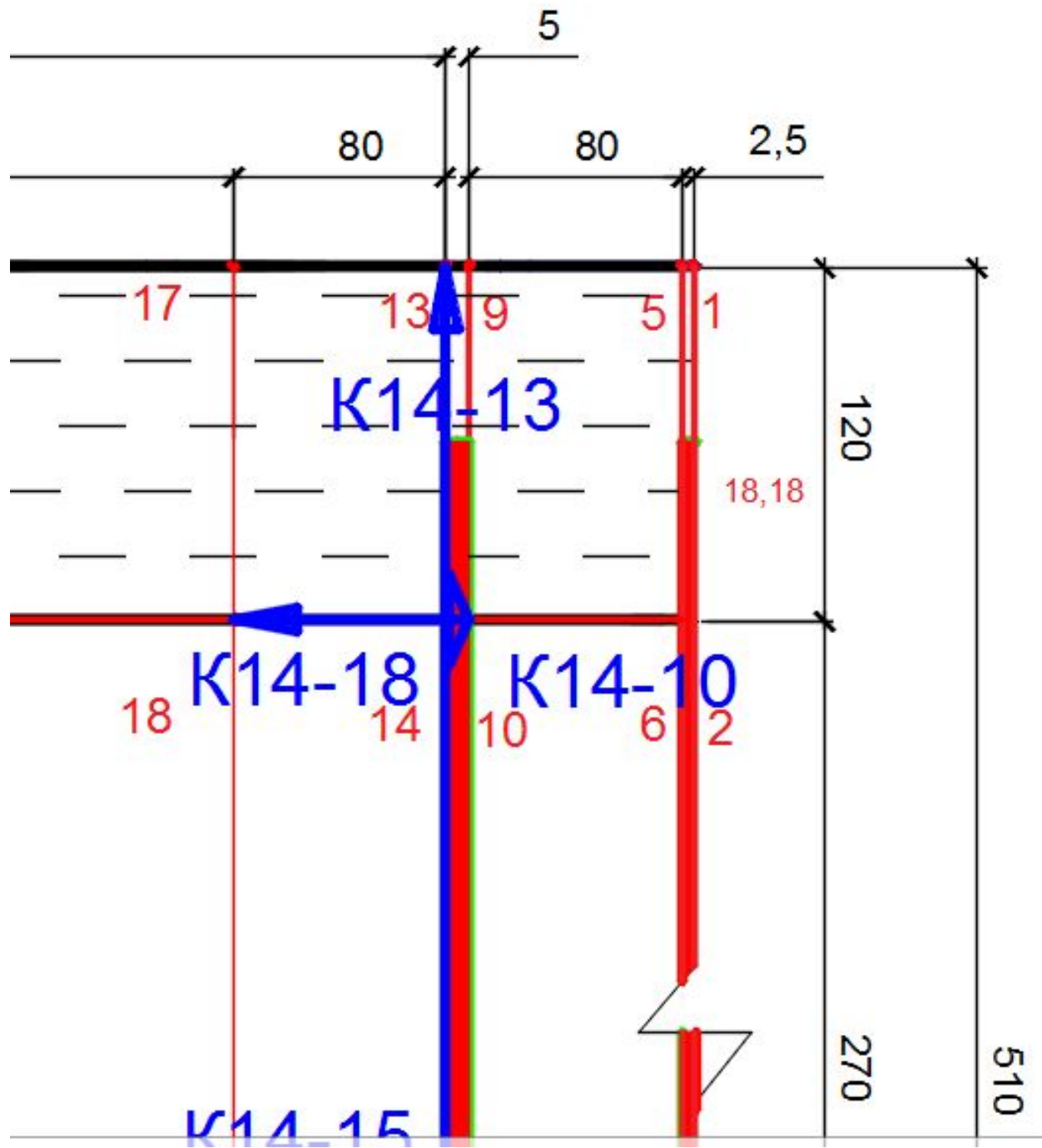


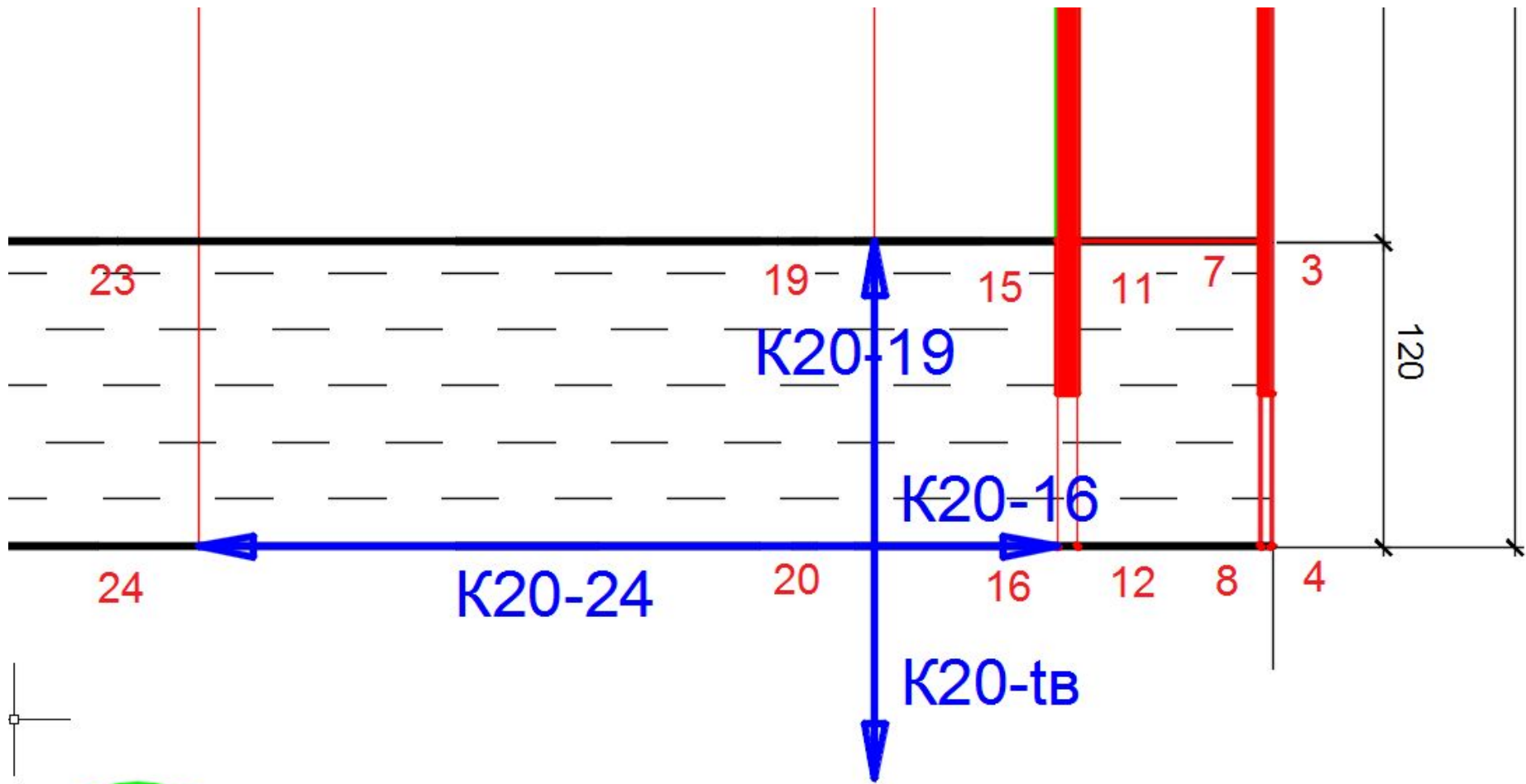
+20

-19



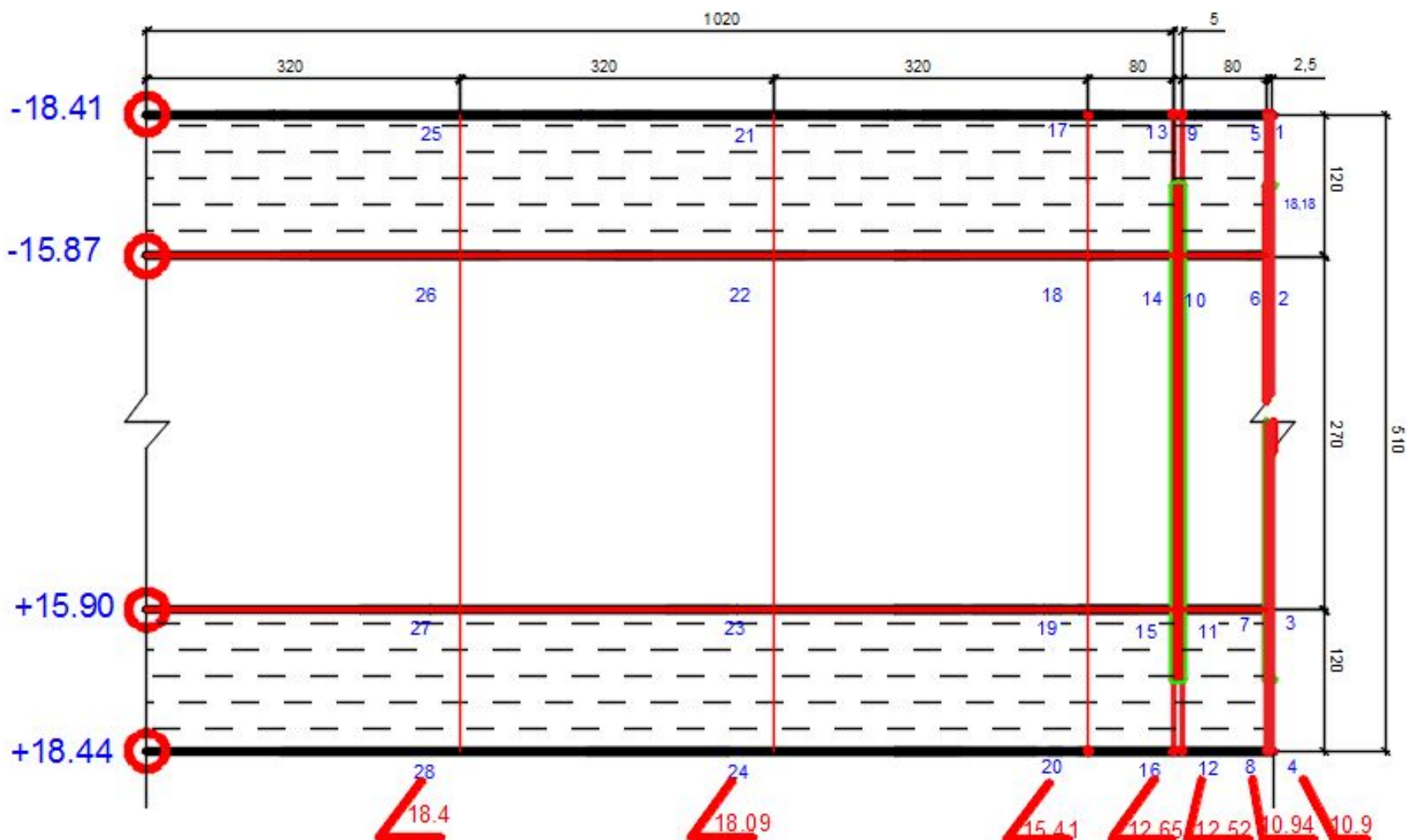
+20





| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | | | |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----|---------|--------|
| 1 | -1 | 0.001708 | 0 | 0 | 0.994989 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.07074 | |
| 2 | 5.83506 | -1 | 0.000257 | 0 | 0 | 0.999757 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | |
| 3 | 0 | 0.000257 | -1 | 5.83506 | 0 | 0 | 0.999757 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | |
| 4 | 0 | 0 | 0.001712 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0.996877 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | -0.0282 | |
| 5 | 0.901718 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0.013315 | 0 | 0 | 0.01821 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 1.08942 | |
| 6 | 0 | 0.999758 | 0 | 0 | 5.01805 | -1 | 6.31805 | 0 | 0 | 0.000149 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | |
| 7 | 0 | 0 | 0.999758 | 0 | 0 | 6.31805 | -1 | 5.01805 | 0 | 0 | 0.874063 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0.935137 | 0 | 0 | 0.013791 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0.029223 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | -0.457 | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.051183 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0.023563 | 0 | 0 | 0.819007 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 1.9506 | |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000298 | 0 | 0 | 0.000106 | -1 | 0.000245 | 0 | 0 | 0.999352 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000298 | 0 | 0 | 0.000245 | -1 | 0.000106 | 0 | 0 | 0.999352 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 11 | 0 | |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.054735 | 0 | 0 | 0.027333 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0.875767 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | -0.8433 | |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.819007 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0.023563 | 0 | 0 | 0.051183 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 13 | 1.9506 | |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.999352 | 0 | 0 | 0.000106 | -1 | 0.000245 | 0 | 0 | 0.000298 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 14 | 0 | |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.999352 | 0 | 0 | 0.000245 | -1 | 0.000106 | 0 | 0 | 0.000298 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 0 | |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.875767 | 0 | 0 | 0.027333 | -1 | 0 | 0 | 0.054735 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 16 | -0.8433 | |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.077083 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0.171206 | 0 | 0 | 0.012848 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 17 | 14.0384 | |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.337973 | 0 | 0 | 0.334823 | -1 | 0.042712 | 0 | 0 | 0.084493 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 | 0 | |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.337973 | 0 | 0 | 0.042712 | -1 | 0.334823 | 0 | 0 | 0.084493 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 19 | 0 | |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.142574 | 0 | 0 | 0.316832 | -1 | 0 | 0 | 0.023762 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 20 | -10.337 | |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.008671 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0.184971 | 0 | 0 | 0.008671 | 0 | 0 | 0 | 21 | 15.5151 | |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.077301 | 0 | 0 | 0.782877 | -1 | 0.062521 | 0 | 0 | 0.077301 | 0 | 0 | 22 | 0 | |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.077301 | 0 | 0 | 0.062521 | -1 | 0.782877 | 0 | 0 | 0.077301 | 0 | 23 | 0 | |
| 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.017202 | 0 | 0 | 0.566972 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0.017202 | 24 | -11.972 | |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.008671 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0.184971 | 0 | 0 | 25 | 15.5157 | |
| 26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.077301 | 0 | 0 | 0.782877 | -1 | 0.062521 | 0 | 26 | 1.22677 | |
| 27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.077301 | 0 | 0 | 0.062521 | -1 | 0.782877 | 27 | -1.2291 | |
| 28 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.017202 | 0 | 0 | 0.566972 | -1 | 28 | -11.29 |

-19



+20

Температурное поле дает возможность точно определить величину среднего сопротивления теплопередаче ограждения $R_{0,ср}$. Для этого вычисляется средняя температура одной из поверхностей ограждения $\tau_{ср}$. Количество тепла, проходящего через эту поверхность,

$$Q' = (t_{воз} - \tau_{ср}) \alpha,$$

где $t_{воз}$ — температура воздуха около данной поверхности; α — коэффициент теплоотдачи воздух — поверхность.

С другой стороны, количество тепла, проходящего через ограждение

$$Q'' = \frac{t_{в} - t_{н}}{R_0},$$

где $t_{в} - t_{н}$ — разность температур внутреннего и наружного воздуха.

По формуле (34) получим

$$R_{o.cp} = \frac{18 + 31}{18 - 12,3} \cdot \frac{1}{7,5} = 1,15 \text{ град} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{ч} / \text{ккал}.$$

Следовательно, стык понижает сопротивление теплопередаче стены в зоне его влияния на 35% против R_o , полученного в примере 5 для сечения панели по утеплителю.