

### Определение двойного интеграла

Понятие интеграла может быть расширено на функции двух и большего числа переменных. Рассмотрим, например, функцию двух переменных  $z = f(x, y)$ . Двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  обозначается как

$$\iint_R f(x, y) dA,$$

где  $R$  - область интегрирования в плоскости  $Oxy$ . Если определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  от функции одной переменной  $f(x) \geq 0$  выражает площадь под кривой  $f(x)$  в интервале от  $x = a$  до  $x = b$ , то двойной интеграл выражает объем под поверхностью  $z = f(x, y)$  выше плоскости  $Oxy$  в области интегрирования  $R$  (рисунок 1).

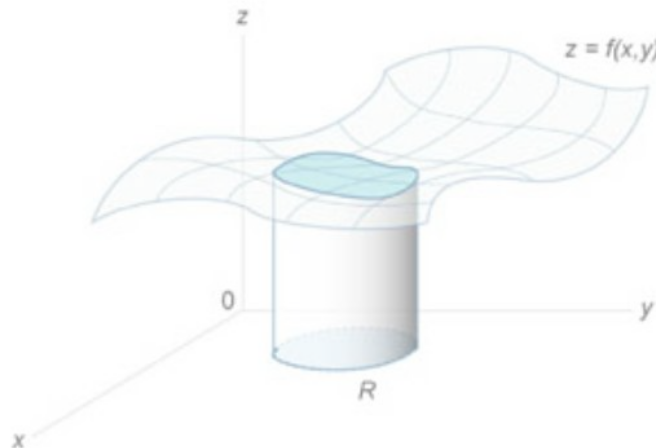


Рис.1

Формально двойной интеграл можно ввести как предел *суммы Римана*. Пусть, для простоты, область интегрирования  $R$  представляет собой прямоугольник  $[a, b] \times [c, d]$  (рисунок 2). Используя ряд чисел  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ , разобьем отрезок  $[a, b]$  на малые интервалы таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{m-1} < x_m = b.$$

Аналогично, пусть множество чисел  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  является разбиением отрезка  $[c, d]$  вдоль оси  $Oy$ , при котором справедливы неравенства

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_{n-1} < y_n = d.$$

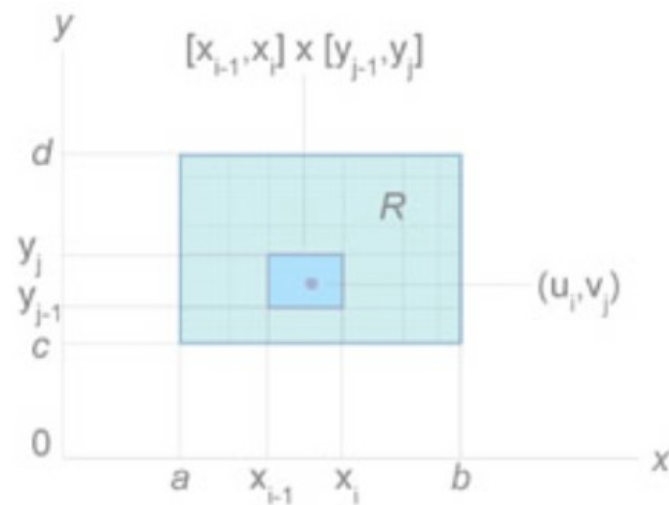


Рис.2

*Суммой Римана* функции  $f(x, y)$  над разбиением  $[a, b] \times [c, d]$  называется выражение

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

где  $(u_i, v_j)$  - некоторая точка в прямоугольнике  $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$  и  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ .

Двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  в прямоугольной области  $[a, b] \times [c, d]$  определяется как предел суммы Римана, при котором максимальные значения  $\Delta x_i$  и  $\Delta y_j$  стремятся к нулю:

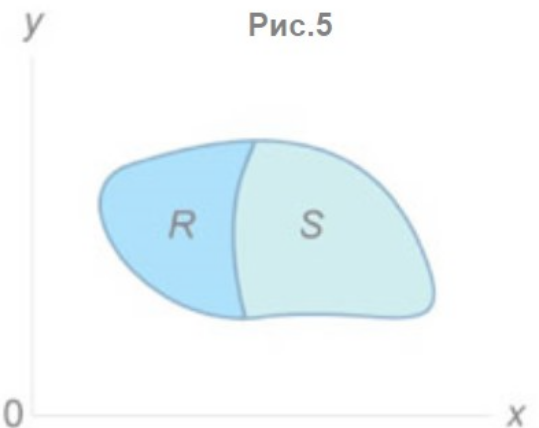
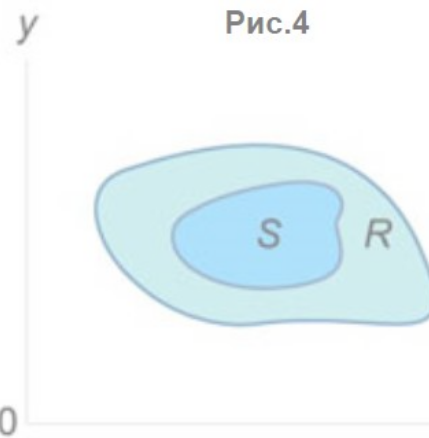
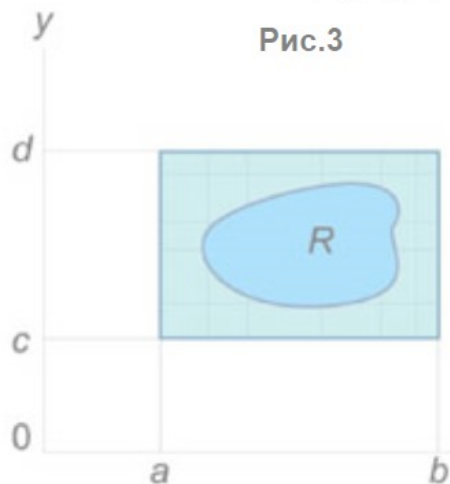
$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dA = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Чтобы определить двойной интеграл в произвольной области  $R$ , отличной от прямоугольной, выберем прямоугольник  $[a, b] \times [c, d]$ , покрывающий область  $R$  (рисунок 3), и введем функцию  $g(x, y)$ , такую, что

$$\begin{cases} g(x, y) = f(x, y), & \text{если } f(x, y) \in R \\ g(x, y) = 0, & \text{если } f(x, y) \notin R \end{cases}.$$

Тогда двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  в произвольной области  $R$  определяется как

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x, y) dA.$$



### Свойства двойного интеграла

Двойной интеграл обладает следующими свойствами:

$$1. \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA;$$

$$2. \iint_R [f(x, y) - g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA - \iint_R g(x, y) dA;$$

$$3. \iint_R kf(x, y) dA = k \iint_R f(x, y) dA, \text{ где } k - \text{ константа};$$

$$4. \text{ Если } f(x, y) \leq g(x, y) \text{ в области } R, \text{ то } \iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA;$$

$$5. \text{ Если } f(x, y) \geq 0 \text{ в области } R \text{ и } S \subset R \text{ (рисунок 4), то } \iint_S f(x, y) dA \leq \iint_R f(x, y) dA;$$

6. Если  $f(x, y) \geq 0$  на  $R$  и области  $R$  и  $S$  являются непересекающимися (рисунок 5), то

$$\iint_{R \cup S} f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_S f(x, y) dA.$$

Здесь  $R \cup S$  означает объединение этих двух областей.

**Пример**

Пусть  $R$  и  $S$  являются непересекающимися областями (рисунок 5). Известны значения двойных интегралов:

$$\iint_R f(x, y) dA = 2, \quad \iint_R g(x, y) dA = 3, \quad \iint_S f(x, y) dA = 6, \quad \iint_S g(x, y) dA = 7.$$

Оценить интеграл  $\iint_{R \cup S} [10f(x, y) + 20g(x, y)] dA$ .

*Решение.*

Используя свойства двойных интегралов, получаем:

$$\begin{aligned} \iint_{R \cup S} [10f(x, y) + 20g(x, y)] dA &= \iint_{R \cup S} 10f(x, y) dA + \iint_{R \cup S} 20g(x, y) dA \\ &= 10 \iint_{R \cup S} f(x, y) dA + 20 \iint_{R \cup S} g(x, y) dA = 10 \left[ \iint_R f(x, y) dA + \iint_S f(x, y) dA \right] \\ &+ 20 \left[ \iint_R g(x, y) dA + \iint_S g(x, y) dA \right] = 10(2 + 6) + 20(3 + 7) = 280. \end{aligned}$$

## Повторные интегралы

### Области интегрирования I и II типа

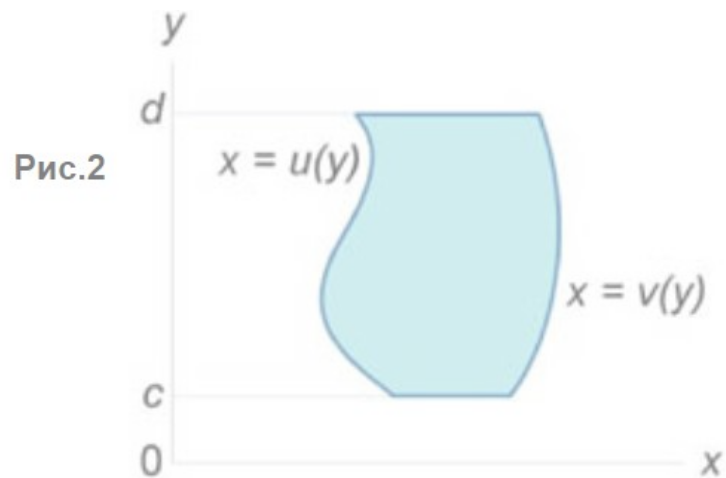
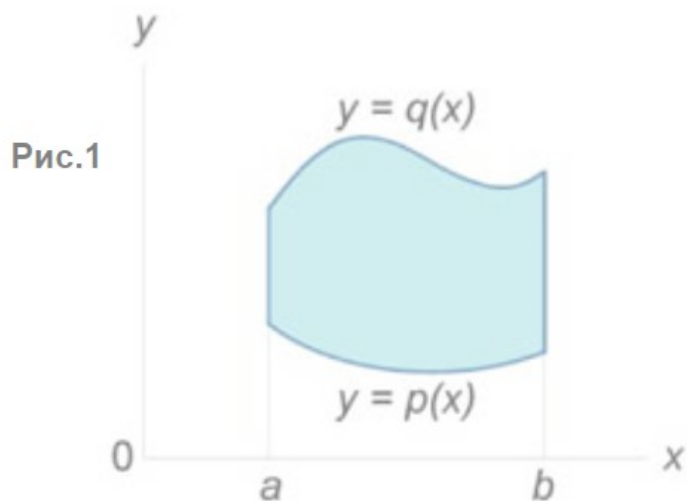
Двойные интегралы вычисляются, как правило, с помощью повторных интегралов. Однако переход от двойных к повторным интегралам возможен не для произвольной области интегрирования  $R$ , а для областей определенного типа. Введем понятия областей интегрирования типа I и II.

**Определение 1.** Говорят, что область  $R$  на плоскости относится к *типу I* или является *элементарной относительно оси Oy*, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от  $x$  (рисунок 1), и описывается множеством:

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, p(x) \leq y \leq q(x)\}.$$

**Определение 2.** Говорят, что область  $R$  на плоскости относится к *типу II* или является *элементарной относительно оси Ox*, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от  $y$  (рисунок 2), и описывается множеством:

$$R = \{(x, y) \mid u(y) \leq x \leq v(y), c \leq y \leq d\}.$$



### Связь между двойными и повторными интегралами

Пусть  $f(x, y)$  является непрерывной функцией в области  $R$  типа  $I$  :

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, p(x) \leq y \leq q(x)\}.$$

Тогда двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  в данной области выражается через повторный интеграл в виде

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy dx.$$

Для области интегрирования типа  $II$  существует аналогичная формула. Если  $f(x, y)$  является непрерывной функцией в области  $R$  типа  $II$  :

$$R = \{(x, y) \mid u(y) \leq x \leq v(y), c \leq y \leq d\},$$

то справедливо соотношение

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy.$$

Приведенные формулы (в англоязычной литературе они известны как *теорема Фубини*) позволяют вычислять двойные интегралы через повторные. В повторных интегралах сначала находится внутренний интеграл, а затем - внешний.

**Пример 1**

Найти повторный интеграл  $\int_0^1 \int_1^2 xy dy dx$ .

*Решение.*

Сначала вычислим внутренний интеграл и затем внешний.

$$\int_0^1 \int_1^2 xy dy dx = \int_0^1 \left[ \int_1^2 xy dy \right] dx = \int_0^1 \left[ x \left( \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^2 \right] dx = \int_0^1 \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

**Пример 2**

Найти повторный интеграл  $\int_0^1 \int_y^{y^2} (x + 2y) dx dy$ .

*Решение.*

Здесь область интегрирования относится к типу  $II$  (является элементарной относительно оси  $Ox$ ). Вычисляя сначала внутренний интеграл по  $x$ , и затем внешний по  $y$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^{y^2} (x + 2y) dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_y^{y^2} (x + 2y) dx \right] dy = \int_0^1 \left[ \left( \frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Big|_y^{y^2} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[ \left( \frac{y^4}{2} + 2y^3 \right) - \left( \frac{y^2}{2} + 2y^2 \right) \right] dy = \int_0^1 \left[ \frac{y^4}{2} + 2y^3 - \frac{5y^2}{2} \right] dy = \left[ \frac{y^5}{10} + \frac{y^4}{2} - \frac{5y^3}{6} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = -\frac{7}{30}. \end{aligned}$$



**Пример 3**

Вычислить  $\int_1^2 \int_0^y x \sqrt{y^2 + x^2} dx dy$ .

*Решение.*

Запишем повторный интеграл в виде

$$I = \int_1^2 \int_0^y x \sqrt{y^2 + x^2} dx dy = \int_1^2 \left[ \int_0^y x \sqrt{y^2 + x^2} dx \right] dy.$$

Чтобы найти внутренний интеграл в квадратных скобках, сделаем замену:

$$z = y^2 + x^2, \Rightarrow dz = 2x dx, \Rightarrow x dx = \frac{dz}{2}.$$

Если  $x = 0$ , то  $z = y^2$ , и, соответственно, если  $x = y$ , то  $z = 2y^2$ . Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left[ \int_0^y x \sqrt{y^2 + x^2} dx \right] dy = \int_1^2 \left[ \int_{y^2}^{2y^2} \sqrt{z} \frac{dz}{2} \right] dy = \int_1^2 \left[ \left( \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{y^2}^{2y^2} \right] dy \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 \left[ (2y^2)^{\frac{3}{2}} - (y^2)^{\frac{3}{2}} \right] dy = \frac{1}{3} \int_1^2 [2\sqrt{2}y^3 - y^3] dy = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} \int_1^2 y^3 dy = \frac{2\sqrt{2} - 1}{12} (y^4) \Big|_1^2 \\ &= \frac{5(2\sqrt{2} - 1)}{4}. \end{aligned}$$

**Пример 4**

Вычислить  $\int_0^1 \int_0^y \ln(y^2 + 1) dx dy$ .

*Решение.*

Вычисляя внутренний интеграл, получаем

$$I = \int_0^1 \int_0^y \ln(y^2 + 1) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^y \ln(y^2 + 1) dx \right] dy = \int_0^1 [\ln(y^2 + 1) x]_0^y dy = \int_0^1 \ln(y^2 + 1) y dy.$$

Далее используем интегрирование по частям:  $\int u dv = uv - \int v du$ . Пусть  $u = \ln(y^2 + 1)$ ,  $dv = y dy$ . Тогда

$$du = \frac{d}{dy} \ln(y^2 + 1) = \frac{2y dy}{y^2 + 1}, \quad v = \int y dy = \frac{y^2}{2}.$$

Подставляя это, получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \ln(y^2 + 1) y dy = \left[ \frac{y^2}{2} \ln(y^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{2} \frac{2y dy}{y^2 + 1} = \left[ \frac{y^2}{2} \ln(y^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^3 dy}{y^2 + 1} \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{y^3 dy}{y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Наконец, вычислим последний интеграл:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{y^3 dy}{y^2 + 1} &= \int_0^1 \frac{y^3 + y - y}{y^2 + 1} dy = \int_0^1 \left[ y - \frac{y}{y^2 + 1} \right] dy = \int_0^1 y dy - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(y^2 + 1)}{y^2 + 1} \\ &= \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

Окончательный ответ:

$$I = \frac{\cancel{\ln 2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cancel{\ln 2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

### Пример 5

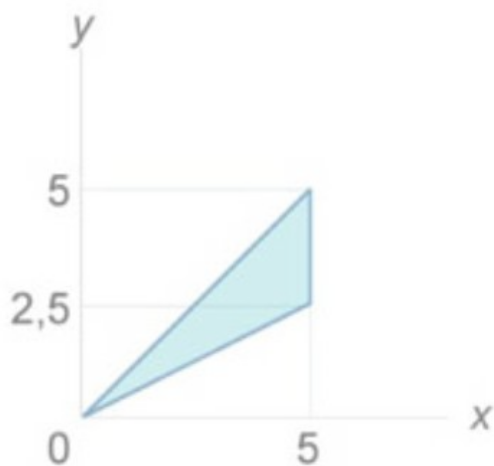
Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле  $I = \int_0^5 \int_{\frac{x}{2}}^x f(x, y) dy dx$ .

*Решение.*

Область интегрирования относится к типу  $I$  (рисунок 3). Она представляет собой треугольник, ограниченный прямыми  $y = \frac{x}{2}$  или  $x = 2y$  и  $y = x$  или  $x = y$ . Переменная  $x$  изменяется в интервале  $0 \leq x \leq 5$ . Изменяя порядок интегрирования, исходный интеграл можно записать в виде суммы следующих двух повторных интегралов:

$$I = \int_0^{2,5} \int_y^{2y} f(x, y) dx dy + \int_{2,5}^5 \int_y^5 f(x, y) dx dy.$$

Рис.3



## Двойные интегралы в прямоугольной области

Пусть область интегрирования  $R$  представляет собой прямоугольник  $[a, b] \times [c, d]$ . Тогда двойной интеграл в такой области выражается через повторный интеграл в следующем виде:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

В данном случае область интегрирования  $R$  относится одновременно к типу  $I$  и  $II$ , так что у нас есть возможность выбирать, по какой переменной ( $x$  или  $y$ ) начинать интегрировать функцию  $f(x, y)$ . Обычно удобнее начинать с более простого интеграла.

В частном случае, когда подынтегральная функция  $f(x, y)$  "расщепляется" на произведение  $g(x)h(y)$ , двойной интеграл равен произведению двух определенных интегралов:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R g(x)h(y) dx dy = \left( \int_a^b g(x) dx \right) \left( \int_c^d h(y) dy \right).$$

### Пример 1

Вычислить двойной интеграл  $\iint_R xy dx dy$  в области  $R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$ .

*Решение.*

Как видно, подынтегральная функция  $f(x, y)$  представляет собой произведение  $g(x)h(y)$ . Следовательно, интеграл равен

$$\iint_R xy dx dy = \int_2^4 x dx \cdot \int_0^1 y dy = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4 \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = (8 - 2) \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 3.$$

### Пример 2

Вычислить двойной интеграл  $\iint_R xy^2 dx dy$ , заданный в области  $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2\}$ .

*Решение.*

Поскольку функция  $f(x, y)$  представляет собой произведение  $g(x)h(y)$ , интеграл равен

$$\iint_R xy^2 dx dy = \int_1^5 x dx \cdot \int_0^2 y^2 dy = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^5 \cdot \left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{8}{3} - 0\right) = 64.$$

### Пример 3

Вычислить интеграл  $\iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}$ , заданный в области  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ .

*Решение.*

Выражая двойной интеграл через повторный (в котором внутренний интеграл зависит от  $x$ ), получаем

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2} &= \int_1^2 \int_0^2 \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[ \int_0^2 \frac{dx}{(x+y)^2} \right] dy = \int_1^2 \left[ \left( -\frac{1}{x+y} \right) \Big|_{x=0}^2 \right] dy \\ &= \int_1^2 \left[ -\frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} \right] dy = [\ln y - \ln(y+2)] \Big|_1^2 = \left( \ln \frac{y}{y+2} \right) \Big|_1^2 = \ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3} = \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

#### Пример 4

Вычислить интеграл  $\iint_R \cos(x + y) dx dy$  в области  $R = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ .

*Решение.*

В данном случае также удобно сначала проинтегрировать по  $x$  и затем по  $y$ .

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + y) dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ (\sin(x + y)) \Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \right] dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - \sin y \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} + y - y}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} + y + y}{2} \right] dy \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) dy = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) dy = \sqrt{2} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{2} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2} \left[ \sin \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right] = 0. \end{aligned}$$



**Пример 5**

Вычислить интеграл  $\iint_R (x - y^2) dx dy$ , заданный в области  $R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$ .

*Решение.*

Выразим двойной интеграл через повторный. Сначала проинтегрируем по  $x$ , затем по  $y$ .

$$\begin{aligned}\iint_R (x - y^2) dx dy &= \int_1^2 \int_2^3 (x - y^2) dx dy = \int_1^2 \left[ \int_2^3 (x - y^2) dx \right] dy = \int_1^2 \left[ \left( \frac{x^2}{2} - y^2 x \right) \Big|_{x=2}^3 \right] dy \\ &= \int_1^2 \left[ \left( \frac{9}{2} - 3y^2 \right) - (2 - 2y^2) \right] dy = \int_1^2 \left( \frac{5}{2} - y^2 \right) dy = \left( \frac{5}{2} y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\ &= \left( 5 - \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{5}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Мы можем поменять порядок интегрирования. Результат, разумеется, не изменится.

$$\begin{aligned}\iint_R (x - y^2) dx dy &= \int_2^3 \int_1^2 (x - y^2) dy dx = \int_2^3 \left[ \int_1^2 (x - y^2) dy \right] dx = \int_2^3 \left[ \left( xy - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=1}^2 \right] dx \\ &= \int_2^3 \left[ \left( 2x - \frac{8}{3} \right) - \left( x - \frac{1}{3} \right) \right] dx = \int_2^3 \left( x - \frac{7}{3} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{7x}{3} \right) \Big|_2^3 \\ &= \left( \frac{9}{2} - 7 \right) - \left( 2 - \frac{14}{3} \right) = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

## Двойные интегралы в произвольной области

Пусть область интегрирования  $R$  типа  $I$  (элементарная относительно оси  $Oy$ ) ограничена графиками функций  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = p(x)$  и  $y = q(x)$ . При этом выполняются неравенства  $a < b$  и  $p(x) < q(x)$  для всех  $x \in [a, b]$ . Тогда двойной интеграл по области  $R$  выражается через повторный по формуле

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=p(x)}^{y=q(x)} f(x, y) dy dx.$$

Аналогичное соотношение существует и для области типа  $II$ . Пусть область интегрирования  $R$  типа  $II$  (элементарная относительно оси  $Ox$ ) ограничена графиками функций  $x = u(y)$ ,  $x = v(y)$ ,  $y = c$ ,  $y = d$  при условии, что  $c < d$  и  $u(y) < v(y)$  для всех  $y \in [c, d]$ . Тогда двойной интеграл, заданный в области  $R$ , выражается через повторный интеграл по формуле

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=u(y)}^{x=v(y)} f(x, y) dx dy.$$

При решении задач иногда полезно разбить исходную область интегрирования  $R$  на две или более областей и вычислять двойной интеграл в каждой области отдельно.

### Пример 1

Вычислить интеграл  $\iint_R (x - y) dx dy$ . Область интегрирования  $R$  ограничена графиками функций  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = x$ ,  $y = 2 - x^2$ .

*Решение.*

Область интегрирования  $R$  задана множеством  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x^2\}$  и относится к типу  $I$  (рисунок 1). Выразим двойной интеграл через повторный:

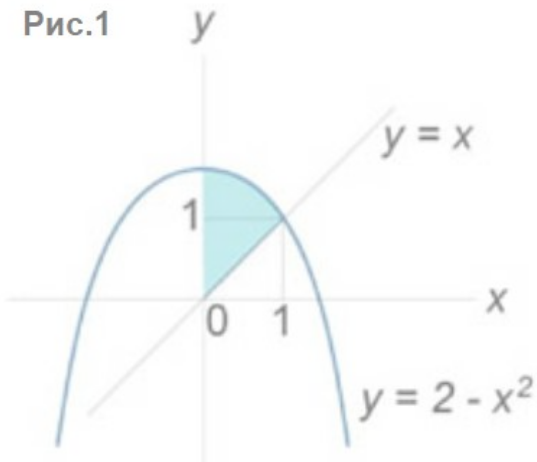
$$\iint_R (x - y) dx dy = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} (x - y) dy dx = \int_0^1 \left[ \int_x^{2-x^2} (x - y) dy \right] dx.$$

Вычислим сначала внутренний интеграл.

$$\begin{aligned} \int_x^{2-x^2} (x - y) dy &= \left( xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x}^{2-x^2} = \left[ x(2-x^2) - \frac{(2-x^2)^2}{2} \right] - \left[ x^2 - \frac{x^2}{2} \right] \\ &= -\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 2x - 2. \end{aligned}$$

Теперь найдем внешний интеграл.

$$\int_0^1 \left( -\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 2x - 2 \right) dx = \left( -\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + x^2 - 2x \right) \Big|_0^1 = -\frac{17}{20}.$$



## Пример 2

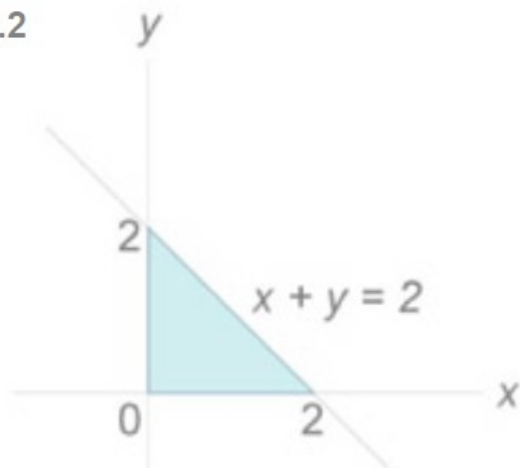
Вычислить интеграл  $\iint_R (x + y) dx dy$ . Область интегрирования  $R$  ограничена прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 2$ .

*Решение.*

Область  $R$  представляется в виде множества  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$  (рисунок 2) и является областью  $I$  типа (элементарной относительно оси  $Oy$ ). Преобразуя двойной интеграл в повторный, получаем:

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dx dy &= \int_0^2 \int_0^{2-x} (x + y) dy dx = \int_0^2 \left[ \int_0^{2-x} (x + y) dy \right] dx = \int_0^2 \left[ \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{2-x} \right] dx \\ &= \int_0^2 \left[ x(2-x) + \frac{(2-x)^2}{2} \right] dx = \int_0^2 \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left( 2x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Рис.2



### Пример 3

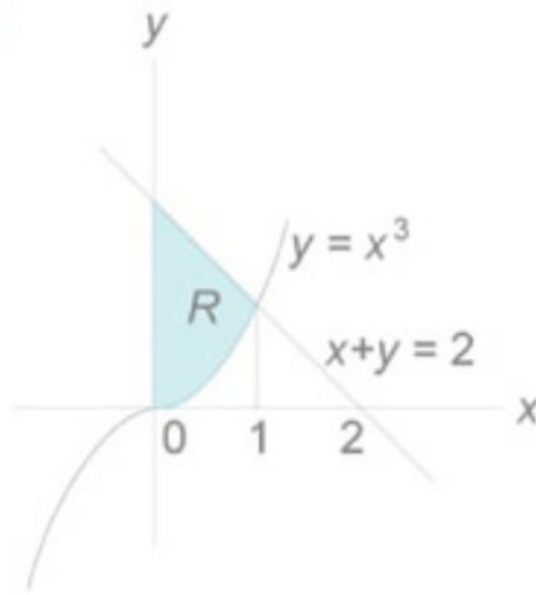
Вычислить интеграл  $\iint_R x dx dy$ , в котором область интегрирования  $R$  ограничена графиками функций  $y = x^3$ ,  $x + y = 2$ ,  $x = 0$ .

*Решение.*

Область  $R$  показана ниже на рисунке 3. Кривая  $y = x^3$  и линейная функция, заданная уравнением  $x + y = 2$ , пересекаются в точке  $(1, 1)$ . Следовательно, двойной интеграл равен

$$\begin{aligned} \iint_R x dx dy &= \int_0^1 \int_{x^3}^{2-x} x dy dx = \int_0^1 \left[ \int_{x^3}^{2-x} x dy \right] dx = \int_0^1 \left[ (xy) \Big|_{y=x^3}^{2-x} \right] dx = \int_0^1 [x(2-x) - x^4] dx \\ &= \left( x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

Рис.3



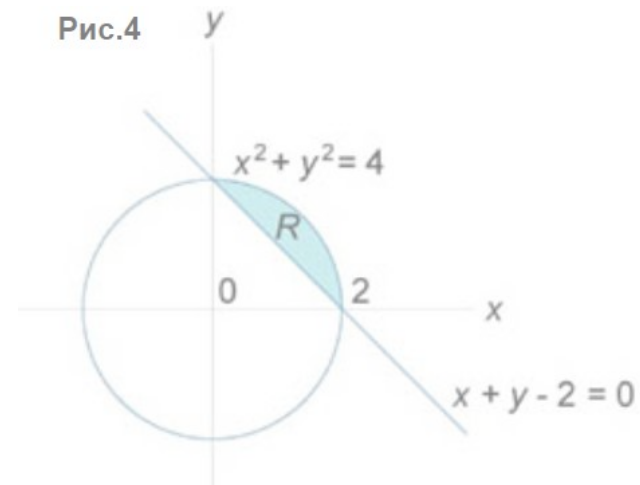
#### Пример 4

Найти интеграл  $\iint_R x^2 y dx dy$ , где область  $R$  представляет собой сегмент окружности. Границы сегмента заданы уравнениями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x + y - 2 = 0$ .

*Решение.*

Окружность  $x^2 + y^2 = 4$  имеет радиус 2 и центр в начале координат. Область интегрирования показана на рисунке 4. Поскольку верхняя полуокружность описывается уравнением  $y = \sqrt{4 - x^2}$ , то двойной интеграл вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_R x^2 y dx dy &= \int_0^2 \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dx dy = \int_0^2 \left[ \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dy \right] dx = \int_0^2 \left[ \left( \frac{x^2 y^2}{2} \right) \Big|_{y=2-x}^{\sqrt{4-x^2}} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[ x^2 (4 - x^2) - x^2 (2 - x)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[ 4x^2 - x^4 - x^2 (4 - 4x + x^2) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^3 - 2x^4) dx = \frac{1}{2} \left( x^4 - \frac{2x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left( 16 - \frac{64}{5} \right) = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$



**Пример 5**

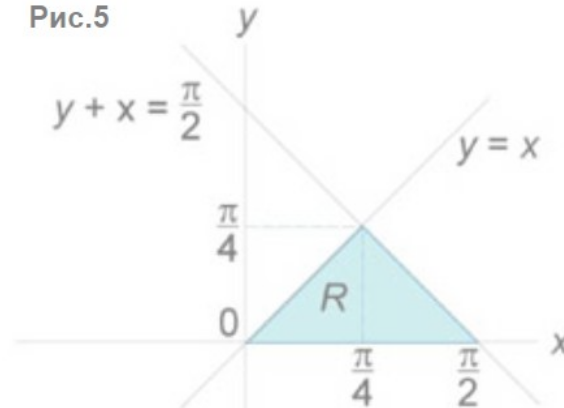
Найти интеграл  $\iint_R \sin(x + y) dx dy$ , заданный в области  $R$ , ограниченной прямыми  $y = x$ ,  $x + y = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = 0$ .

*Решение.*

Область интегрирования  $R$  показана ниже на рисунке 5. Рассматривая ее как область типа  $II$  (элементарную относительно оси  $Ox$ , двойной интеграл можно преобразовать в повторный и вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_R \sin(x + y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x + y) dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ (-\cos(x + y)) \Big|_{x=y}^{\frac{\pi}{2}-y} \right] dy \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} - y + y\right) - \cos 2y \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2y dy = \left( \frac{\sin 2y}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Рис.5



**Пример 6**

Найти интеграл  $\iint_R y dy dx$ , где  $R$  ограничена прямой  $y = 2x$  и параболой  $y = 3 - x^2$ .

*Решение.*

Область интегрирования изображена выше на рисунке 6. Найдем точки пересечения прямой и параболы.

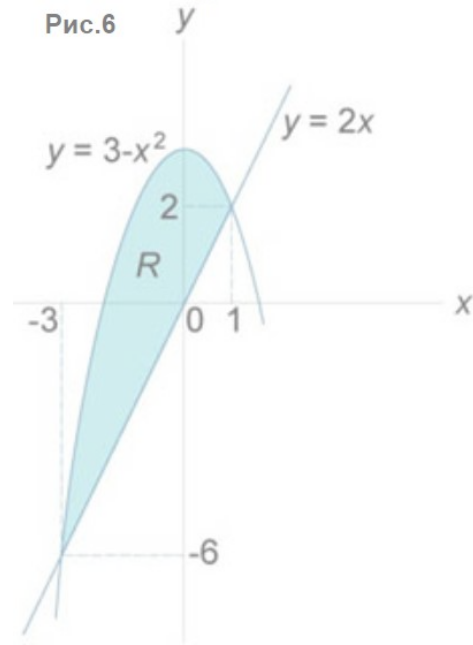
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x^2 \end{cases}, \Rightarrow 2x = 3 - x^2, \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0, \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = -3; 1.$$

Следовательно, линии, ограничивающие область  $R$ , пересекаются в точках  $(-3, -6)$  и  $(1, 2)$ . Тогда исходный двойной интеграл равен

$$\iint_R y dy dx = \int_{-3}^1 \left[ \int_{2x}^{3-x^2} y dy \right] dx = \int_{-3}^1 \left[ \left( \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=2x}^{3-x^2} \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^1 [(3-x^2)^2 - (2x)^2] dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{-3}^1 (9 - 10x^2 + x^4) dx = \frac{1}{2} \left( 9x - \frac{10x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-3}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( 9 - \frac{10}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left( -27 + \frac{10 \cdot 27}{3} - \frac{243}{5} \right) \right] = -\frac{64}{15}. \end{aligned}$$

Рис.6





### Пример 7

Найти интеграл  $\iint_R x \sin y dy dx$ , где область  $R$  ограничена линиями  $y = 0$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 1$ .

*Решение.*

Область интегрирования описывается множеством  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$  и показана ниже на рисунке 7. Двойной интеграл равен

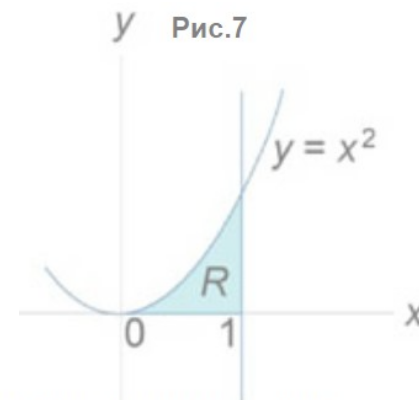
$$\begin{aligned} I &= \iint_R x \sin y dy dx = \int_0^1 \left[ \int_0^{x^2} x \sin y dy \right] dx = \int_0^1 \left[ (-x \cos y) \Big|_{y=0}^{x^2} \right] dx = \int_0^1 (-x \cos x^2 + x \cos 0) dx \\ &= \int_0^1 (1 - \cos x^2) x dx. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем замену

$$z = x^2, \Rightarrow dz = 2x dx, \Rightarrow x dx = \frac{dz}{2}.$$

Если  $x = 0$ , то  $z = 0$ . Соответственно, при  $x = 1$  имеем  $z = 1$ . Тогда интеграл легко вычисляется:

$$I = \int_0^1 (1 - \cos x^2) x dx = \int_0^1 (1 - \cos z) \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos z) dz = \frac{1}{2} (z - \sin z) \Big|_0^1 = \frac{1 - \sin 1}{2} \approx 0,08.$$



**Пример 8**

Вычислить интеграл  $\iint_R e^x dx dy$ . Область интегрирования представляет собой треугольник с вершинами  $O(0,0)$ ,  $B(0,1)$ , и  $C(1,1)$ .

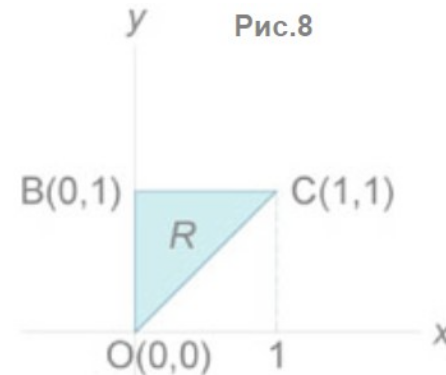
*Решение.*

Область  $R$  показана выше на рисунке 8. Очевидно, уравнение стороны треугольника  $OC$  имеет вид  $y = x$ , а уравнение стороны  $BC$  равно  $y = 1$ . Рассматривая  $R$  как область типа  $I$ , получаем

$$I = \iint_R e^x dx dy = \int_0^1 \left[ \int_x^1 e^x dy \right] dx = \int_0^1 \left[ (e^x y) \Big|_{y=x}^1 \right] dx = \int_0^1 (e^x - x e^x) dx = \int_0^1 e^x (1 - x) dx.$$

Полученный внешний интеграл вычислим с помощью интегрирования по частям. Пусть  $u = 1 - x$ ,  $dv = e^x dx$ . Тогда  $du = -dx$ ,  $v = \int e^x dx = e^x$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^x (1 - x) dx = [e^x (1 - x)] \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = [e^x (1 - x)] \Big|_0^1 + [e^x] \Big|_0^1 = [2e^x - x e^x] \Big|_0^1 \\ &= 2e - e - 2 = e - 2. \end{aligned}$$



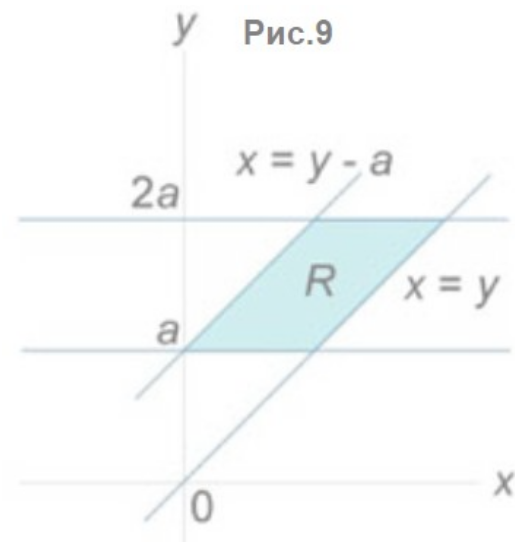
**Пример 9**

Вычислить интеграл  $\iint_R (x + y) dx dy$ , где область  $R$  представляет собой параллелограмм со сторонами  $y = x$ ,  $y = x + a$ ,  $y = a$ ,  $y = 2a$ ,  $a$  – некоторый параметр.

*Решение.*

Будем рассматривать  $R$  как область типа II (элементарную относительно оси  $Ox$ ). Схематически она изображена внизу на рисунке 9. При изменении координаты  $y$  от  $a$  до  $2a$  координата  $x$  принимает значения между  $x = y - a$  и  $x = y$ . Поэтому двойной интеграл равен

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dx dy &= \int_a^{2a} \left[ \int_{y-a}^y (x + y) dx \right] dy = \int_a^{2a} \left[ \left( \frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_{x=y-a}^y \right] dy \\ &= \int_a^{2a} \left[ \left( \frac{y^2}{2} + y^2 \right) - \left( \frac{(y-a)^2}{2} + y(y-a) \right) \right] dy = \int_a^{2a} \left( \frac{3y^2}{2} - \frac{y^2 - 2ay + a^2}{2} - y^2 + ay \right) dy \\ &= \int_a^{2a} \left( 2ay - \frac{a^2}{2} \right) dy = \left( \frac{2ay^2}{2} - \frac{a^2 y}{2} \right) \Big|_a^{2a} = \left( ay^2 - \frac{a^2 y}{2} \right) \Big|_a^{2a} \\ &= \left( a \cdot (2a)^2 - \frac{a^2}{2} \cdot 2a \right) - \left( a \cdot a^2 - \frac{a^2}{2} \cdot a \right) = 4a^3 - a^3 - a^3 + \frac{a^3}{2} = \frac{5a^3}{2}. \end{aligned}$$



## Замена переменных в двойных интегралах

Для вычисления двойного интеграла  $\iint_R f(x, y) dx dy$  иногда удобнее перейти в другую систему координат.

Это может быть обусловлено формой области интегрирования или сложностью подынтегральной функции. В новой системе координат вычисление двойного интеграла значительно упрощается.

Замена переменных в двойном интеграле описывается формулой

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dx dy,$$

где выражение  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$  представляет собой так называемый *якобиан* преобразования

$(x, y) \rightarrow (u, v)$ , а  $S$  – *образ* области интегрирования  $R$ , который можно найти с помощью подстановки  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  в определение области  $R$ . Отметим, что в приведенной выше формуле  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$

означает абсолютное значение соответствующего определителя.

В предположении, что преобразование  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  является взаимно-однозначным, соотношение между якобианами прямого и обратного преобразования координат записывается в виде

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \left( \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} \right|$$

при условии, что знаменатель нигде не равен 0.

Итак, замена переменных в двойном интеграле производится с помощью следующих трех шагов:

1. Найти образ  $S$  в новой системе координат  $(u, v)$  для исходной области интегрирования  $R$ ;
2. Вычислить якобиан преобразования  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  и записать дифференциал в новых переменных  $dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$ ;
3. Заменить в подынтегральном выражении исходные переменные  $x$  и  $y$ , выполнив, соответственно, подстановки  $x = x(u, v)$  и  $y = y(u, v)$ .

### Пример 1

Вычислить двойной интеграл  $\iint_R (y - x) dx dy$ , в котором область определения  $R$  ограничена прямыми  $y = x + 1$ ,  $y = x - 3$ ,  $y = -\frac{x}{3} + 2$ ,  $y = -\frac{x}{3} + 4$ .

*Решение.*

Область  $R$  схематически показана на рисунке 1. Для упрощения интеграла выполним замену переменных. Полагая  $u = y - x$ ,  $v = y + \frac{x}{3}$ , получаем

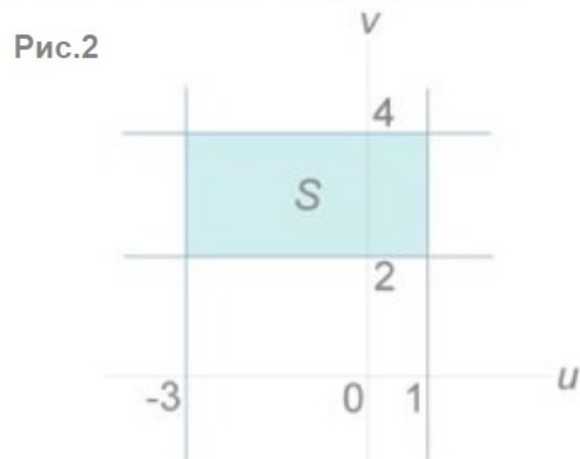
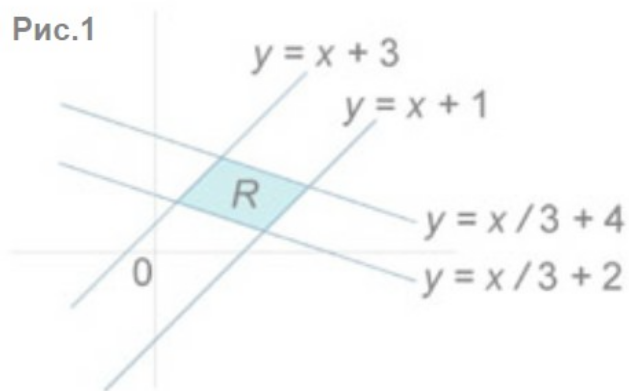
$$y = x + 1, \Rightarrow y - x = 1, \Rightarrow u = 1,$$

$$y = x - 3, \Rightarrow y - x = -3, \Rightarrow u = -3,$$

$$y = -\frac{x}{3} + 2, \Rightarrow y + \frac{x}{3} = 2, \Rightarrow v = 2,$$

$$y = -\frac{x}{3} + 4, \Rightarrow y + \frac{x}{3} = 4, \Rightarrow v = 4.$$

Следовательно, образ  $S$  области  $R$  имеет вид прямоугольника, как показано на рисунке 2.



Определим якобиан данного преобразования. Сначала вычислим определитель обратного преобразования:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(y-x)}{\partial x} & \frac{\partial(y-x)}{\partial y} \\ \frac{\partial\left(y+\frac{x}{3}\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(y+\frac{x}{3}\right)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Тогда якобиан равен

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \left( \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} \right| = \left| \frac{1}{-\frac{4}{3}} \right| = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, дифференциал преобразуется следующим образом:

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \frac{3}{4} dudv.$$

В новых переменных  $(u, v)$  интеграл вычисляется намного легче:

$$\begin{aligned} \iint_R (y-x) dxdy &= \iint_S \left( u \cdot \frac{3}{4} dudv \right) = \frac{3}{4} \int_{-3}^1 u du \int_2^4 dv = \frac{3}{4} \left( \frac{u^2}{2} \right) \Big|_{-3}^1 \cdot v \Big|_2^4 \\ &= \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \right) \cdot (4-2) = -6. \end{aligned}$$

## Пример 2

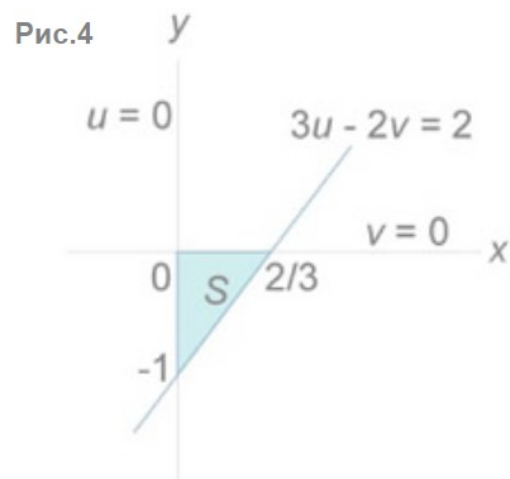
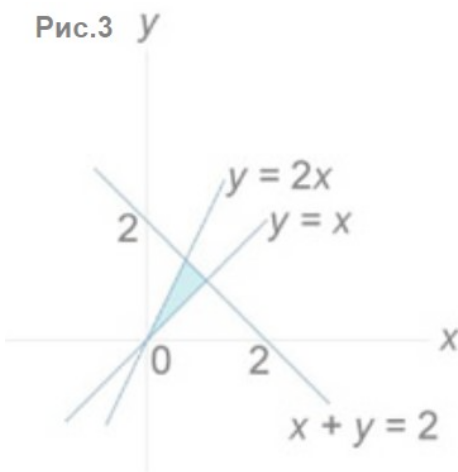
Вычислить двойной интеграл  $\iint_R (x + y) dx dy$ , в котором область интегрирования  $R$  ограничена прямыми линиями  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $x + y = 2$ .

*Решение.*

Область интегрирования  $R$  имеет вид неправильного треугольника и показана на рисунке 3. Чтобы упростить ее, введем новые переменные:  $y - x = u$ ,  $y - 2x = v$ . Выразим  $x, y$  через  $u, v$  и определим образ области интегрирования  $S$  в новой системе координат. Легко видеть, что

$$y = x, \Rightarrow y - x = 0, \Rightarrow u = 0,$$

$$y = 2x, \Rightarrow y - 2x = 0, \Rightarrow v = 0.$$



Заметим, что  $u - v = (y - x) - (y - 2x) = x$ .

Следовательно,  $y = x + u = u - v + u = 2u - v$ .

Таким образом, мы получаем  $x + y = 2, \Rightarrow u - v + 2u - v = 2, \Rightarrow 3u - 2v = 2$ .

Если  $v = 0$ , то  $u = \frac{2}{3}$ . Соответственно, если  $u = 0$ , то  $v = -1$ . Область  $S$  имеет вид прямоугольного треугольника (см. рисунок 4 выше).

Уравнение стороны  $3u - 2v = 2$  можно переписать в виде  $3u - 2v = 2, \Rightarrow v = \frac{3u - 2}{2} = \frac{3}{2}u - 1$ .



Найдем якобиан.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(2u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u-v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 = 1.$$

Следовательно,  $dx dy = du dv$  и двойной интеграл становится равным

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dx dy &= \iint_S (u - v + 2u - v) du dv = \iint_S (3u - 2v) du dv = \int_0^{\frac{2}{3}} \left[ \int_{\frac{3}{2}u-1}^0 (3u - 2v) dv \right] du \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[ (3uv - v^2) \Big|_{v=\frac{3}{2}u-1}^0 \right] du = - \int_0^{\frac{2}{3}} \left[ 3u \left( \frac{3}{2}u - 1 \right) - \left( \frac{3}{2}u - 1 \right)^2 \right] du \\ &= - \int_0^{\frac{2}{3}} \left( \frac{9u^2}{2} - 3u - \frac{9u^2}{4} + 3u - 1 \right) du = - \int_0^{\frac{2}{3}} \left( \frac{9u^2}{4} - 1 \right) du = \left( u - \frac{9}{4} \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^3 = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

### Пример 3

Вычислить интеграл  $\iint_R dx dy$ , где область  $R$  ограничена парабололами  $y^2 = 2x$ ,  $y^2 = 3x$  и гиперболами  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ .

Решение.

Область  $R$  схематически показана на рисунке 5.

Для упрощения области  $R$  сделаем замену переменных.

$$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = xy \end{cases}.$$

Образ  $S$  области  $R$  определяется следующим образом:

$$y^2 = 2x, \Rightarrow \frac{y^2}{x} = 2, \Rightarrow u = 2,$$

$$y^2 = 3x, \Rightarrow \frac{y^2}{x} = 3, \Rightarrow u = 3,$$

$$xy = 1, \Rightarrow v = 1,$$

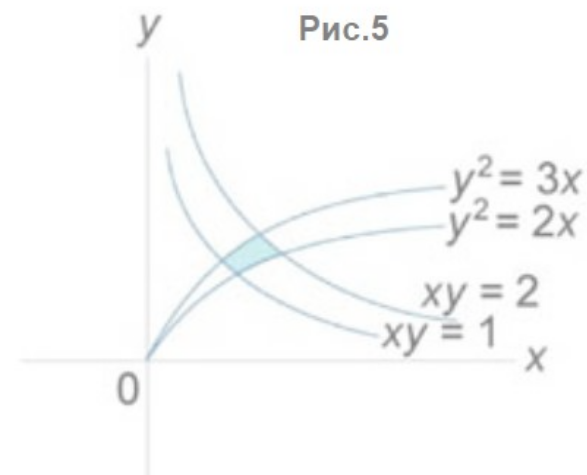
$$xy = 2, \Rightarrow v = 2.$$

Как видно, образ  $S$  является прямоугольником. Для нахождения якобиана выразим переменные  $x, y$  через  $u, v$ .

$$u = \frac{y^2}{x}, \Rightarrow x = \frac{y^2}{u}, \quad v = xy, \Rightarrow v = \frac{y^2}{u} \cdot y, \Rightarrow y^3 = uv.$$

Отсюда следует

$$y = \sqrt[3]{uv} = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{y^2}{u} = \frac{\sqrt[3]{u^2 v^2}}{u} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}} = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}.$$



Находим якобиан данного преобразования.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\right) & u^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{9}u^{-1} - \frac{2}{9}u^{-1} = -\frac{1}{3}u^{-1} = -\frac{1}{3u}.\end{aligned}$$

Соотношение между дифференциалами имеет вид

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \left| -\frac{1}{3u} \right| dudv = \frac{dudv}{3u}.$$

Теперь легко найти искомый интеграл:

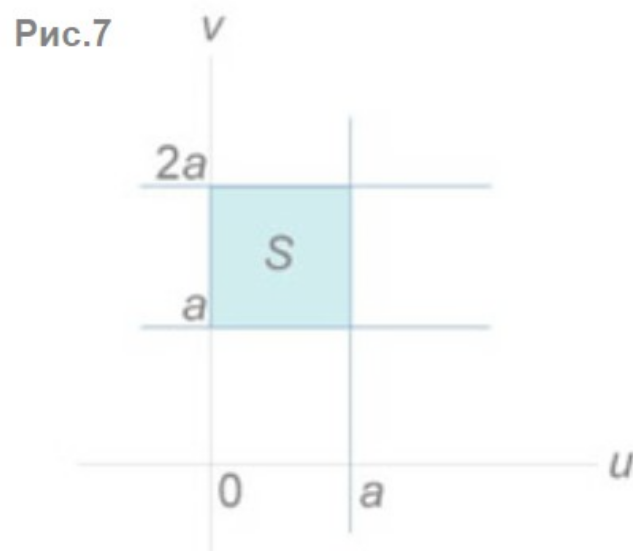
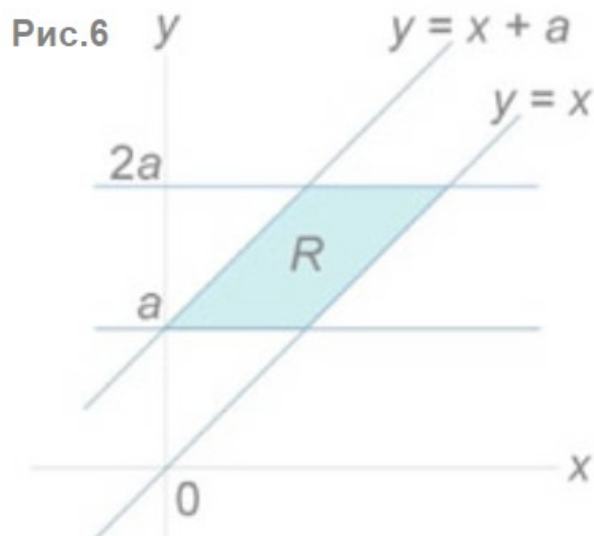
$$\iint_R dxdy = \iint_S \frac{dudv}{3u} = \int_2^3 \frac{du}{3u} \int_1^2 dv = \frac{1}{3} (\ln u) \Big|_2^3 \cdot v \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (\ln 3 - \ln 2) \cdot (2 - 1) = \frac{1}{3} \ln \frac{3}{2}.$$

#### Пример 4

Вычислить интеграл  $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ , где область  $R$  ограничена прямыми  $y = x$ ,  $y = x + a$ ,  $y = a$ ,  $y = 2a$  ( $a > 0$ ).

Решение.

Область интегрирования  $R$  имеет форму параллелограмма и показана на рисунке 6.



Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = y - u = v - u \\ y = v \end{cases}.$$

Цель этой замены – упростить область интегрирования  $R$ .

Найдем образ  $S$  области  $R$  в новых координатах  $(u, v)$ .

$$y = x, \Rightarrow y - x = 0, \Rightarrow u = 0,$$

$$y = x + a, \Rightarrow y - x = a, \Rightarrow u = a,$$

$$y = a, \Rightarrow v = a,$$

$$y = 2a, \Rightarrow v = 2a.$$

Из рисунка 7 видно, что область  $S$  представляет собой прямоугольник. Вычислим якобиан.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(v-u)}{\partial u} & \frac{\partial(v-u)}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = -1,$$

так что

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = |-1| \cdot dudv = dudv.$$

Теперь можно вычислить двойной интеграл.

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_S [(v - u)^2 + v^2] dudv = \iint_S (v^2 - 2uv + u^2 + v^2) dudv \\ &= \int_a^{2a} \left[ \int_0^a (2v^2 - 2uv + u^2) du \right] dv = \int_a^{2a} \left[ \left( 2v^2u - vu^2 + \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{u=0}^a \right] dv = \int_a^{2a} \left( 2av^2 - a^2v + \frac{a^3}{3} \right) dv \\ &= \left( 2a \cdot \frac{v^3}{3} - a^2 \cdot \frac{v^2}{2} + \frac{a^3}{3} \cdot v \right) \Big|_a^{2a} = \left( \frac{2a}{3} \cdot 8a^3 - \frac{a^2}{2} \cdot 4a^2 + \frac{a^3}{3} \cdot 2a \right) \\ &\quad - \left( \frac{2a}{3} \cdot a^3 - \frac{a^2}{2} \cdot a^2 + \frac{a^3}{3} \cdot a \right) = \frac{7a^4}{2}.\end{aligned}$$



