Элементы теории фредгольмовых отображений

https://vk.com/fredholm

11. Нелинейные фредгольмовы отображения

Рассмотрим отображение $f : E \to F$ $(E,\ F -$ БП$)$. Пусть для любого $x \in E$ существует производная Фреше $f'(x) : E \to F$, являющаяся фредгольмовым оператором, причем $f'(x)$ непрерывна по x (как операторное отображение $f' : E \to \mathrm{L}(E,F)$). Тогда отображение f называется **фредгольмовым отображением.**

Заметим, что, в силу того, что любые две точки $x_1, x_2 \in E$ можно соединить отрезком $\{(1-t)x_1 + tx_2 \mid t \in [0,1]\} \subset E$, $\operatorname{ind} f'(x_1) = \operatorname{ind} f'(x_2)$ (т. к. множество $\{f'((1-t)x_1 + tx_2)\}_{t\in[0,1]} \subset \Phi(E,F)$ является линейно связным, индекс на этом множестве постоянен). Таким образом, $\operatorname{ind} f'(x) = const$ (на E), и это постоянное значение индекса называется **индексом фредгольмова отображения f.**

12. Фредгольмовы функционалы

Определение. Если значениями отображения являются числа, то отображение называется *функционалом*.

Рассмотрим гладкий функционал V на банаховом пространстве E. Предположим, что E непрерывно вложено в банахово пространство F, F непрерывно вложено в гильбертово пространство H и E плотно в H.

Замечание 1. Говорят, что банахово пространство E непрерывно вложено в банахово пространство F, если:

1) E является подмножеством F;

2) из сходимости последовательности $\{x_n\} \subset E$ по норме пространства E следует сходимость этой последовательности по норме пространства F.

Замечание 2. Говорят, что пространство E плотно в пространстве H, если замыкание E по норме H совпадает с H, то есть для любой точки $a \in H$ существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, сходящаяся к a по норме H.

Предположим также, что задано отображение $f: E \to F$, такое, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = < f(x), h > \ \forall x \in E, \forall h \in E$$

($<\cdot,\cdot>$ – скалярное произведение в ГП H).

Отображение $f: E \to F$ называется *градиентом функционала* V и обозначается $grad V$.

В этом случае говорят, что функционал V обладает *градиентной реализацией* в тройке пространств $\{E, F, H\}$.

Пример. Пусть $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, то есть V – функция n переменных. Тогда значение производной Фреше функции V в точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ на векторе $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \;\; \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) \;\; \dots \;\; \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)h_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)h_n = < f(x), h >,$$

где $f(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \; \frac{\partial V}{\partial x_2}(x), \; \dots, \; \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T = grad\, V.$

где $f(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(x),\ \ldots,\ \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T = grad\, V.$

Итак, в данном случае «новое» определение градиента равносильно «старому» (из матем. анализа).

Заметим также, что в этом случае $E = F = H = \mathbb{R}^n$.

Лемма. Точка $x_0 \in E$ является критической точкой функционала тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0$.

Доказательство.

Достаточность очевидна.

Необходимость. Если x_0 – критическая точка функционала V, то $< f(x_0), h > = 0$ при всех $h \in E$.

В силу плотности E в H, существует последовательность $\{h_n\} \subset E$, сходящаяся к $f(x_0) \in F$ по норме H.

Учитывая, что $< f(x_0), h_n > = 0$ при любом n, и используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим:

$$\|f(x_0)\|_H^2 = < f(x_0), f(x_0) > = \left| < f(x_0), f(x_0) > - < f(x_0), h_n > \right| =$$

$$= \left| < f(x_0), f(x_0) - h_n > \right| \leq \left\| f(x_0) \right\|_H \cdot \left\| f(x_0) - h_n \right\|_H \to 0$$

при $n \to \infty$.

Так как число $\|f(x_0)\|_H^2$ от n не зависит, то $\|f(x_0)\|_H^2 = 0$. Таким образом, $f(x_0) = 0$.

Лемма доказана.

Определение. Функционал V называется ***фредгольмовым***, если его градиент $f: E \to F$ является фредгольмовым отображением. При этом *индексом функционала* V называют индекс отображения f.

13. Вычисление градиентов некоторых функционалов

Во всех рассматриваемых ниже примерах $H = L_2[0,1]$, E, F – вещественные банаховы линейные пространства, E линейно и непрерывно вложено в F, F линейно и непрерывно вложено в H и E плотно в H.

Пример 1. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > = \frac{1}{2}\int_0^1 (Ax)x\,dt,$$

где $x \in E$, $A: E \to F$ – симметрический линейный непрерывный оператор (оператор называется *симметрическим*, если $< Ax, y > = < x, Ay > \ \forall\, x, y \in E$).

Вычислим градиент функционала V.

Рассмотрим приращение функционала V:

$$V(x+h) - V(x) = \frac{1}{2} < A(x+h), x+h > - \frac{1}{2} < Ax, x > =$$

$$= \frac{1}{2} < Ax, h > + \frac{1}{2} < Ah, x > + \frac{1}{2} < Ah, h >.$$

Рассмотрим приращение функционала V:

$$V(x+h)-V(x) = \frac{1}{2}< A(x+h), x+h > - \frac{1}{2}< Ax, x > =$$

$$= \frac{1}{2}< Ax, h > + \frac{1}{2}< Ah, x > + \frac{1}{2}< Ah, h >.$$

В силу симметричности оператора A, $< Ah, x > = < h, Ax > = < Ax, h >$.

Следовательно, $V(x+h)-V(x) = < Ax, h > + \frac{1}{2}< Ah, h >$.

Таким образом, $gradV(x) = Ax$, если $< Ah, h > = o(\|h\|_E)$.

Используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим: $\left| < Ah, h > \right| \le \left\| Ah \right\|_H \cdot \left\| h \right\|_H$.

Следовательно, $\dfrac{\left| < Ah, h > \right|}{\left\| h \right\|_E} \le \left\| Ah \right\|_H \cdot \dfrac{\left\| h \right\|_H}{\left\| h \right\|_E} \le k_1 \cdot k_2 \cdot \left\| Ah \right\|_H \le$

$\le k_1 \cdot k_2 \cdot k_2 \cdot \left\| Ah \right\|_F \le k_1 \cdot k_2^2 \cdot \left\| A \right\| \cdot \left\| h \right\|_E \to 0$ при $\left\| h \right\|_E \to 0$,

так как $\left\| h \right\|_F \le k_1 \left\| h \right\|_E$, $\left\| h \right\|_H \le k_2 \left\| h \right\|_F$

(в силу непрерывности вложений E в F и F в H).

Итак, $< Ah, h > = o(\left\| h \right\|_E)$.

Следовательно, $grad\, V(x) = Ax$.

Пример 2. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}^2 dt,$$

заданный на БП $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, которое непрерывно вложено в БП $F = C[0,1]$; пространство F непрерывно вложено в ГП $H = L_2[0,1]$;

$$\|x\|_E = \max_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max_{t\in[0,1]}|\dot{x}(t)| + \max_{t\in[0,1]}|\ddot{x}(t)|, \qquad \|x\|_F = \max_{t\in[0,1]}|x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t)dt, \qquad <x, y>_H = \int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt.$$

Вычислим $grad\,V(x)$.

Сравним нормы пространств E, F и $H = L_2[0,1]$.

1) $$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t)dt \le \int_0^1 \left(\max_{t\in[0,1]} |x(t)| \right)^2 dt = \int_0^1 \|x\|_F^2 dt = \|x\|_F^2,$$

следовательно, $\|x\|_H \le \|x\|_F$.

2) Очевидно, что $\|x\|_F \le \|x\|_E$.

Из полученных неравенств вытекает непрерывность вложений E в F и F в H.

Используя равенство $\dot{x}\dot{x}+\ddot{x}x=(\dot{x}x)^{\dot{}}$, получим:

$$V(x)=\frac{1}{2}\int_0^1(\dot{x}x)^{\dot{}}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^1\ddot{x}x\,dt=(\dot{x}x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\ddot{x}x\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d^2x}{dt^2}x\,dt=\frac{1}{2}<-\frac{d^2}{dt^2}x,x>.$$

Обозначим $-\dfrac{d^2}{dt^2}=A$.

Нетрудно проверить симметричность оператора A (проверьте самостоятельно!).

Таким образом, этот пример является частным случаем примера 1.

Следовательно, $f(x) = grad\, V(x) = Ax = -\dfrac{d^2}{dt^2}x$ и

$$f'(x) = -\frac{d^2}{dt^2} \quad .$$

Покажем ***фредгольмовость*** отображения $f'(x_0): E \to F$ (которая означает фредгольмовость функционала V).

Докажем, что $f'(x_0): E \to F$ – изоморфизм (при любом фиксированном $x_0 \in E$).

1) Пусть $x \in \operatorname{Ker} A$ ($A = -\dfrac{d^2}{dt^2} = f'(x_0)$).

Тогда $Ax = -\ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = at + b.$

В силу условия $x(0) = x(1) = 0$ получаем, что $x(t) \equiv 0.$

Следовательно, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

2) Рассмотрим произвольный $y \in F$. Элемент $x \in C^2[0,1]$, заданный выражением

$$x(t) = t\int_0^1 \left(\int_0^s y(u)\,du \right) ds - \int_0^t \left(\int_0^s y(u)\,du \right) ds,$$

для которого выполняется условие $x(0) = x(1) = 0$, является решением уравнения $Ax = -\ddot{x} = y$, то есть является прообразом элемента y. Следовательно, $\operatorname{Im} A = F$.

Итак, оператор $f'(x_0): E \to F$ – изоморфизм (при любом фиксированном $x_0 \in E$), то есть фредгольмов оператор индекса 0. Следовательно отображение $f: E \to F$ является фредгольмовым индекса 0, а функционал V – фредгольмовым функционалом индекса 0.

Пример 3. Рассмотрим функционал

$$V(x)=\int_0^1 \varphi(x(t))dt,$$

заданный на БП $E=\{x\in C^2[0,1]\mid x(0)=x(1)=0\}$, где φ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на $\mathbb{R}^1$. Пространство E непрерывно вложено в БП $F=C[0,1]$; пространство F непрерывно вложено в ГП $H=L_2[0,1]$;

$$\|x\|_E = \max_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max_{t\in[0,1]}|\dot{x}(t)| + \max_{t\in[0,1]}|\ddot{x}(t)|, \quad \|x\|_F = \max_{t\in[0,1]}|x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t)\,dt, \quad <x, y>_H = \int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt.$$

Вычислим $grad\, V$ в некоторой точке $a \in E$.

Воспользуемся формулой Тейлора в форме Лагранжа:

$$\varphi(a+h) = P_n(a) + r_n(a),$$

где $P_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k,$

$$r_n(a) = \frac{\varphi^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}, \quad \theta \in (0,1),$$

считая, что a и h – значения функций $a(t)$ и $h(t)$ при некотором $t \in [0,1]$ (число θ зависит от значения $h(t)$).

При $n=1$ получим:

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+\varphi'(a)h+r_1(a), \qquad (1)$$

где

$$r_1(a)=\frac{\varphi''(a+\theta h)}{2}\cdot h^2. \qquad (2)$$

Рассмотрим приращение функционала V (с учетом (1) и (2)):

$$V(a+h)-V(a)=\int_0^1 \varphi(a+h)dt-\int_0^1 \varphi(a)dt=$$

$$=\int_0^1 (\varphi(a+h)-\varphi(a))dt=\int_0^1 (\varphi'(a(t))h(t)+r_1(a(t)))dt=$$

$$V(a+h)-V(a)=\int_0^1 \varphi(a+h)dt-\int_0^1 \varphi(a)dt=$$

$$=\int_0^1 (\varphi(a+h)-\varphi(a))dt=\int_0^1 (\varphi'(a(t))h(t)+r_1(a(t)))dt=$$

$$=\int_0^1 \varphi'(a(t))h(t)dt+\int_0^1 r_1(a(t))dt=<\varphi'(a),h>_H+\int_0^1 r_1(a(t))dt.$$

Докажем, что $\int_0^1 r_1(a(t))dt=o(\|h\|_E)$. Тогда, очевидно, $grad\,V(a)=\varphi'(a)$.

Итак, поскольку $\|h\|_E \to 0$, можно считать, что $\|h\|_E \le 1$.

Тогда получаем следующую оценку (при $\forall\,\theta \in (0,1)$, $\forall t \in [0,1]$):

$$| a(t) + \theta \cdot h(t) | \le | a(t) | + | \theta | \cdot | h(t) | \le | a(t) | + | h(t) | \le$$
$$\le \| a \|_E + \| h \|_E \le \| a \|_E + 1.$$

Следовательно, значения функции $a(t) + \theta \cdot h(t)$, где $h(t)$ – достаточно малая (по норме) добавка, при $\forall t \in [0,1]$ и $\forall\,\theta \in (0,1)$ можно считать заключёнными в некотором отрезке $[-c,\, c]$.

Функция φ'' непрерывна на $\mathbb{R}^1$ и, следовательно, ограничена на любом отрезке, поэтому существует такая константа k, что $|\varphi''(x)| \le k$ для любого $x \in [-c, c]$. Отсюда следует, что $|\varphi''(a(t) + \theta h(t))| \le k \quad \forall \theta \in (0,1)$, $\forall t \in [0,1]$.

Используя последнее неравенство и равенство (2), установим следующие соотношения:

$$\left| \int_0^1 r_1(a(t))dt \right| \le \int_0^1 |\, r_1(a(t)) \,|\, dt = \int_0^1 \left| \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2 \right| dt \le \frac{k}{2} \int_0^1 h^2(t) dt \le$$

$$\le \frac{k}{2} \int_0^1 \left(\max_{t \in [0,1]} |h(t)| \right)^2 dt = \frac{k}{2} \|h\|_F^2 \le \frac{k}{2} \|h\|_E^2 .$$

$$\left|\int_0^1 r_1(a(t))dt\right| \le \int_0^1 |\, r_1(a(t))\,|\, dt = \int_0^1 \left|\frac{\varphi''(a+\theta h)}{2}\cdot h^2\right| dt \le \frac{k}{2}\int_0^1 h^2(t)dt \le$$

$$\le \frac{k}{2}\int_0^1 \left(\max_{t\in[0,1]}|h(t)|\right)^2 dt = \frac{k}{2}\|h\|_F^2 \le \frac{k}{2}\|h\|_E^2 .$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\left|\int_0^1 r_1(a(t))dt\right|}{\|h\|_E} \le \frac{k}{2}\cdot\|h\|_E \to 0 \text{ при } \|h\|_E \to 0,$$

то есть $\int_0^1 r_1(a(t))dt = o(\|h\|_E)$.

Следовательно, $grad\, V(a) = \varphi'(a)$.

Пример 4. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2 + \lambda x}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dt,$$

где $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, $F = C[0,1]$, $H = L_2[0,1]$,

λ – параметр, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Представим функционал в виде суммы

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x),$$

где $V_1(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \dot{x}^2 dt$, $V_2(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\lambda x}{2} dt$, $V_3(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^4}{4} dt$.

Очевидно, что

$$f(x) = grad V(x) = \sum_{i=1}^{3} grad V_i(x) = -\frac{d^2}{dt^2} x + \frac{\lambda}{2} + x^3$$

(см. примеры 2 и 3).

14. Вспомогательные задачи

Задача 1. ЛОО A действует из БП $E = C^2[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$(Ax)(t) = k \cdot x(t)\,, \quad k = const\,, \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Докажите, что оператор A является вполне непрерывным.

Доказательство. Рассмотрим произвольное ограниченное множество $M \subset E$. Надо доказать, что его образ $A(M)$ является относительно компактным множеством в БП $F = C[0,1]$.

Для этого воспользуемся **теоремой Арцела.**

Напоминание

Относительная компактность в $C[a,b]$.

Пусть множество $M = \{x(t)\} \subset C[a,b]$. *Ограниченность* M означает, что

$$(\exists K \geq 0)(\forall x \in M)(\forall t \in [a,b])[\,|x(t)| \leq K\,].$$

Множество M называется *равностепенно непрерывным*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall t_1, t_2 \in [a,b])[(|t_1 - t_2| < \delta) \to (|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon)].$$

Теорема Арцела. *Множество $M \subset C[a,b]$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Нетрудно убедиться, что множество $A(M)$ ограничено в F (доказать самостоятельно!).

Покажем, что множество $A(M)$ равностепенно непрерывно.

Ограниченность множества M означает существование такой константы R, что для $\forall x \in M$

$$\|x\|_E = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |\dot{x}(t)| + \max_{t\in[0,1]} |\ddot{x}(t)| \le R,$$

откуда вытекает, что $\max\limits_{t\in[0,1]} |\dot{x}(t)| \le R$ для $\forall x \in M$.

Рассмотрим произвольный элемент $y \in A(M)$. Для y найдется такой $x \in M$, что $y = Ax = k \cdot x$. Заметим, что для $\forall\, y \in A(M)$ $\max\limits_{t\in[0,1]} \left|\dot{y}(t)\right| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left|k \cdot \dot{x}(t)\right| \le |k| \cdot R = R_1$.

В силу **теоремы Лагранжа** (из курса мат. анализа), для любых точек $t_1, t_2 \in [0,1]$ найдется точка $\tau \in [0,1]$, такая, что $y(t_1) - y(t_2) = \dot{y}(\tau)(t_1 - t_2)$. Следовательно, для $\forall\, y \in A(M)$ и для любых точек $t_1, t_2 \in [0,1]$

$$\left| y(t_1) - y(t_2) \right| \le \max_{\xi\in[0,1]} \left|\dot{y}(\xi)\right| \cdot \left|t_1 - t_2\right| \le R_1 \cdot \left|t_1 - t_2\right|.$$

В силу **теоремы Лагранжа** (из курса мат. анализа), для любых точек $t_1, t_2 \in [0,1]$ найдется точка $\tau \in [0,1]$, такая, что $y(t_1) - y(t_2) = \dot{y}(\tau)(t_1 - t_2)$. Следовательно, для $\forall\, y \in A(M)$ и для любых точек $t_1, t_2 \in [0,1]$

$$\left| y(t_1) - y(t_2) \right| \le \max_{\xi \in [0,1]} \left| \dot{y}(\xi) \right| \cdot \left| t_1 - t_2 \right| \le R_1 \cdot \left| t_1 - t_2 \right|.$$

Тогда

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists \delta = \frac{\varepsilon}{R_1}\right)\left(\forall\, y \in A(M)\right)\left(\forall t_1, t_2 \in [0,1] : \left| t_1 - t_2 \right| < \delta\right)$$

$$\left[\left| y(t_1) - y(t_2) \right| \le R_1 \cdot \left| t_1 - t_2 \right| < R_1 \cdot \delta = \varepsilon \right],$$

что и означает равностепенную непрерывность множества $A(M)$.

Итак, для произвольного ограниченного множества $M \subset E$ его образ $A(M)$ относительно компактен в БП $F = C[0,1]$. Следовательно, оператор A является вполне непрерывным.

Задача 2. ЛОО A действует из БП $E = C^2[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$(Ax)(t) = \alpha(t) \cdot x(t),$$

где $\alpha(t)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,1]$ функция, $x \in E$, $t \in [0,1]$.

Докажите, что оператор A является вполне непрерывным.

Доказать самостоятельно !

Задача 3. Пусть φ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на $\mathbb{R}^1$. Отображение f действует из БП $E = C^2[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$f(x)(t) = \varphi(x(t)), \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Найдите производную Фреше отображения f.

Решение.

Вычислим производную $f'(a)$ в произвольной точке $a \in E$.

Вычислим производную $f'(a)$ в произвольной точке $a \in E$.

Воспользуемся формулой Тейлора в форме Лагранжа:

$$\varphi(a+h) = P_n(a) + r_n(a),$$

где $P_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k,$

$$r_n(a) = \frac{\varphi^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}, \quad \theta \in (0,1),$$

считая, что a и h – значения функций $a(t)$ и $h(t)$ при некотором $t \in [0,1]$ (число θ зависит от значения $h(t)$).

При $n=1$ получим:

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+\varphi'(a)h+r_1(a), \tag{1}$$

где

$$r_1(a)=\frac{\varphi''(a+\theta h)}{2}\cdot h^2. \tag{2}$$

Рассмотрим приращение отображения f (с учетом (1) и (2)) :

$$f(a+h)-f(a) = \varphi(a+h)-\varphi(a) = \varphi'(a)h+r_1(a).$$

Обоснование того, что $r_1(a)=o(\|h\|_E)$, почти дословно повторяет аналогичное доказательство из **примера 3** (пар.13).

Тогда, очевидно,

$$\big(f'(a)h\big)(t) = \varphi'(a(t)) \cdot h(t) \quad \text{при} \quad \forall h \in E \quad \text{и} \quad \forall t \in [0,1].$$

15. Уравнение маятника

Рассмотрим тройку пространств

$E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, $F = C[0,1]$, $H = L_2[0,1]$ и отображение $f: E \to F$, $f(x) = \ddot{x} + \lambda \sin x$, где $\lambda \in \mathbb{R}^1$ (λ – фиксированное значение параметра).

Уравнение

$$\ddot{x} + \lambda \sin x = 0 \tag{1}$$

называется ***уравнением маятника*** (при $\lambda > 0$).

Отображение f является ***потенциальным***, то есть $f(x) = grad\,V(x)$, где

$$V(x) = -\int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \lambda \cos x \right) dt, \quad x \in E.$$

Докажем фредгольмовость отображения f.

Представим f следующим образом:

$$f(x) = \frac{d^2}{dt^2}x + \lambda \sin x = Ax + \varphi(x),$$

где $Ax = \dfrac{d^2}{dt^2}x$, $A = \dfrac{d^2}{dt^2} : E \to F$ – ЛОО, $\varphi(x) = \lambda \sin x$.

Тогда для $\forall x \in E$ и $\forall h \in E$

$$f'(x)h = Ah + \varphi'(x)\cdot h = \frac{d^2}{dt^2}h + (\lambda \cos x)\cdot h = \ddot{h} + (\lambda \cos x)\cdot h$$

(см. **задачу 3** из пар. 14).

Оператор $A = \dfrac{d^2}{dt^2} : E \to F$ является изоморфизмом (см. **пример 2** из пар. 13).

Рассмотрим ЛОО $B_x : E \to F$, $B_x h = (\lambda \cos x) \cdot h$, и покажем, что он является вполне непрерывным (при любом фиксированном $x \in E$).

Поскольку элемент $x \in E$ фиксирован, то $B_x h = \alpha_x \cdot h$, где $\alpha_x = \lambda \cos x$, и мы находимся в условиях **задачи 2** из пар. 14 ($\alpha_x(t) = \lambda \cos x(t)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,1]$ функция). Следовательно, оператор $B_x : E \to F$ – вполне непрерывный.

Итак, оператор $f'(x): E \to F$ представляет собой сумму изоморфизма и вполне непрерывного оператора, то есть является **фредгольмовым линейным оператором индекса ноль** (при любом фиксированном $x \in E$). А это значит, что отображение $f: E \to F$ – **фредгольмово отображение индекса ноль.**