Определение двойного интеграла

Понятие интеграла может быть расширено на функции двух и большего числа переменных. Рассмотрим, например, функцию двух переменных $z = f(x,y)$. Двойной интеграл от функции $f(x,y)$ обозначается как

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA,$$

где R - область интегрирования в плоскости Oxy. Если определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от функции одной переменной $f(x) \geq 0$ выражает площадь под кривой $f(x)$ в интервале от $x = a$ до $x = b$, то двойной интеграл выражает объем под поверхностью $z = f(x,y)$ выше плоскости Oxy в области интегрирования R (рисунок 1).

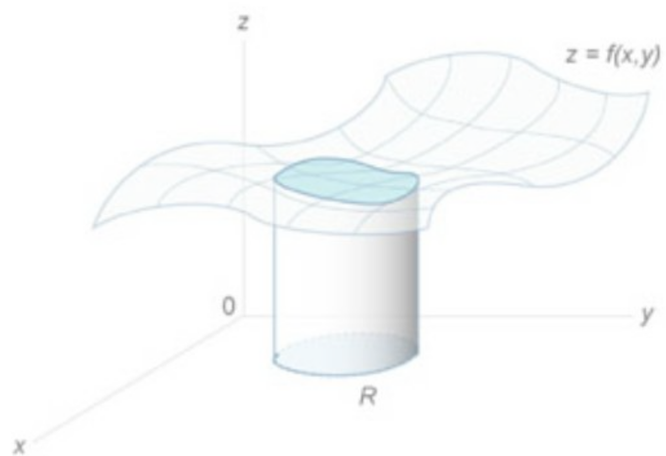


Рис.1

Формально двойной интеграл можно ввести как предел *суммы Римана*. Пусть, для простоты, область интегрирования R представляет собой прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$ (рисунок 2). Используя ряд чисел $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$, разобьем отрезок $[a, b]$ на малые интервалы таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{m-1} < x_m = b.$$

Аналогично, пусть множество чисел $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ является разбиением отрезка $[c, d]$ вдоль оси Oy, при котором справедливы неравенства

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_j < \ldots < y_{n-1} < y_n = d.$$

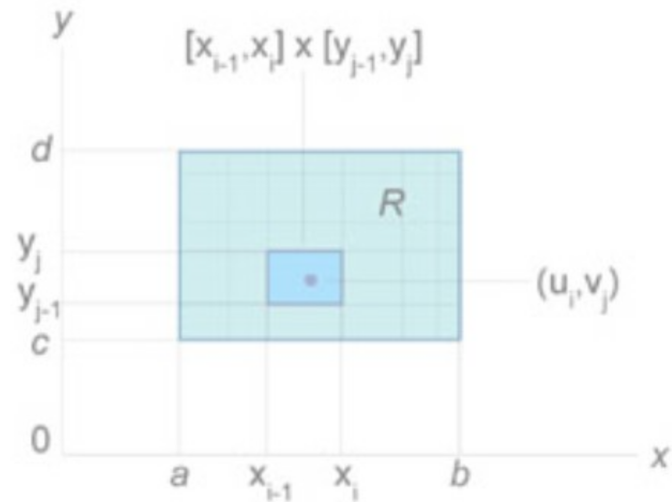


Рис.2

Суммой Римана функции $f(x,y)$ над разбиением $[a, b] \times [c, d]$ называется выражение

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(u_i, v_j\right) \Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\left(u_i, v_j\right)$ - некоторая точка в прямоугольнике $(x_{i-1}, x_i) \times \left(y_{j-1}, y_j\right)$ и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Двойной интеграл от функции $f(x,y)$ в прямоугольной области $[a,b]\times[c,d]$ определяется как предел суммы Римана, при котором максимальные значения Δx_i и Δy_j стремятся к нулю:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(u_i, v_j)\,\Delta x_i \Delta y_j.$$

Чтобы определить двойной интеграл в произвольной области R, отличной от прямоугольной, выберем прямоугольник $[a,b]\times[c,d]$, покрывающий область R (рисунок 3), и введем функцию $g(x,y)$, такую, что

$$\begin{cases} g(x,y) = f(x,y), & \text{если } f(x,y) \in R \\ g(x,y) = 0, & \text{если } f(x,y) \notin R \end{cases}.$$

Тогда двойной интеграл от функции $f(x,y)$ в произвольной области R определяется как

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,dA = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} g(x,y)\,dA.$$

Рис.3

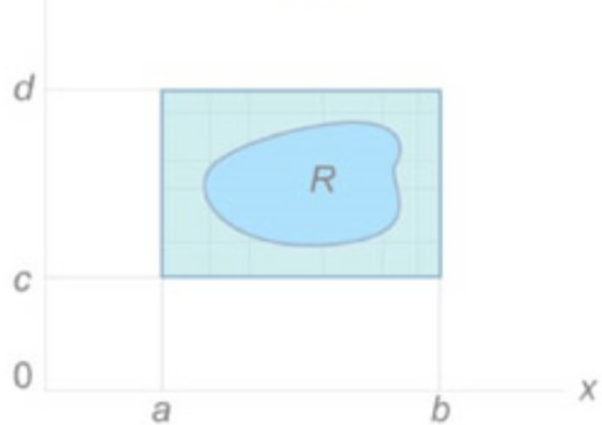


Рис.4

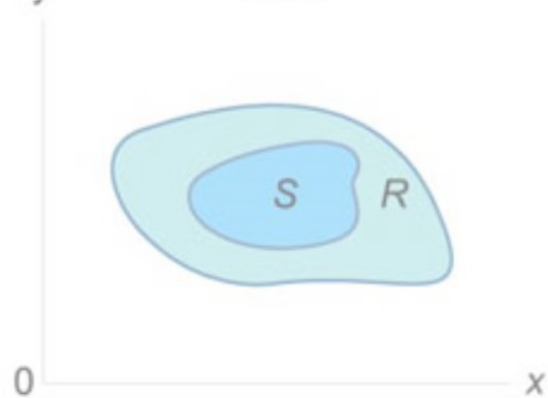
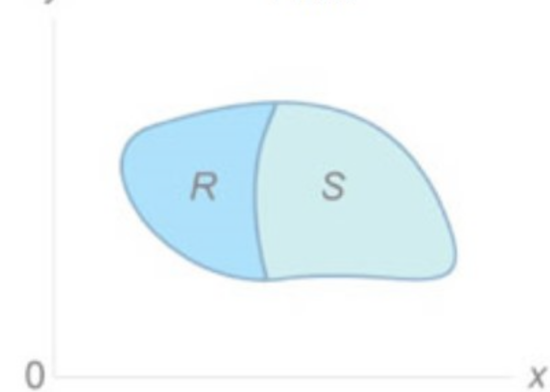


Рис.5



Свойства двойного интеграла

Двойной интеграл обладает следующими свойствами:

1. $\iint\limits_R [f(x,y) + g(x,y)]\,dA = \iint\limits_R f(x,y)\,dA + \iint\limits_R g(x,y)\,dA;$
2. $\iint\limits_R [f(x,y) - g(x,y)]\,dA = \iint\limits_R f(x,y)\,dA - \iint\limits_R g(x,y)\,dA;$
3. $\iint\limits_R kf(x,y)\,dA = k\iint\limits_R f(x,y)\,dA$, где k - константа;
4. Если $f(x,y) \le g(x,y)$ в области R, то $\iint\limits_R f(x,y)\,dA \le \iint\limits_R g(x,y)\,dA;$
5. Если $f(x,y) \ge 0$ в области R и $S \subset R$ (рисунок 4), то $\iint\limits_S f(x,y)\,dA \le \iint\limits_R f(x,y)\,dA;$
6. Если $f(x,y) \ge 0$ на R и области R и S являются непересекающимися (рисунок 5), то

   $$\iint\limits_{R\cup S} f(x,y)\,dA = \iint\limits_R f(x,y)\,dA + \iint\limits_S f(x,y)\,dA.$$

   Здесь $R \cup S$ означает объединение этих двух областей.

Пример

Пусть R и S являются непересекающимися областями (рисунок 5). Известны значения двойных интегралов:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = 2,\ \iint\limits_R g(x,y)\,dA = 3,\ \iint\limits_S f(x,y)\,dA = 6,\ \iint\limits_S g(x,y)\,dA = 7.$$

Оценить интеграл $\iint\limits_{R\cup S} [10f(x,y) + 20g(x,y)]\,dA$.

Решение.
Используя свойства двойных интегралов, получаем:

$$\iint\limits_{R\cup S} [10f(x,y) + 20g(x,y)]\,dA = \iint\limits_{R\cup S} 10f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R\cup S} 20g(x,y)\,dA$$
$$= 10\iint\limits_{R\cup S} f(x,y)\,dA + 20\iint\limits_{R\cup S} g(x,y)\,dA = 10\left[\iint\limits_R f(x,y)\,dA + \iint\limits_S f(x,y)\,dA\right]$$
$$+ 20\left[\iint\limits_R g(x,y)\,dA + \iint\limits_S g(x,y)\,dA\right] = 10(2+6) + 20(3+7) = 280.$$

Повторные интегралы

Области интегрирования I и II типа

Двойные интегралы вычисляются, как правило, с помощью повторных интегралов. Однако переход от двойных к повторным интегралам возможен не для произвольной области интегрирования R, а для областей определенного типа. Введем понятия областей интегрирования типа I и II.

Определение 1. Говорят, что область R на плоскости относится к *типу I* или является *элементарной относительно оси Oy*, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от x (рисунок 1), и описывается множеством:

$$R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ p(x) \le y \le q(x)\}.$$

Определение 2. Говорят, что область R на плоскости относится к *типу II* или является *элементарной относительно оси Ox*, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от y (рисунок 2), и описывается множеством:

$$R = \{(x,y) \mid u(y) \le x \le v(y),\ c \le y \le d\}.$$

Рис.1

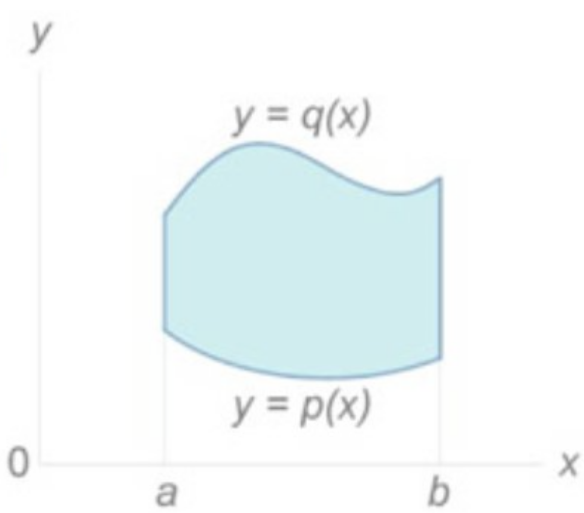
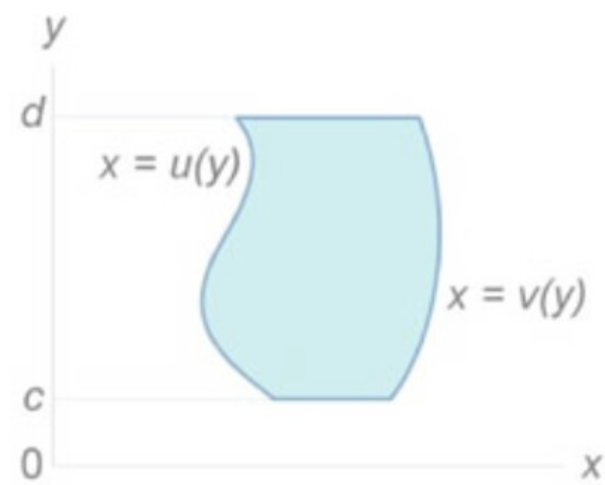


Рис.2



Связь между двойными и повторными интегралами

Пусть $f(x,y)$ является непрерывной функцией в области R типа I :

$$R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ p(x) \le y \le q(x)\}.$$

Тогда двойной интеграл от функции $f(x,y)$ в данной области выражается через повторный интеграл в виде

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int\limits_a^b \int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy dx.$$

Для области интегрирования типа II существует аналогичная формула. Если $f(x,y)$ является непрерывной функцией в области R типа II :

$$R = \{(x,y) \mid u(y) \le x \le v(y),\ c \le y \le d\},$$

то справедливо соотношение

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int\limits_c^d \int\limits_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx dy.$$

Приведенные формулы (в англоязычной литературе они известны как *теорема Фубини*) позволяют вычислять двойные интегралы через повторные. В повторных интегралах сначала находится внутренний интеграл, а затем - внешний.

Пример 1

Найти повторный интеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_1^2 xydydx$.

Решение.
Сначала вычислим внутренний интеграл и затем внешний.

$$\int\limits_0^1 \int\limits_1^2 xydydx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_1^2 xydy \right] dx = \int\limits_0^1 \left[x \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^2 \right] dx = \int\limits_0^1 \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Пример 2

Найти повторный интеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_y^{y^2} (x + 2y)\, dxdy$.

Решение.
Здесь область интегрирования относится к типу II (является элементарной относительно оси Ox). Вычисляя сначала внутренний интеграл по x, и затем внешний по y, получаем

$$\int\limits_0^1 \int\limits_y^{y^2} (x + 2y)\, dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_y^{y^2} (x + 2y)\, dx \right] dy = \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Big|_y^{y^2} \right] dy$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{y^4}{2} + 2y^3 \right) - \left(\frac{y^2}{2} + 2y^2 \right) \right] dy = \int\limits_0^1 \left[\frac{y^4}{2} + 2y^3 - \frac{5y^2}{2} \right] dy = \left[\frac{y^5}{10} + \frac{y^4}{2} - \frac{5y^3}{6} \right] \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = -\frac{7}{30}.$$

Пример 3

Вычислить $\int\limits_1^2 \int\limits_0^y x\sqrt{y^2+x^2}dxdy.$

Решение.
Запишем повторный интеграл в виде

$$I = \int\limits_1^2 \int\limits_0^y x\sqrt{y^2+x^2}dxdy = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_0^y x\sqrt{y^2+x^2}dx\right] dy.$$

Чтобы найти внутренний интеграл в квадратных скобках, сделаем замену:

$$z = y^2 + x^2, \;\Rightarrow dz = 2xdx, \;\Rightarrow xdx = \frac{dz}{2}.$$

Если $x = 0$, то $z = y^2$, и, соответственно, если $x = y$, то $z = 2y^2$. Тогда

$$I = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_0^y x\sqrt{y^2+x^2}dx\right] dy = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_{y^2}^{2y^2} \sqrt{z}\frac{dz}{2}\right] dy = \int\limits_1^2 \left[\left(\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_{y^2}^{2y^2}\right] dy$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_1^2 \left[\left(2y^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] dy = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 \left[2\sqrt{2}y^3 - y^3\right] dy = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\int\limits_1^2 y^3 dy = \frac{2\sqrt{2}-1}{12}\left(y^4\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{5\left(2\sqrt{2}-1\right)}{4}.$$

Пример 4

Вычислить $\int\limits_0^1 \int\limits_0^y \ln\left(y^2+1\right) dx dy$.

Решение.

Вычисляя внутренний интеграл, получаем

$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^y \ln\left(y^2+1\right) dx dy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^y \ln\left(y^2+1\right) dx\right] dy = \int\limits_0^1 \left[\ln\left(y^2+1\right) x|_0^y\right] dy = \int\limits_0^1 \ln\left(y^2+1\right) y dy.$$

Далее используем интегрирование по частям: $\int u dv = uv - \int v du$. Пусть $u = \ln\left(y^2+1\right)$, $dv = y dy$. Тогда

$$du = \frac{d}{dy}\ln\left(y^2+1\right) = \frac{2y dy}{y^2+1},\ \ v = \int y dy = \frac{y^2}{2}.$$

Подставляя это, получаем

$$I = \int\limits_0^1 \ln\left(y^2+1\right) y dy = \left[\frac{y^2}{2}\ln\left(y^2+1\right)\right]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\frac{2y dy}{y^2+1} = \left[\frac{y^2}{2}\ln\left(y^2+1\right)\right]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{y^3 dy}{y^2+1}$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \int\limits_0^1 \frac{y^3 dy}{y^2+1}.$$

Наконец, вычислим последний интеграл:

$$\int_0^1 \frac{y^3dy}{y^2+1} = \int_0^1 \frac{y^3+y-y}{y^2+1}dy = \int_0^1 \left[y - \frac{y}{y^2+1}\right]dy = \int_0^1 ydy - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(y^2+1\right)}{y^2+1}$$
$$= \left[\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(y^2+1\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Окончательный ответ:

$$I = \cancel{\frac{\ln 2}{2}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5

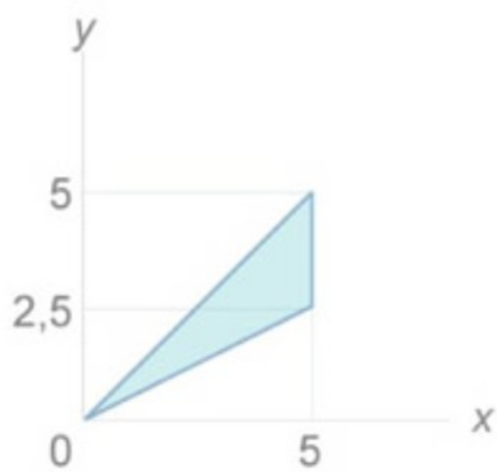
Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $I = \int\limits_0^5 \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} f\left(x,y\right) dydx.$

Решение.

Область интегрирования относится к типу I (рисунок 3). Она представляет собой треугольник, ограниченный прямыми $y = \frac{x}{2}$ или $x = 2y$ и $y = x$ или $x = y$. Переменная x изменяется в интервале $0 \le x \le 5$. Изменяя порядок интегрирования, исходный интеграл можно записать в виде суммы следующих двух повторных интегралов:

$$I = \int\limits_{0}^{2{,}5} \int\limits_{y}^{2y} f(x,y)\,dxdy + \int\limits_{2{,}5}^{5} \int\limits_{y}^{5} f(x,y)\,dxdy.$$

Рис.3



Двойные интегралы в прямоугольной области

Пусть область интегрирования R представляет собой прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$. Тогда двойной интеграл в такой области выражается через повторный интеграл в следующем виде:

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

В данном случае область интегрирования R относится одновременно к типу I и II, так что у нас есть возможность выбирать, по какой переменной (x или y) начинать интегрировать функцию $f(x, y)$. Обычно удобнее начинать с более простого интеграла.

В частном случае, когда подынтегральная функция $f(x, y)$ "расщепляется" на произведение $g(x)\, h(y)$, двойной интеграл равен произведению двух определенных интегралов:

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_R g(x)\, h(y)\, dxdy = \left(\int\limits_a^b g(x)\, dx \right) \left(\int\limits_c^d h(y)\, dy \right).$$

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R xydxdy$ в области $R = \{(x, y) \mid 2 \le x \le 5, 0 \le y \le 1\}$.

Решение.
Как видно, подынтегральная функция $f(x, y)$ представляет собой произведение $g(x)\,h(y)$. Следовательно, интеграл равен

$$\iint\limits_R xydxdy = \int\limits_2^4 xdx \cdot \int\limits_0^1 ydy = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = (8-2)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 3.$$

Пример 2

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R xy^2dxdy$, заданный в области $R = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 5, 0 \le y \le 2\}$.

Решение.
Поскольку функция $f(x, y)$ представляет собой произведение $g(x)\,h(y)$, интеграл равен

$$\iint\limits_R xy^2dxdy = \int\limits_1^5 xdx \cdot \int\limits_0^2 y^2dy = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^5 \cdot \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{3} - 0\right) = 64.$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, заданный в области $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$.

Решение.

Выражая двойной интеграл через повторный (в котором внутренний интеграл зависит от x), получаем

$$\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 \int\limits_0^2 \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x+y)^2} \right] dy = \int\limits_1^2 \left[\left(-\frac{1}{x+y} \right) \Bigg|_{x=0}^2 \right] dy$$

$$= \int\limits_1^2 \left[-\frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} \right] dy = [\ln y - \ln(y+2)]|_1^2 = \left(\ln \frac{y}{y+2} \right) \Bigg|_1^2 = \ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3} = \ln \frac{3}{2}.$$

Пример 4

Вычислить интеграл $\iint\limits_R \cos(x+y)dxdy$ в области $R = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

Решение.

В данном случае также удобно сначала проинтегрировать по x и затем по y.

$$\iint\limits_R \cos(x+y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dx\right]dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(\sin(x+y))\Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\right]dy$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right) - \sin y\right]dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\cancel{y}-\cancel{y}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+y+y}{2}\right]dy$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)dy = \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)dy = \sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\left[\sin\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right] = 0.$$

Пример 5

Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x-y^2)\,dxdy$, заданный в области $R=\{(x,y)\mid 2\le x\le 3, 1\le y\le 2\}$.

Решение.

Выразим двойной интеграл через повторный. Сначала проинтегрируем по x, затем по y.

$$\iint\limits_R (x-y^2)\,dxdy=\int_1^2\int_2^3 (x-y^2)\,dxdy=\int_1^2\left[\int_2^3 (x-y^2)\,dx\right]dy=\int_1^2\left[\left.\left(\frac{x^2}{2}-y^2x\right)\right|_{x=2}^3\right]dy$$

$$=\int_1^2\left[\left(\frac{9}{2}-3y^2\right)-\left(2-2y^2\right)\right]dy=\int_1^2\left(\frac{5}{2}-y^2\right)dy=\left.\left(\frac{5}{2}y-\frac{y^3}{3}\right)\right|_1^2$$

$$=\left(5-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}.$$

Мы можем поменять порядок интегрирования. Результат, разумеется, не изменится.

$$\iint\limits_R (x-y^2)\,dxdy=\int_2^3\int_1^2 (x-y^2)\,dydx=\int_2^3\left[\int_1^2 (x-y^2)\,dy\right]dx=\int_2^3\left[\left.\left(xy-\frac{y^3}{3}\right)\right|_{y=1}^2\right]dx$$

$$=\int_2^3\left[\left(2x-\frac{8}{3}\right)-\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]dx=\int_2^3\left(x-\frac{7}{3}\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{7x}{3}\right)\right|_2^3$$

$$=\left(\frac{9}{2}-7\right)-\left(2-\frac{14}{3}\right)=\frac{1}{6}.$$

Двойные интегралы в произвольной области

Пусть область интегрирования R типа I (элементарная относительно оси Oy) ограничена графиками функций $x = a, x = b, y = p(x)$ и $y = q(x)$. При этом выполняются неравенства $a < b$ и $p(x) < q(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда двойной интеграл по области R выражается через повторный по формуле

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{x=a}^{x=b} \int\limits_{y=p(x)}^{y=q(x)} f(x, y)\, dydx.$$

Аналогичное соотношение существует и для области типа II. Пусть область интегрирования R типа II (элементарная относительно оси Ox) ограничена графиками функций $x = u(y), x = v(y), y = c, y = d$ при условии, что $c < d$ и $u(y) < v(y)$ для всех $y \in [c, d]$. Тогда двойной интеграл, заданный в области R, выражается через повторный интеграл по формуле

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{y=c}^{y=d} \int\limits_{x=u(y)}^{x=v(y)} f(x, y)\, dxdy.$$

При решении задач иногда полезно разбить исходную область интегрирования R на две или более областей и вычислять двойной интеграл в каждой области отдельно.

Пример 1

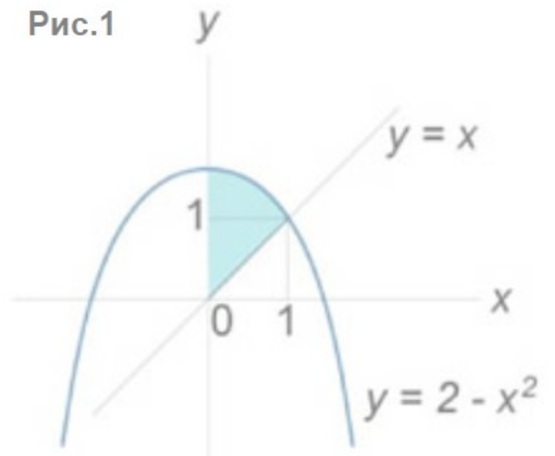
Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x-y)\,dxdy$. Область интегрирования R ограничена графиками функций $x=0$, $x=1$, $y=x$, $y=2-x^2$.

Решение.

Область интегрирования R задана множеством $R=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, x\le y\le 2-x^2\right\}$ и относится к типу I (рисунок 1). Выразим двойной интеграл через повторный:

$$\iint\limits_R (x-y)\,dxdy = \int\limits_0^1\int\limits_x^{2-x^2}(x-y)\,dydx = \int\limits_0^1\left[\int\limits_x^{2-x^2}(x-y)\,dy\right]dx.$$

Рис.1



Вычислим сначала внутренний интеграл.

$$\int\limits_x^{2-x^2}(x-y)\,dy = \left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^{2-x^2} = \left[x\left(2-x^2\right)-\frac{\left(2-x^2\right)^2}{2}\right]-\left[x^2-\frac{x^2}{2}\right]$$

$$= -\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{3x^2}{2}+2x-2.$$

Теперь найдем внешний интеграл.

$$\int\limits_0^1\left(-\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{3x^2}{2}+2x-2\right)dx = \left(-\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+x^2-2x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{17}{20}.$$

Пример 2

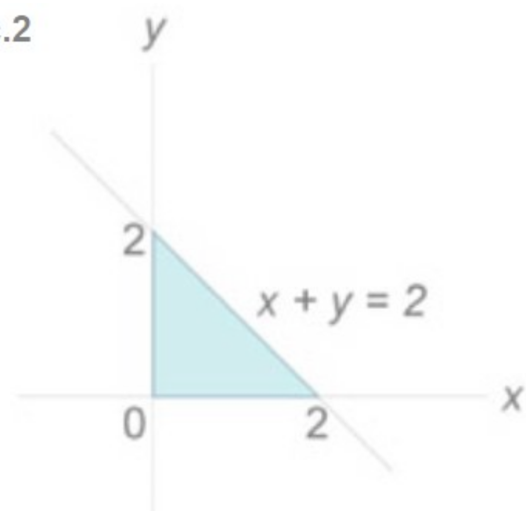
Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x+y)\,dxdy$. Область интегрирования R ограничена прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

Решение.
Область R представляется в виде множества $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2-x\}$ (рисунок 2) и является областью I типа (элементарной относительно оси Oy). Преобразуя двойной интеграл в повторный, получаем:

$$\iint\limits_R (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2-x} (x+y)\,dydx = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^{2-x} (x+y)\,dy\right] dx = \int\limits_0^2 \left[\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{2-x}\right] dx$$

$$= \int\limits_0^2 \left[x(2-x)+\frac{(2-x)^2}{2}\right] dx = \int\limits_0^2 \left(2-\frac{x^2}{2}\right) dx = \left(2x-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Рис.2



Пример 3

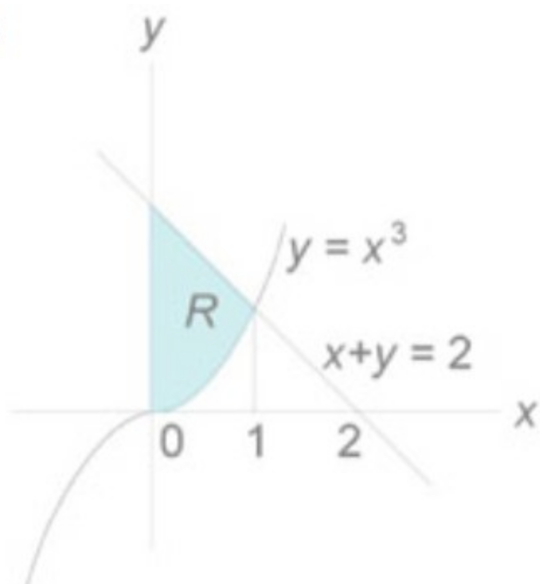
Вычислить интеграл $\iint\limits_R x dx dy$, в котором область интегрирования R ограничена графиками функций $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$.

Решение.
Область R показана ниже на рисунке 3. Кривая $y = x^3$ и линейная функция, заданная уравнением $x + y = 2$, пересекаются в точке $(1, 1)$. Следовательно, двойной интеграл равен

$$\iint\limits_R x dx dy = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^3}^{2-x} x dy dx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^3}^{2-x} x dy \right] dx = \int\limits_0^1 \left[(xy)\Big|_{y=x^3}^{2-x} \right] dx = \int\limits_0^1 \left[x(2-x) - x^4 \right] dx$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}.$$

Рис.3



Пример 4

Найти интеграл $\iint\limits_R x^2 y dx dy$, где область R представляет собой сегмент окружности. Границы сегмента заданы уравнениями $x^2+y^2=4$, $x+y-2=0$.

Решение.

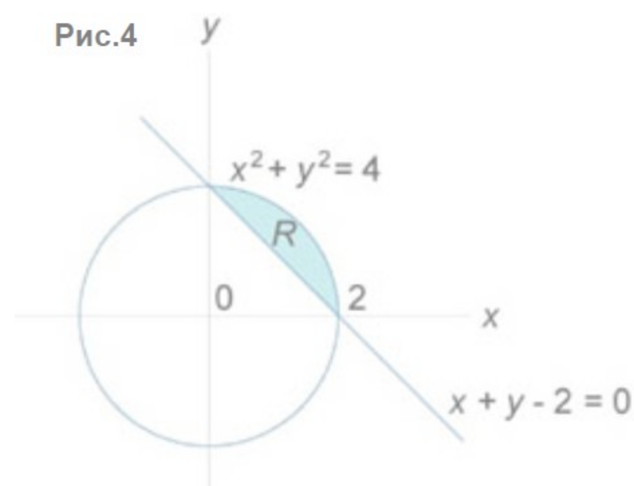
Окружность $x^2+y^2=4$ имеет радиус 2 и центр в начале координат. Область интегрирования показана на рисунке 4. Поскольку верхняя полуокружность описывается уравнением $y=\sqrt{4-x^2}$, то двойной интеграл вычисляется следующим образом:

$$\iint\limits_R x^2 y dx dy = \int\limits_0^2 \int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dx dy = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dy \right] dx = \int\limits_0^2 \left[\left(\frac{x^2 y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=2-x}^{\sqrt{4-x^2}} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left[x^2 \left(4-x^2\right) - x^2 (2-x)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left[4x^2 - x^4 - x^2 \left(4-4x+x^2\right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left(4x^3 - 2x^4\right) dx = \frac{1}{2} \left(x^4 - \frac{2x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{1}{2} \left(16 - \frac{64}{5} \right) = \frac{8}{5}.$$

Рис.4



Пример 5

Найти интеграл $\iint\limits_R \sin(x+y)dxdy$, заданный в области R, ограниченной прямыми $y=x$, $x+y=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

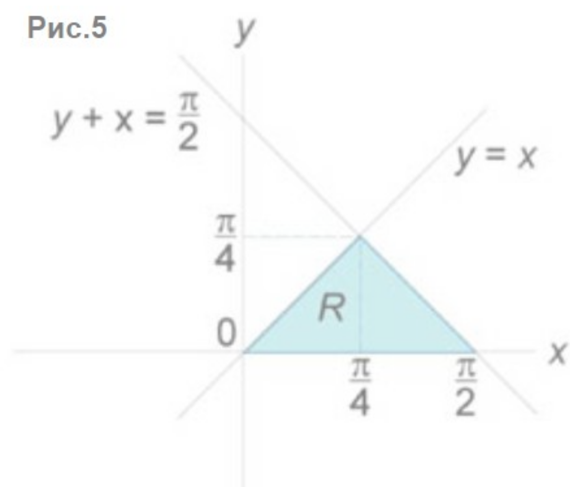
Решение.

Область интегрирования R показана ниже на рисунке 5. Рассматривая ее как область типа II (элементарную относительно оси Ox, двойной интеграл можно преобразовать в повторный и вычислить следующим образом:

$$\iint\limits_R \sin(x+y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x+y)dx\right]dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(-\cos(x+y)\right)\Big|_{x=y}^{\frac{\pi}{2}-y}\right]dy$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-y+y\right)-\cos 2y\right]dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2ydy = \left(\frac{\sin 2y}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Рис.5



Пример 6

Найти интеграл $\iint\limits_R y\,dy\,dx$, где R ограничена прямой $y=2x$ и параболой $y=3-x^2$.

Решение.
Область интегрирования изображена выше на рисунке 6. Найдем точки пересечения прямой и параболы.

$$\begin{cases} y=2x \\ y=3-x^2 \end{cases}, \Rightarrow 2x=3-x^2, \Rightarrow x^2+2x-3=0, \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=-3;\ 1.$$

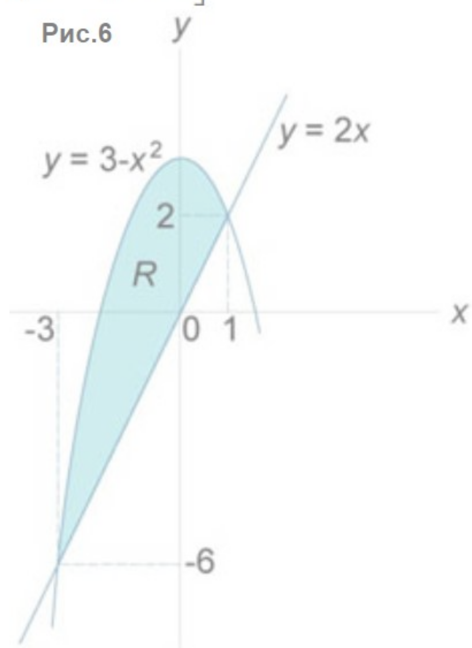
Следовательно, линии, ограничивающие область R, пересекаются в точках $(-3,-6)$ и $(1,2)$. Тогда исходный двойной интеграл равен

$$\iint\limits_R y\,dy\,dx=\int\limits_{-3}^{1}\left[\int\limits_{2x}^{3-x^2} y\,dy\right]dx=\int\limits_{-3}^{1}\left[\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=2x}^{3-x^2}\right]dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{1}\left[\left(3-x^2\right)^2-\left(2x\right)^2\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{1}\left(9-10x^2+x^4\right)dx=\frac{1}{2}\left(9x-\frac{10x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-3}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(9-\frac{10}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(-27+\frac{10\cdot 27}{3}-\frac{243}{5}\right)\right]=-\frac{64}{15}.$$

Рис.6



Пример 7

Найти интеграл $\iint\limits_R x \sin y dy dx$, где область R ограничена линиями $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

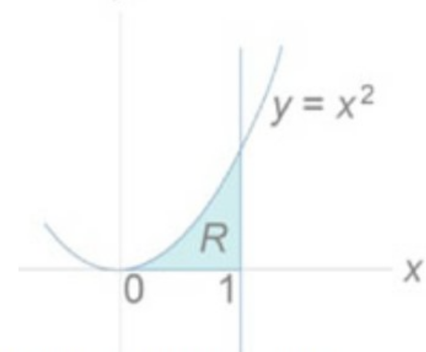
Решение.

Область интегрирования описывается множеством $R = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2 \right\}$ и показана ниже на рисунке 7. Двойной интеграл равен

$$I = \iint\limits_R x \sin y dy dx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{x^2} x \sin y dy \right] dx = \int\limits_0^1 \left[\left(-x \cos y \right)\Big|_{y=0}^{x^2} \right] dx = \int\limits_0^1 \left(-x \cos x^2 + x \cos 0 \right) dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left(1 - \cos x^2 \right) x dx.$$

Рис.7



Для вычисления последнего интеграла сделаем замену

$$z = x^2, \ \Rightarrow dz = 2x dx, \ \Rightarrow x dx = \frac{dz}{2}.$$

Если $x = 0$, то $x = 0$. Соответственно, при $x = 1$ имеем $z = 1$. Тогда интеграл легко вычисляется:

$$I = \int\limits_0^1 \left(1 - \cos x^2 \right) x dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \cos z \right) \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(1 - \cos z \right) dz = \frac{1}{2} \left(z - \sin z \right)\Big|_0^1 = \frac{1 - \sin 1}{2} \approx 0,08.$$

Пример 8

Вычислить интеграл $\iint\limits_R e^x dxdy$. Область интегрирования представляет собой треугольник с вершинами $O\left(0,0\right)$, $B\left(0,1\right)$, и $C\left(1,1\right)$.

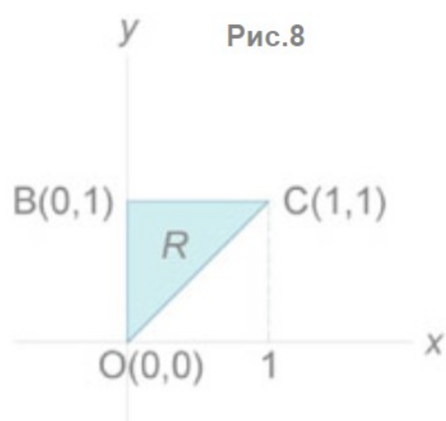
Решение.
Область R показана выше на рисунке 8. Очевидно, уравнение стороны треугольника OC имеет вид $y = x$, а уравнение стороны BC равно $y = 1$. Рассматривая R как область типа I, получаем

$$I = \iint\limits_R e^x dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_x^1 e^x dy\right] dx = \int\limits_0^1 \left[\left.\left(e^x y\right)\right|_{y=x}^1\right] dx = \int\limits_0^1 \left(e^x - xe^x\right) dx = \int\limits_0^1 e^x \left(1-x\right) dx.$$

Полученный внешний интеграл вычислим с помощью интегрирования по частям. Пусть $u = 1 - x$, $dv = e^x dx$. Тогда $du = -dx$, $v = \int e^x dx = e^x$. Следовательно,

$$I = \int\limits_0^1 e^x \left(1-x\right) dx = \left.\left[e^x \left(1-x\right)\right]\right|_0^1 + \int\limits_0^1 e^x dx = \left.\left[e^x \left(1-x\right)\right]\right|_0^1 + \left.\left[e^x\right]\right|_0^1 = \left.\left[2e^x - xe^x\right]\right|_0^1$$
$$= 2e - e - 2 = e - 2.$$

Рис.8



Пример 9

Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x+y)\,dxdy$, где область R представляет собой параллелограмм со сторонами $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=2a$, a – некоторый параметр.

Решение.

Будем рассматривать R как область типа II (элементарную относительно оси Ox). Схематически она изображена внизу на рисунке 9. При изменении координаты y от a до $2a$ координата x принимает значения между $x=y-a$ и $x=y$. Поэтому двойной интеграл равен

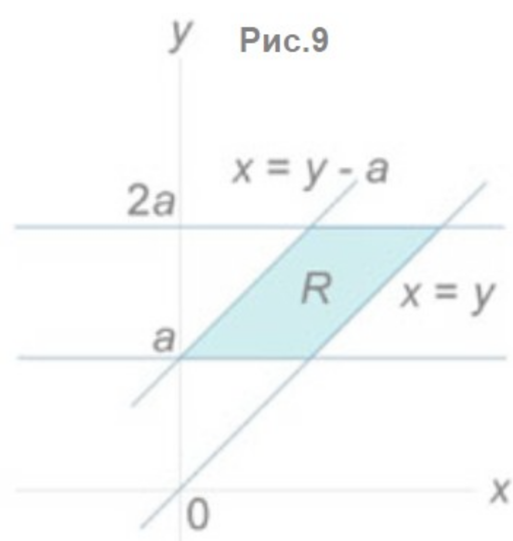
$$\iint\limits_R (x+y)\,dxdy = \int\limits_a^{2a}\left[\int\limits_{y-a}^{y}(x+y)\,dx\right]dy = \int\limits_a^{2a}\left[\left.\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\right|_{x=y-a}^{y}\right]dy$$

$$= \int\limits_a^{2a}\left[\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right)-\left(\frac{(y-a)^2}{2}+y(y-a)\right)\right]dy = \int\limits_a^{2a}\left(\frac{3y^2}{2}-\frac{y^2-2ay+a^2}{2}-y^2+ay\right)dy$$

$$= \int\limits_a^{2a}\left(2ay-\frac{a^2}{2}\right)dy = \left.\left(\frac{2ay^2}{2}-\frac{a^2y}{2}\right)\right|_a^{2a} = \left.\left(ay^2-\frac{a^2y}{2}\right)\right|_a^{2a}$$

$$= \left(a\cdot(2a)^2-\frac{a^2}{2}\cdot 2a\right)-\left(a\cdot a^2-\frac{a^2}{2}\cdot a\right) = 4a^3-a^3-a^3+\frac{a^3}{2} = \frac{5a^3}{2}.$$

Рис.9



Замена переменных в двойных интегралах

Для вычисления двойного интеграла $\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$ иногда удобнее перейти в другую систему координат. Это может быть обусловлено формой области интегрирования или сложностью подынтегральной функции. В новой системе координат вычисление двойного интеграла значительно упрощается.

Замена переменных в двойном интеграле описывается формулой

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_S f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dxdy,$$

где выражение $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ представляет собой так называемый *якобиан* преобразования $(x,y)\to(u,v)$, а S – *образ* области интегрирования R, который можно найти с помощью подстановки $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ в определение области R. Отметим, что в приведенной выше формуле $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ означает абсолютное значение соответствующего определителя.

В предположении, что преобразование $(x, y) \to (u, v)$ является взаимно-однозначным, соотношение между якобианами прямого и обратного преобразования координат записывается в виде

$$\left|\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\right| = \left|\left(\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)}\right)^{-1}\right|$$

при условии, что знаменатель нигде не равен 0.

Итак, замена переменных в двойном интеграле производится с помощью следующих трех шагов:

1. Найти образ S в новой системе координат (u, v) для исходной области интегрирования R;
2. Вычислить якобиан преобразования $(x, y) \to (u, v)$ и записать дифференциал в новых переменных $dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$;
3. Заменить в подынтегральном выражении исходные переменные x и y, выполнив, соответственно, подстановки $x = x\,(u, v)$ и $y = y\,(u, v)$.

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R (y - x)\,dxdy$, в котором область определения R ограничена прямыми $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -\frac{x}{3} + 2$, $y = -\frac{x}{3} + 4$.

Решение.

Область R схематически показана на рисунке 1. Для упрощения интеграла выполним замену переменных. Полагая $u = y - x$, $v = y + \frac{x}{3}$, получаем

$$y = x + 1, \ \Rightarrow y - x = 1, \ \Rightarrow u = 1,$$

$$y = x - 3, \ \Rightarrow y - x = -3, \ \Rightarrow u = -3,$$

$$y = -\frac{x}{3} + 2, \ \Rightarrow y + \frac{x}{3} = 2, \ \Rightarrow v = 2,$$

$$y = -\frac{x}{3} + 4, \ \Rightarrow y + \frac{x}{3} = 4, \ \Rightarrow v = 4.$$

Следовательно, образ S области R имеет вид прямоугольника, как показано на рисунке 2.

Рис.1

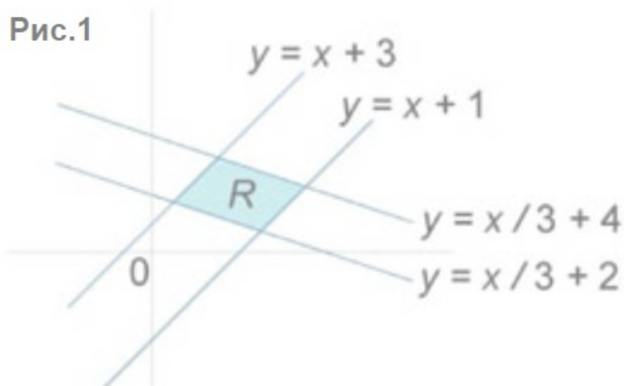
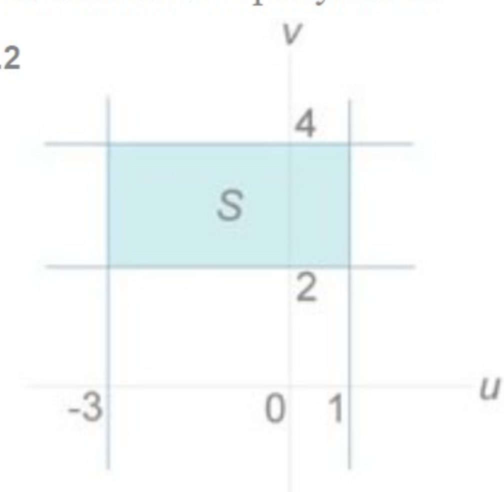


Рис.2



Определим якобиан данного преобразования. Сначала вычислим определитель обратного преобразования:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(y-x)}{\partial x} & \frac{\partial(y-x)}{\partial y} \\ \frac{\partial\left(y+\frac{x}{3}\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(y+\frac{x}{3}\right)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot 1 - 1\cdot\frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Тогда якобиан равен

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}\right| = \left|\frac{1}{-\frac{4}{3}}\right| = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, дифференциал преобразуется следующим образом:

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \frac{3}{4}dudv.$$

В новых переменных (u,v) интеграл вычисляется намного легче:

$$\iint\limits_R (y-x)\,dxdy = \iint\limits_S \left(u\cdot\frac{3}{4}dudv\right) = \frac{3}{4}\int\limits_{-3}^{1} udu\int\limits_{2}^{4} dv = \frac{3}{4}\left(\frac{u^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{1}\cdot v|_2^4$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)\cdot(4-2) = -6.$$

Пример 2

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R (x+y)\,dxdy$, в котором область интегрирования R ограничена прямыми линиями $y=x$, $y=2x$, $x+y=2$.

Решение.

Область интегрирования R имеет вид неправильного треугольника и показана на рисунке 3. Чтобы упростить ее, введем новые переменные: $y-x=u$, $y-2x=v$. Выразим x,y через u,v и определим образ области интегрирования S в новой системе координат. Легко видеть, что

$$y=x,\ \Rightarrow y-x=0,\ \Rightarrow u=0,$$

$$y=2x,\ \Rightarrow y-2x=0,\ \Rightarrow v=0.$$

Рис.3

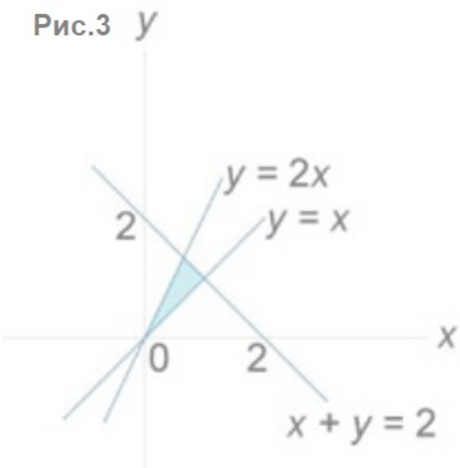
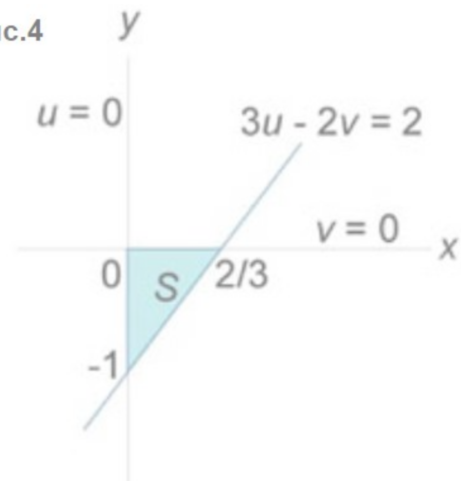


Рис.4



Заметим, что $\quad u-v=(y-x)-(y-2x)=x.$

Следовательно, $\quad y=x+u=u-v+u=2u-v.$

Таким образом, мы получаем $\quad x+y=2,\ \Rightarrow u-v+2u-v=2,\ \Rightarrow 3u-2v=2.$

Если $v=0$, то $u=\dfrac{2}{3}$. Соответственно, если $u=0$, то $v=-1$. Область S имеет вид прямоугольного треугольника (см. рисунок 4 выше).

Уравнение стороны $3u-2v=2$ можно переписать в виде $\quad 3u-2v=2,\ \Rightarrow v=\dfrac{3u-2}{2}=\dfrac{3}{2}u-1.$

Найдем якобиан.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(2u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u-v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 = 1.$$

Следовательно, $dxdy = dudv$ и двойной интеграл становится равным

$$\iint\limits_R (x+y)\,dxdy = \iint\limits_S (u-v+2u-v)\,dudv = \iint\limits_S (3u-2v)\,dudv = \int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left[\int\limits_{\frac{3}{2}u-1}^{0} (3u-2v)\,dv \right] du$$

$$= \int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left[\left(3uv - v^2\right)\Big|_{v=\frac{3}{2}u-1}^{0} \right] du = -\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left[3u\left(\frac{3}{2}u-1\right) - \left(\frac{3}{2}u-1\right)^2 \right] du$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{9u^2}{2} - 3u - \frac{9u^2}{4} + 3u - 1 \right) du = -\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{9u^2}{4} - 1 \right) du = \left(u - \frac{9}{4}\frac{u^3}{3} \right)\Big|_0^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}.$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\iint\limits_R dxdy$, где область R ограничена параболами $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ и гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

Решение.

Область R схематически показана на рисунке 5.

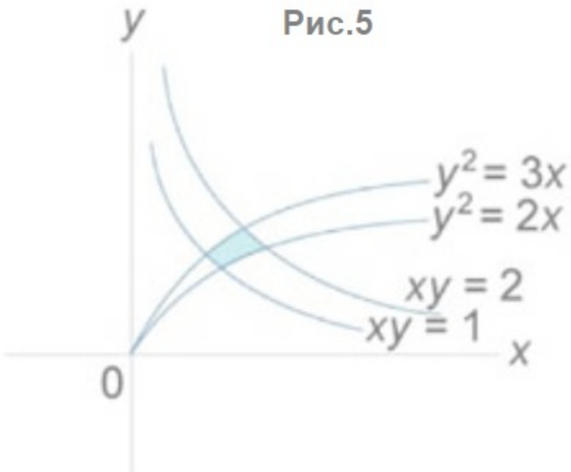


Рис.5

Для упрощения области R сделаем замену переменных.

$$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = xy \end{cases}.$$

Образ S области R определяется следующим образом:

$$y^2 = 2x, \Rightarrow \frac{y^2}{x} = 2, \Rightarrow u = 2,$$

$$y^2 = 3x, \Rightarrow \frac{y^2}{x} = 3, \Rightarrow u = 3,$$

$$xy = 1, \Rightarrow v = 1,$$

$$xy = 2, \Rightarrow v = 2.$$

Как видно, образ S является прямоугольником. Для нахождения якобиана выразим переменные x, y через u, v.

$$u = \frac{y^2}{x}, \Rightarrow x = \frac{y^2}{u}, \qquad v = xy, \Rightarrow v = \frac{y^2}{u} \cdot y, \Rightarrow y^3 = uv.$$

Отсюда следует

$$y = \sqrt[3]{uv} = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \qquad x = \frac{y^2}{u} = \frac{\sqrt[3]{u^2v^2}}{u} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}} = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}.$$

Находим якобиан данного преобразования.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\right) & u^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{3}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{9}u^{-1} - \frac{2}{9}u^{-1} = -\frac{1}{3}u^{-1} = -\frac{1}{3u}.$$

Соотношение между дифференциалами имеет вид

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \left|-\frac{1}{3u}\right| dudv = \frac{dudv}{3u}.$$

Теперь легко найти искомый интеграл:

$$\iint_R dxdy = \iint_S \frac{dudv}{3u} = \int_2^3 \frac{du}{3u}\int_1^2 dv = \frac{1}{3}(\ln u)\big|_2^3 \cdot v\big|_2^3 = \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 2)\cdot(2-1) = \frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}.$$

Пример 4

Вычислить интеграл $\iint\limits_R \left(x^2+y^2\right) dxdy$, где область R ограничена прямыми $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=2a\ (a>0)$.

Решение.

Область интегрирования R имеет форму параллелограмма и показана на рисунке 6.

Рис.6

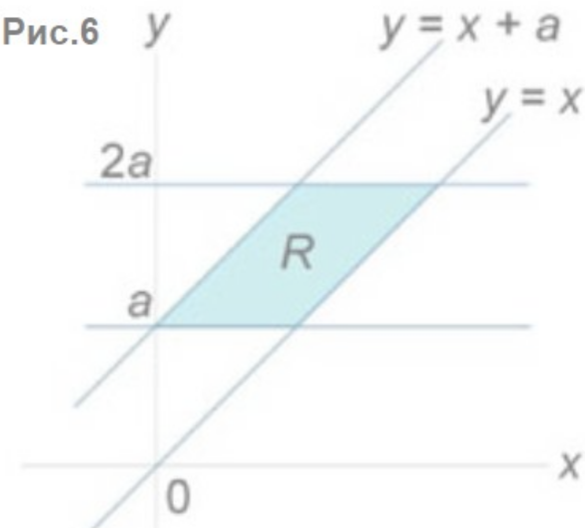
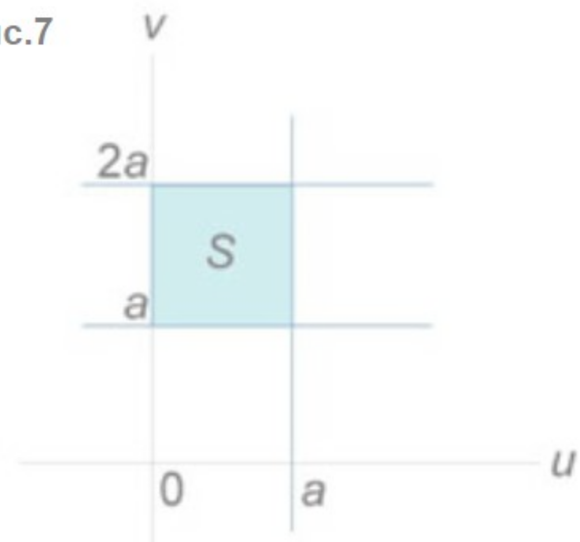


Рис.7



Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} u=y-x \\ v=y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=y-u=v-u \\ y=v \end{cases}.$$

Цель этой замены – упростить область интегрирования R.

Найдем образ S области R в новых координатах (u, v) .

$$y = x, \;\Rightarrow y - x = 0, \;\Rightarrow u = 0,$$

$$y = x + a, \;\Rightarrow y - x = a, \;\Rightarrow u = a,$$

$$y = a, \;\Rightarrow v = a,$$

$$y = 2a, \;\Rightarrow v = 2a.$$

Из рисунка 7 видно, что область S представляет собой прямоугольник. Вычислим якобиан.

$$\frac{\partial\left(x, y\right)}{\partial\left(u, v\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial (v-u)}{\partial u} & \frac{\partial (v-u)}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = -1,$$

так что

$$dxdy = \left|\frac{\partial\left(x, y\right)}{\partial\left(u, v\right)}\right| dudv = \left|-1\right| \cdot dudv = dudv.$$

Теперь можно вычислить двойной интеграл.

$$\iint\limits_R \left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint\limits_S \left[(v-u)^2+v^2\right] dudv = \iint\limits_S \left(v^2-2uv+u^2+v^2\right) dudv$$

$$= \int\limits_a^{2a} \left[\int\limits_0^a \left(2v^2-2uv+u^2\right) du\right] dv = \int\limits_a^{2a} \left[\left(2v^2u-vu^2+\frac{u^3}{3}\right)\Big|_{u=0}^{a}\right] dv = \int\limits_a^{2a} \left(2av^2-a^2v+\frac{a^3}{3}\right) dv$$

$$= \left(2a\cdot\frac{v^3}{3}-a^2\cdot\frac{v^2}{2}+\frac{a^3}{3}\cdot v\right)\Big|_a^{2a} = \left(\frac{2a}{3}\cdot 8a^3-\frac{a^2}{2}\cdot 4a^2+\frac{a^3}{3}\cdot 2a\right)$$

$$-\left(\frac{2a}{3}\cdot a^3-\frac{a^2}{2}\cdot a^2+\frac{a^3}{3}\cdot a\right) = \frac{7a^4}{2}.$$