

**Курс лекций по
дисциплине
«СТАТИСТИЧЕСКАЯ
РАДИОТЕХНИКА»**

**Лектор - Куроедов Сергей
Константинович**

Лекция 4

ПЛАН ЛЕКЦИИ 4

- 1. Случайный процесс, ансамбль его реализаций, сечение случайного процесса и сечение ансамбля реализаций**
- 2. Характеристики распределений и моментные функции случайных процессов**
- 3. Стационарные и эргодические случайные процессы**
- 4. Спектральные характеристики стационарных случайных процессов, теорема Винера-Хинчина**
- 5. Равенство Парсеваля**

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайный процесс – это случайная функция времени $z(t)$, значения которой в любой момент времени из области ее определения являются **случайными величинами** (априорно неизвестны)

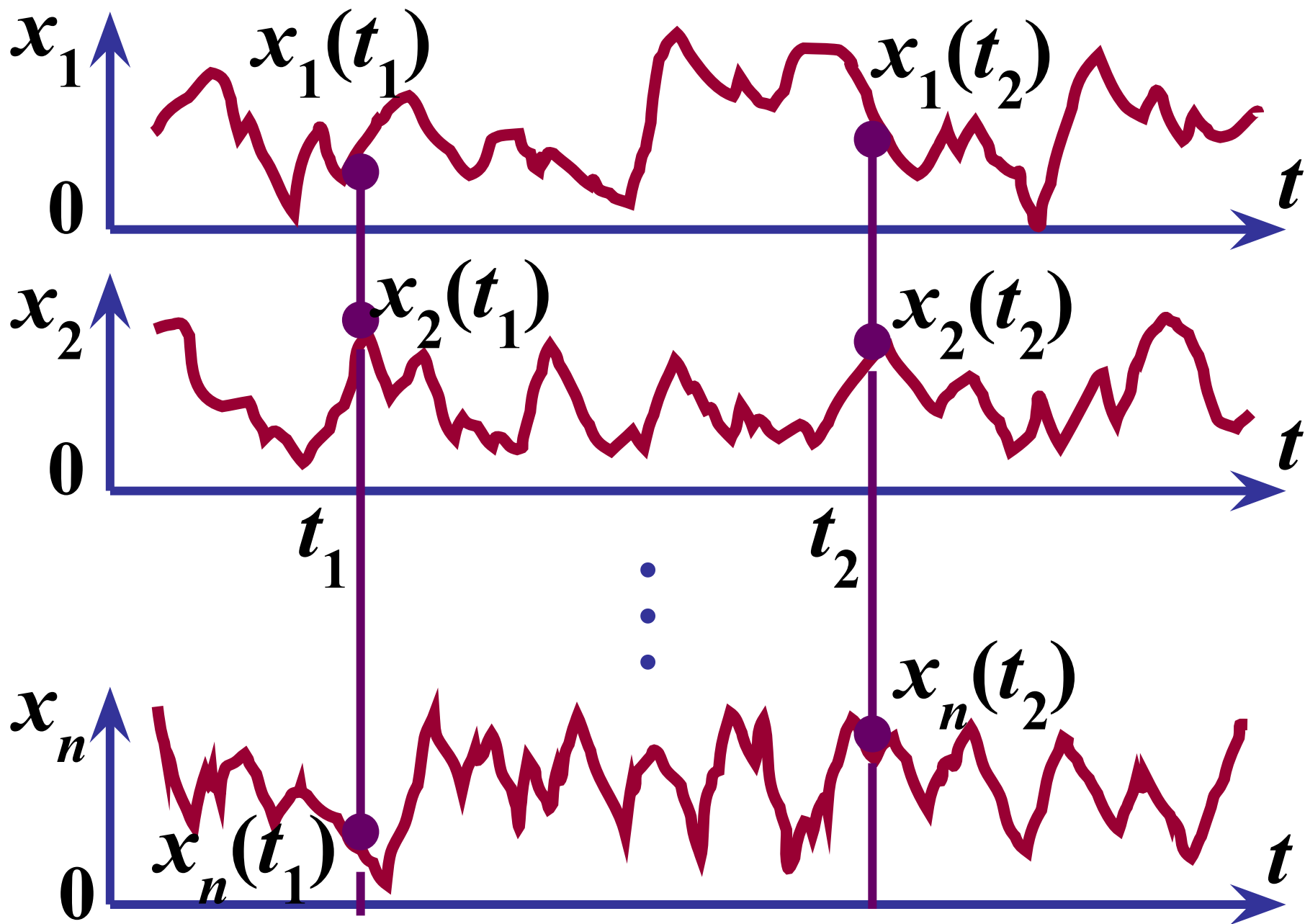
Множество $X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ реализаций $x_i(t)$ случайного процесса $z(t)$ называется ***ансамблем реализаций*** данного процесса

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайная величина $z(t_1)$,
представленная мгновенными
значениями случайного процесса $z(t)$
в фиксированный момент времени t_1 ,
называется **сечением случайного
процесса**

Множество $X(t_1) = \{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots,$
 $x_n(t_1)\}$ **мгновенных значений $x_i(t_1)$**
реализаций случайного процесса $z(t)$
в фиксированный момент времени t_1
называется **сечением ансамбля
реализации случайного процесса**

АНСАМБЛЬ РЕАЛИЗАЦИЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА



ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Одномерная функция распределения вероятностей $F(x, t_1)$ случайного процесса $z(t)$ – функция распределения вероятностей сечения $z(t_1)$:

$$F(x, t_1) = P[z(t_1) \leq x]$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Одномерная плотность

вероятности $p(x, t_1)$ случайного

процесса $z(t)$ – плотность

вероятности сечения $z(t_1)$:

$$p(x, t_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x < z(t_1) \leq x + \Delta x]}{\Delta x}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Двумерная функция распределения вероятностей $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ случайного процесса $z(t)$:

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P[z(t_1) \leq x_1, z(t_2) \leq x_2]$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Двумерная плотность

вероятности $p(x, t_1)$ случайного процесса $z(t)$:

$$p(x_1, x_2, t_1, t_2) =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0}} \frac{P[x_1 < z(t_1) \leq x_1 + \Delta x_1, x_2 < z(t_2) \leq x_2 + \Delta x_2]}{\Delta x_1 \Delta x_2}$$

Многомерная плотность

вероятности случайного процесса:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$$

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Математическое ожидание – **первый момент** сечения $z(t)$, характеризует среднее значение случайного процесса в момент времени t :

$$m_1(t) = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t) dx$$

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Дисперсия – второй центральный момент сечения $z(t)$, характеризует среднее значение квадрата флуктуаций случайного процесса в момент времени t :

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(t) &= \overline{[x(t) - m_1(t)]^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1(t)]^2 p(x, t) dx\end{aligned}$$

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Функция корреляции (функция автокорреляции, корреляционная функция, автокорреляционная функция) – второй центральный смешанный момент сечений $z(t_1)$ и $z(t_2)$, характеризует корреляцию или среднюю взаимную мощность флуктуаций случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \overline{[x(t_1) - m_1(t_1)][x(t_2) - m_1(t_2)]} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_1(t_1)][x(t_2) - m_1(t_2)] \cdot \\ &\cdot p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

При совмещении сечений $\mathbf{z}(t_1)$ и $\mathbf{z}(t_2)$

$$R_x(t, t) = \overline{[x(t) - m_1(t)]^2} = \sigma_x^2(t)$$

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс называется стационарным в узком смысле, если его любые многомерные плотности вероятности инвариантны относительно временного сдвига τ :

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Любые **моментные функции**

стационарных в узком смысле

случайных процессов, определяемые по одному сечению, не зависят от времени:

$$m_n(t) = m_n$$

Моментные функции, определяемые по двум сечениям, зависят только от разности временных аргументов

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его, по крайней мере, одномерные и двумерные плотности вероятности инвариантны

относительно временного сдвига τ

Моментные функции первого и второго порядка стационарного в широком смысле случайного процесса либо не зависят от времени, либо зависят только от разности временных аргументов

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

$$m_1(t) = m_1$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau), \tau = t_2 - t_1$$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \overline{[x(t_1) - m_1][x(t_2) - m_1]} = \\ &= \overline{[x(t_2) - m_1][x(t_1) - m_1]} = R_x(-\tau) \end{aligned}$$

Функция корреляции стационарного случайного процесса - **четная**

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

$$\begin{aligned} & \overline{\{[x(t) - m_1] - [x(t + \tau) - m_1]\}^2} = \\ & \overline{[x(t) - m_1]^2 - 2[x(t) - m_1][x(t + \tau) - m_1] +} \\ & \overline{[x(t + \tau) - m_1]^2} = 2\sigma_x^2 - 2R_x(\tau) \geq 0 \end{aligned}$$

$$R_x(\tau) \leq \sigma_x^2 = R_x(0)$$

Функция корреляции стационарного случайного процесса имеет **максимум** в нуле

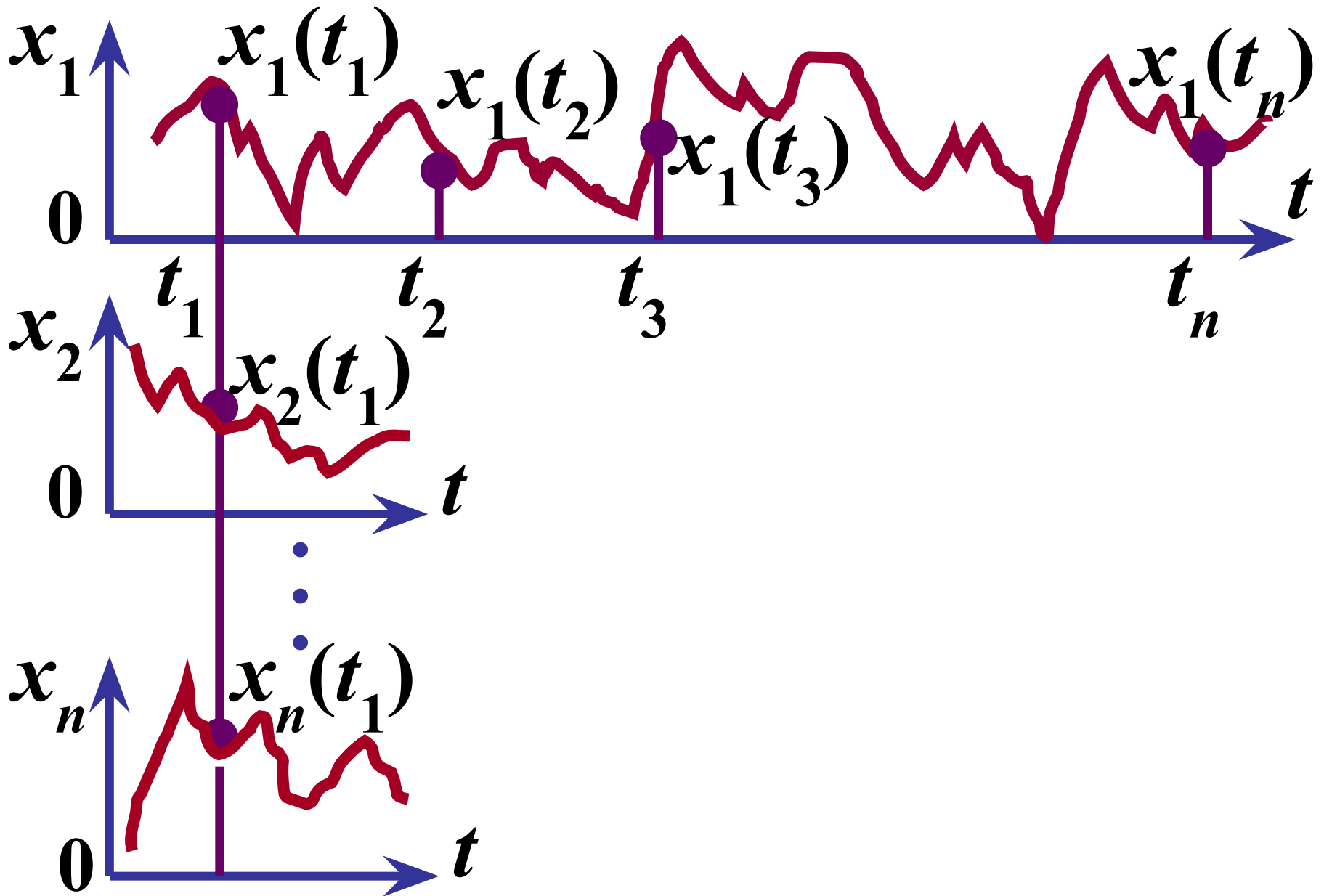
ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Стационарный случайный процесс называется **эргодическим**, если **усреднение** любой его *вероятностной характеристики* по ансамблю реализаций **эквивалентно усреднению** во времени по **одной** из реализаций

Условие **эргодичности**:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$$

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ



МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

**Математическое
ожидание:**

$$m_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Дисперсия:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_1]^2 dt$$

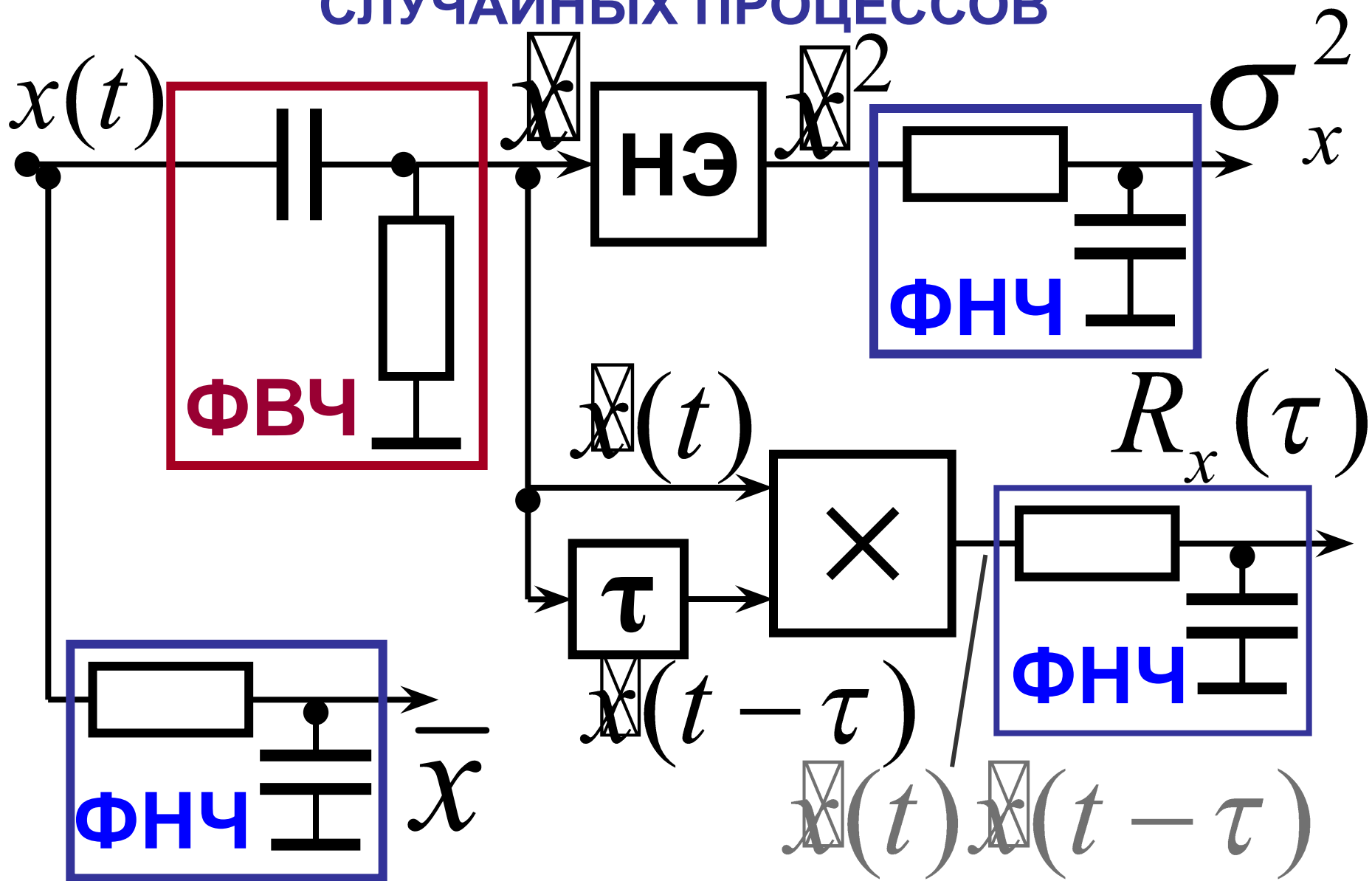
МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Функция корреляции :

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_1][x(t + \tau) - m_1] dt$$

Значение функции корреляции
характеризует корреляционную связь
между двумя сечениями случайного
процесса, разделенными временным
промежутком длительностью τ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ



СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

$S(\omega)$ - спектральная плотность
реализации $x(t)$ стационарного
случайного процесса $z(t)$:

$$S(\omega) \leftrightarrow x(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**
Математическое ожидание
стационарного случайного
процесса:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = m_1$$

Математическое ожидание
спектральной плотности как
случайной функции частоты:

$$\overline{S(\omega)} = 2\pi m_1 \delta(\omega)$$

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

$$\overline{S(\omega)} = 0, \omega \in (-\infty, \infty), \omega \neq 0$$

Спектральная плотность
стационарного случайного процесса
является **случайной функцией**
частоты, математическое
ожидание которой при любом
значении частоты, кроме нулевого,
равно нулю

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

$S_T(\omega)$ – спектральная плотность реализации $x(t)$ случайного процесса на интервале длительностью T :

$$S_T(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$S_T(\omega) S_T^*(\omega) = |S_T(\omega)|^2$$

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

$$\overline{|S_T(\omega)|^2} = \overline{S_T(\omega)S_T^*(\omega)} =$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t_1)e^{-j\omega t_1} dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t_2)e^{j\omega t_2} dt_2 =$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{x(t_1)x(t_2)} e^{j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2$$

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

$$t_2 - t_1 = \tau, dt_2 = d\tau$$

$$\overline{x(t_1)x(t_2)} = R_x(\tau), \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(\omega)|^2}{T} = W(\omega)$$

$$t_2 - t_1 = \tau, dt_2 = d\tau$$

$$\overline{x(t_1)x(t_2)} = R_x(\tau), \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(\omega)|^2}{T} = W(\omega)$$

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$$

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

Спектральная плотность мощности случайного процесса определяется **математическим ожиданием** суммарной мощности его спектральных составляющих на частотном интервале шириной в **1 Гц**

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \\ W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \end{array} \right.$$

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

**Спектральная плотность
мощности и функция корреляции
стационарного случайного процесса
связаны между собой парой
преобразований Фурье**

$$R_x(\tau) \leftrightarrow W(\omega)$$

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

$$R_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega$$

Средняя мощность (дисперсия)
стационарного случайного процесса
равна сумме средних мощностей
(дисперсий) всех спектральных
составляющих данного процесса

СВОЙСТВА СПЕКТРА МОЩНОСТИ

- **Спектр мощности $W(\omega)$** - действительная, неотрицательная функция частоты, определенная на всей числовой прямой
- **Спектр мощности $W(\omega)$** – четная функция частоты: $W(-\omega) = W(\omega)$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega =$$

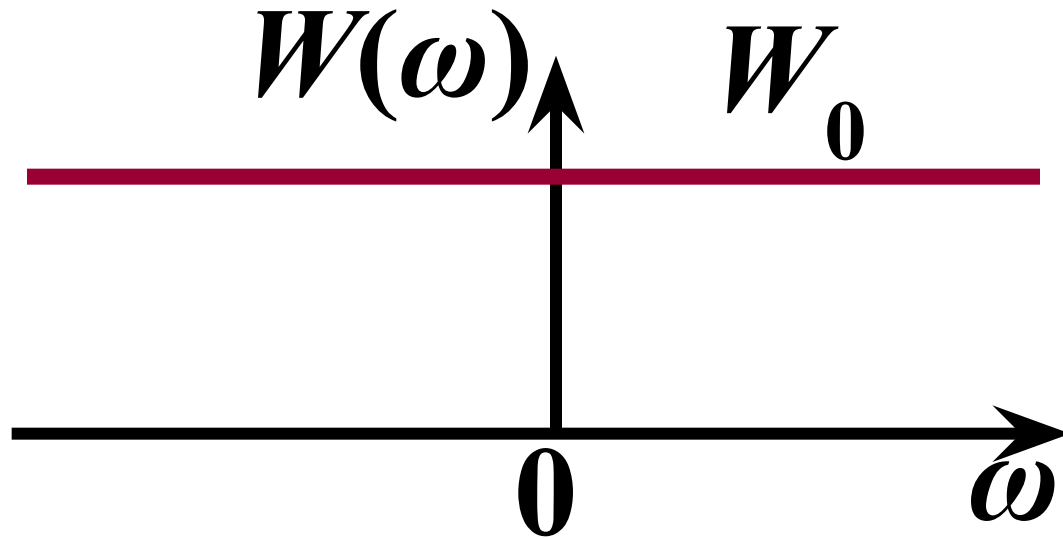
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

ОДНОСТОРОННИЙ СПЕКТР МОЩНОСТИ

$$\begin{cases} F(\omega) = 0, \omega < 0 \\ F(\omega) = \frac{W(\omega)}{\pi}, \omega \geq 0 \end{cases}$$

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} F(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

БЕЛЫЙ ШУМ

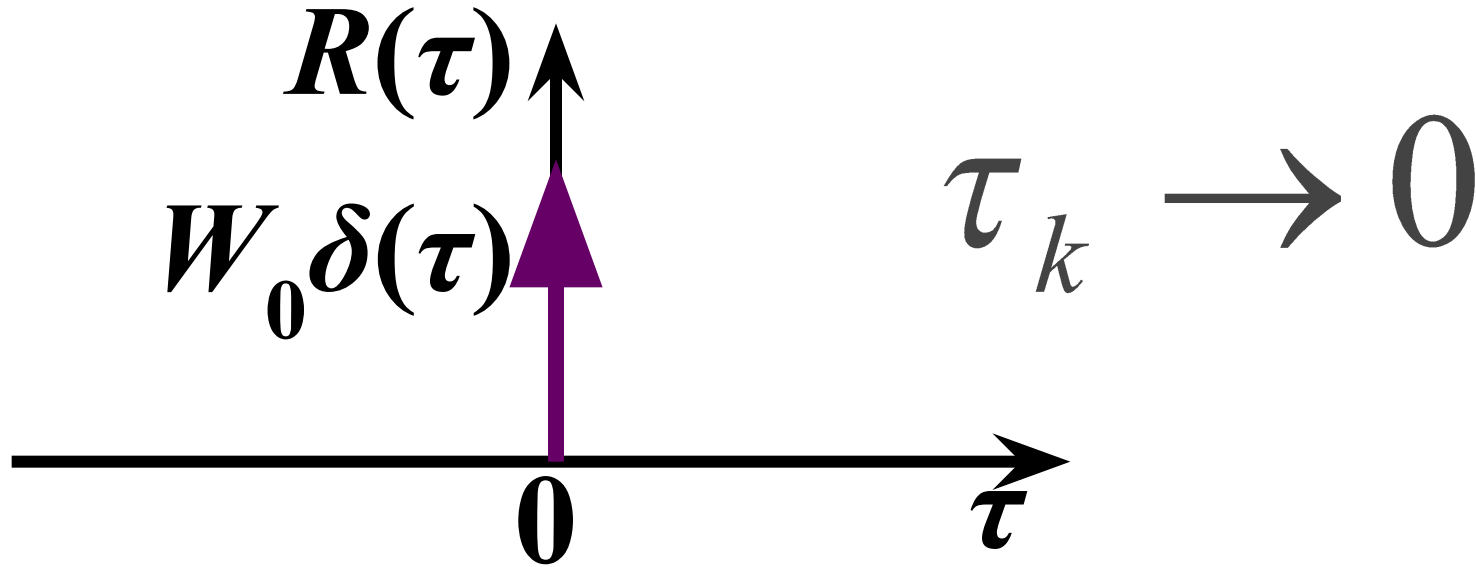


- случайный процесс с не
финитным
равномерным
спектром
мощности

$$\Delta\omega_{eff} \rightarrow \infty$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0 e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau)$$

БЕЛЫЙ ШУМ



δ -коррелированный случайный процесс с бесконечной дисперсией (средней мощностью):

$$\sigma^2 = R(0) \rightarrow \infty$$