Курс лекций по дисциплине «СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА»

Лектор - Куроедов Сергей Константинович

Лекция 4

ПЛАН ЛЕКЦИИ 4

1. Случайный процесс, ансамбль его реализаций, сечение случайного процесса и сечение ансамбля реализаций
2. Характеристики распределений и моментные функции случайных процессов
3. Стационарные и эргодические случайные процессы
4. Спектральные характеристики стационарных случайных процессов, теорема Винера-Хинчина
5. Равенство Парсеваля

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайный процесс – это случайная **функция времени** $z(t)$, значения которой в любой момент времени из области ее определения являются **случайными величинами** (априорно неизвестны)

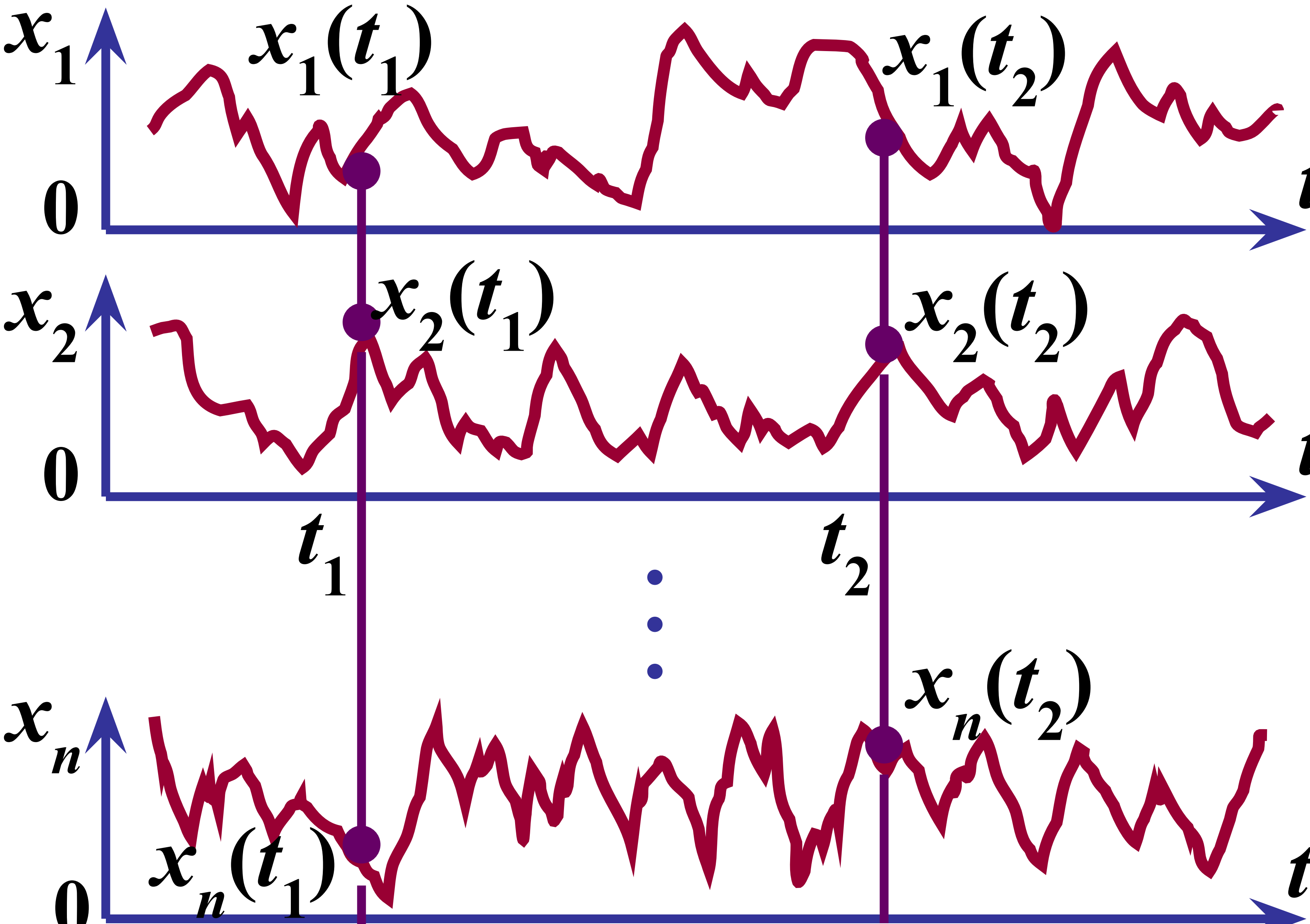
Множество $X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ реализаций $x_i(t)$ случайного процесса $z(t)$ называется ***ансамблем реализаций*** данного процесса

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайная величина $z(t_1)$, представленная мгновенными значениями случайного процесса $z(t)$ в фиксированный момент времени t_1, называется ***сечением случайного процесса***

Множество $X(t_1) = \{x_1(t_1), x_2(t_1), \ldots, x_n(t_1)\}$ мгновенных значений $x_i(t_1)$ реализаций случайного процесса $z(t)$ в фиксированный момент времени t_1 называется ***сечением ансамбля реализации случайного процесса***

АНСАМБЛЬ РЕАЛИЗАЦИЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА



ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Одномерная функция распределения вероятностей $F(x,t_1)$ ***случайного процесса*** **z**(t) **– функция распределения вероятностей сечения** **z**(t_1)**:**

$$\boxed{F(x,t_1) = P\left[z(t_1) \le x\right]}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Одномерная плотность вероятности $p(x,t_1)$ **случайного процесса** $z(t)$ **– плотность вероятности сечения** $z(t_1)$**:**

$$p(x,t_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\left[x<z(t_1)\le x+\Delta x\right]}{\Delta x}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Двумерная функция распределения вероятностей $F(x_1,x_2,t_1,t_2)$ **случайного процесса** $z(t)$**:**

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = \\ = P\left[z(t_1) \le x_1, z(t_2) \le x_2\right]$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Двумерная плотность вероятности $p(x,t_1)$ **случайного процесса** $z(t)$**:**

$$p(x_1,x_2,t_1,t_2)= = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} \frac{P\left[x_1 < z(t_1) \le x_1 + \Delta x_1, x_2 < z(t_2) \le x_2 + \Delta x_2\right]}{\Delta x_1 \Delta x_2}$$

Многомерная плотность вероятности **случайного процесса:**

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n,t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Математическое ожидание – **первый момент** сечения $z(t)$, характеризует среднее значение случайного процесса в момент времени t :

$$m_1(t) = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x,t) dx$$

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Дисперсия – **второй центральный момент сечения $z(t)$, характеризует среднее значение квадрата флуктуаций случайного процесса в момент времени t :**

$$\sigma_x^2(t) = \overline{\left[x(t) - m_1(t)\right]^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m_1(t)\right]^2 p(x,t)\,dx$$

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Функция корреляции (***функция автокорреляции***, ***корреляционная функция***, ***автокорреляционная функция***) – **второй центральный смешанный момент сечений** $z(t_1)$ **и** $z(t_2)$, **характеризует корреляцию или среднюю взаимную мощность флуктуаций случайного процесса в моменты времени** t_1 и t_2

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{[x(t_1) - m_1(t_1)][x(t_2) - m_1(t_2)]} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_1(t_1)][x(t_2) - m_1(t_2)] \cdot$$

$$\cdot\, p(x_1, x_2, t_1, t_2)dx_1 dx_2$$

При совмещении сечений $z(t_1)$ и $z(t_2)$

$$R_x(t, t) = \overline{[x(t) - m_1(t)]^2} = \sigma_x^2(t)$$

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс **называется** ***стационарным в узком смысле*****, если его любые многомерные плотности вероятности инвариантны**

относительно временного сдвига τ**:**

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) =$$
$$= p(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau)$$

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Любые моментные функции стационарных в узком смысле случайных процессов, определяемые по одному сечению, не зависят от времени:

$$\boxed{m_n(t) = m_n}$$

Моментные функции, определяемые по двум сечениям, зависят только от разности временных аргументов

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс **называется** ***стационарным в широком смысле***, **если его, по крайней мере, одномерные и двумерные плотности вероятности инвариантны относительно временного сдвига** τ

Моментные функции первого и второго порядка стационарного в широком смысле случайного процесса либо не зависят от времени, либо зависят только от разности временных аргументов

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

$$\boxed{m_1(t) = m_1}$$

$$\boxed{R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau), \tau = t_2 - t_1}$$

$$R_x(\tau) = \overline{[x(t_1) - m_1][x(t_2) - m_1)]} =$$

$$= \overline{[x(t_2) - m_1][x(t_1) - m_1)]} = R_x(-\tau)$$

Функция корреляции **стационарного случайного процесса - четная**

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

$$\overline{\{[x(t)-m_1]-[x(t+\tau)-m_1)]\}^2} =$$

$$= \overline{[x(t)-m_1]} - 2\overline{[x(t)-m_1][x(t+\tau)-m_1)]} +$$

$$+ \overline{[x(t+\tau)-m_1)]^2} == 2\sigma_x^2 - 2R_x(\tau) \geq 0$$

$$R_x(\tau) \leq \sigma_x^2 = R_x(0)$$

Функция корреляции стационарного случайного процесса имеет **максимум** в нуле

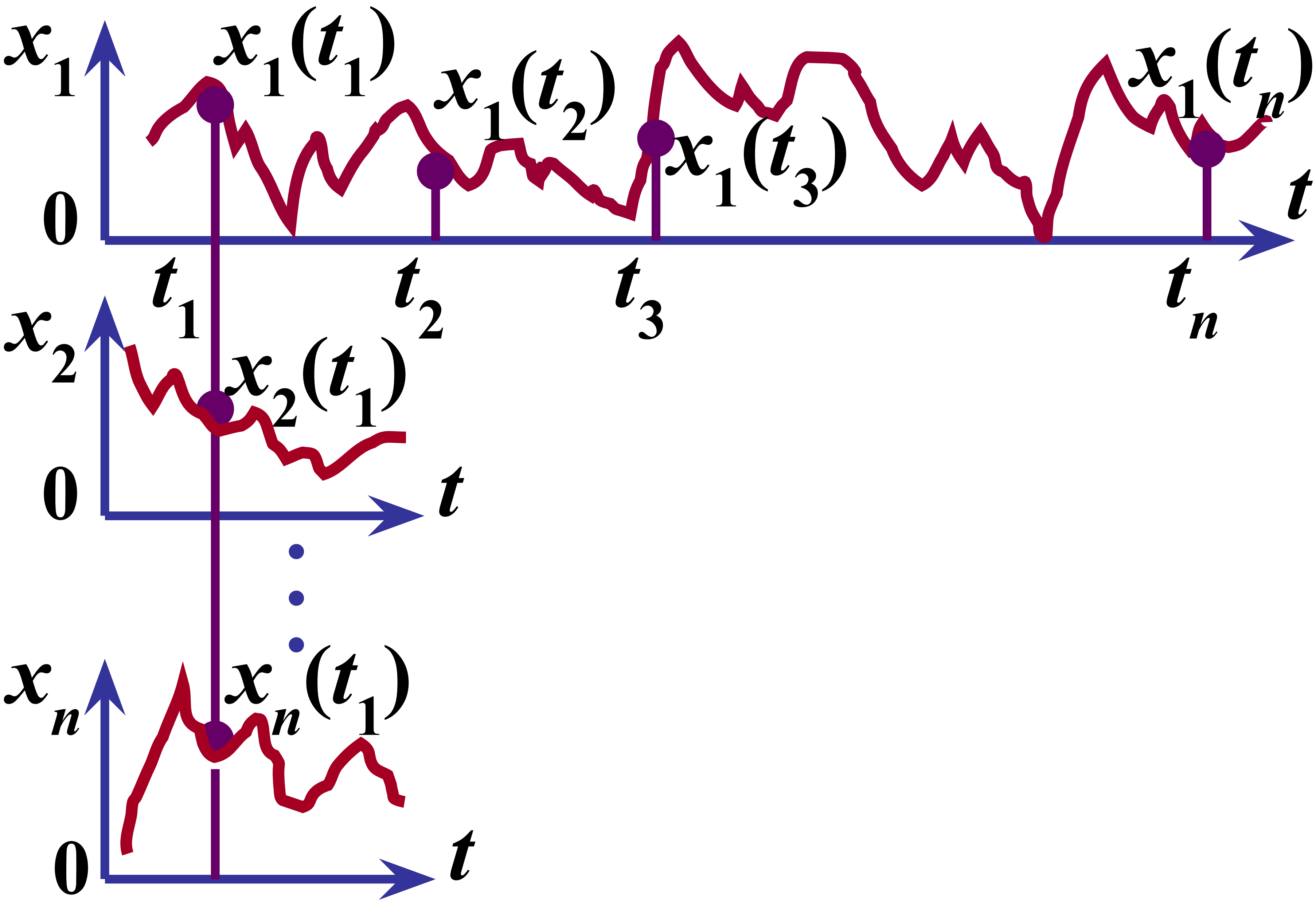
ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если усреднение любой его *вероятностной характеристики* по ансамблю реализаций эквивалентно усреднению во времени по одной из реализаций

Условие эргодичности:

$$\boxed{\lim_{\tau \to \infty} R_x(\tau) = 0}$$

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ



МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Математическое ожидание:

$$m_1 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt$$

Дисперсия:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_1]^2\,dt$$

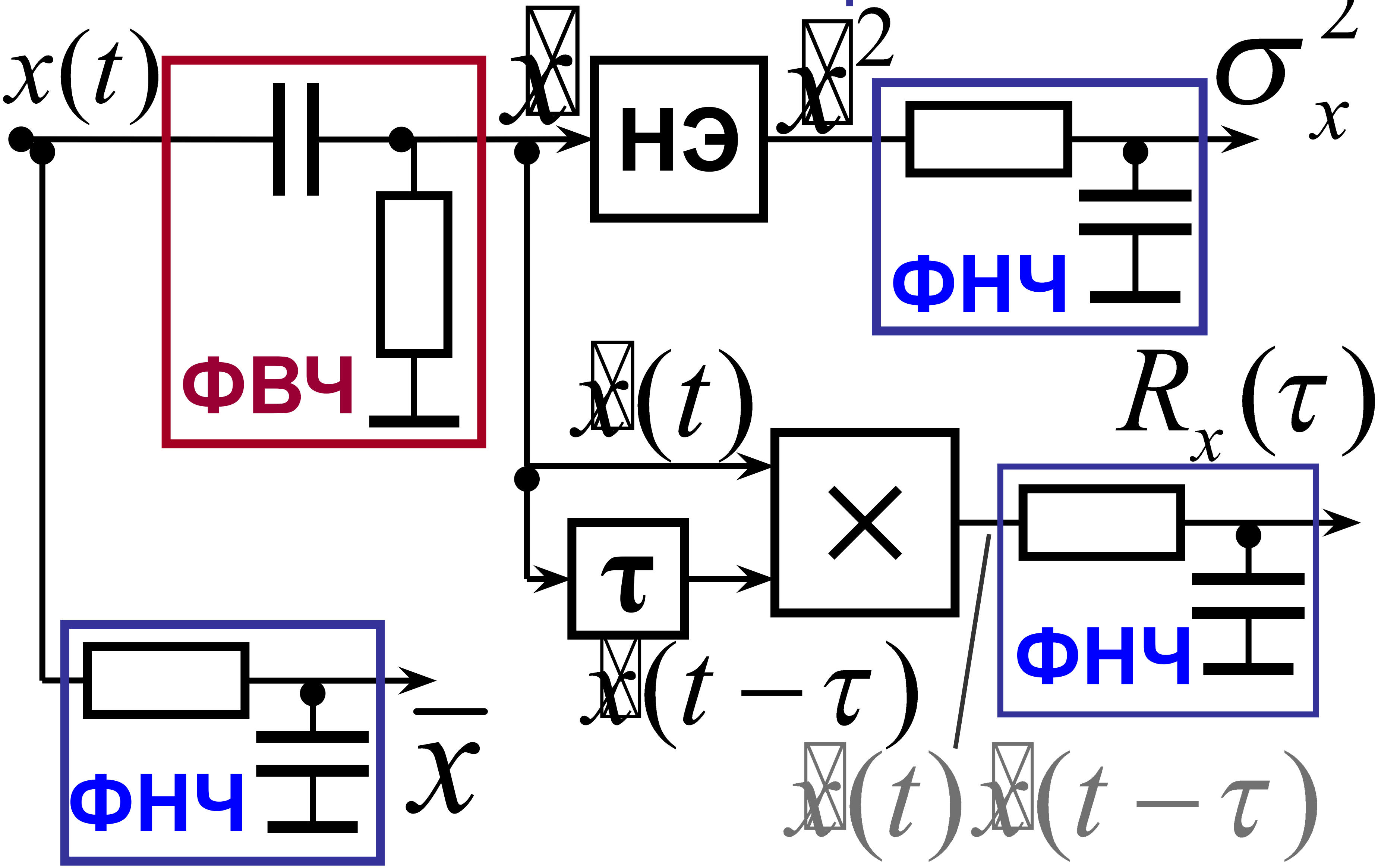
МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Функция корреляции :

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-m_1][x(t+\tau)-m_1]dt$$

Значение функции корреляции характеризует корреляционную связь между двумя сечениями случайного процесса, разделенными временным промежутком длительностью τ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ



СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

$S(\omega)$ - спектральная плотность реализации $x(t)$ стационарного случайного процесса $z(t)$:

$$S(\omega) \leftrightarrow x(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Математическое ожидание **стационарного случайного процесса:**

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{S(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = m_1$$

Математическое ожидание спектральной плотности как *случайной функции частоты*:

$$\boxed{\overline{S(\omega)} = 2\pi m_1 \delta(\omega)}$$

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

$$\overline{S(\omega)} = 0, \omega \in (-\infty, \infty), \omega \neq 0$$

Спектральная плотность стационарного случайного процесса является *случайной функцией частоты*, математическое ожидание которой при любом значении частоты, кроме нулевого, равно нулю

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

$S_T(\omega)$ – спектральная плотность реализации $x(t)$ случайного процесса на интервале длительностью *T*:

$$S_T(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$S_T(\omega) S_T^*(\omega) = \left| S_T(\omega) \right|^2$$

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

$$\overline{\left|S_T(\omega)\right|^2} = \overline{S_T(\omega)S_T^*(\omega)} =$$

$$= \overline{\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t_1)e^{-j\omega t_1}dt_1 \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t_2)e^{j\omega t_2}dt_2} =$$

$$= \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{x(t_1)x(t_2)}e^{j\omega (t_2 - t_1)}dt_1 dt_2$$

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

$$t_2 - t_1 = \tau, dt_2 = d\tau$$

$$\overline{x(t_1)x(t_2)} = R_x(\tau), \lim_{T \to \infty} \frac{\left| S_T(\omega) \right|^2}{T} = W(\omega)$$

$$t_2 - t_1 = \tau, dt_2 = d\tau$$

$$\overline{x(t_1)x(t_2)} = R_x(\tau), \lim_{T \to \infty} \frac{\left| S_T(\omega) \right|^2}{T} = W(\omega)$$

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$$

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

Спектральная плотность мощности **случайного процесса определяется математическим ожиданием суммарной мощности его спектральных составляющих на частотном интервале шириной в 1 Гц**

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

$$\begin{cases} R_x(\tau) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \\ W(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \end{cases}$$

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ХИНЧИНА

Спектральная плотность мощности **и** ***функция корреляции*** **стационарного случайного процесса связаны между собой парой преобразований Фурье**

$$\boxed{R_x(\tau) \leftrightarrow W(\omega)}$$

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

$$R_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega$$

Средняя мощность (дисперсия) стационарного случайного процесса равна сумме средних мощностей (дисперсий) всех спектральных составляющих данного процесса

СВОЙСТВА СПЕКТРА МОЩНОСТИ

- **Спектр мощности *W*(ω) - действительная, неотрицательная функция частоты, определенная на всей числовой прямой**
- **Спектр мощности *W*(ω) – четная функция частоты: *W*(-ω) = *W*(ω)**

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega =$$

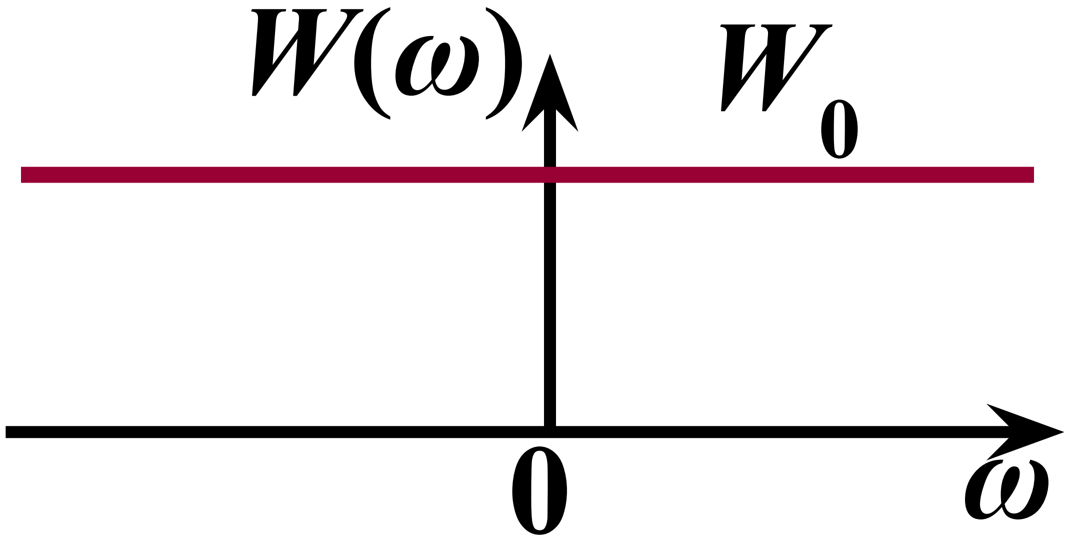
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} W(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega$$

ОДНОСТОРОННИЙ СПЕКТР МОЩНОСТИ

$$\begin{cases} F(\omega) = 0, \omega < 0 \\ F(\omega) = \dfrac{W(\omega)}{\pi}, \omega \geq 0 \end{cases}$$

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} F(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega$$

БЕЛЫЙ ШУМ

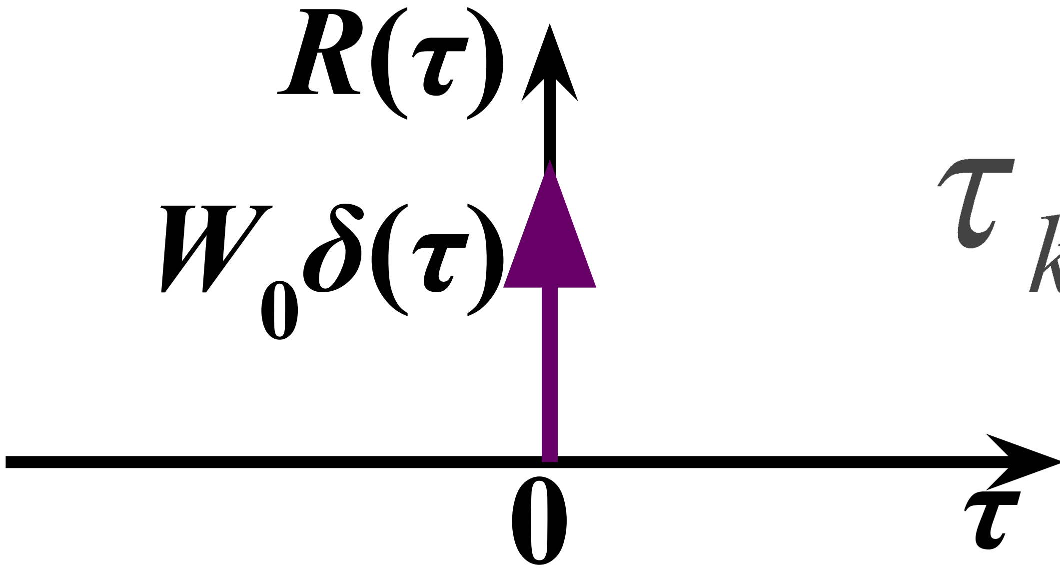


- случайный процесс с не финитным равномерным спектром мощности

$$\Delta\omega_{eff} \to \infty$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_0 e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau)$$

БЕЛЫЙ ШУМ



$$\tau_k \to 0$$

δ-коррелированный случайный процесс с бесконечной дисперсией (средней мощностью):

$$\boxed{\sigma^2 = R(0) \to \infty}$$