



# Электричество и магнетизм

## Лекция 05

### Электрическое поле в диэлектриках

29 сентября 2021 года

Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,  
Ольчак Андрей Станиславович



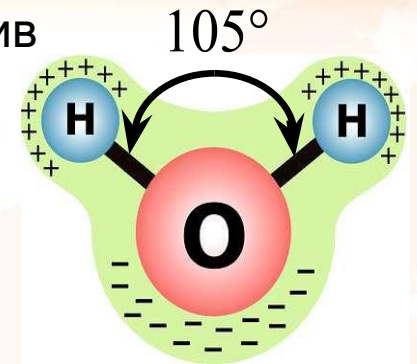
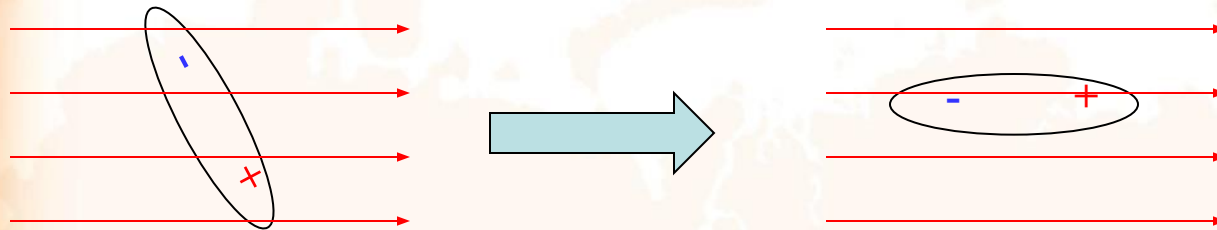
# Проводники и диэлектрики



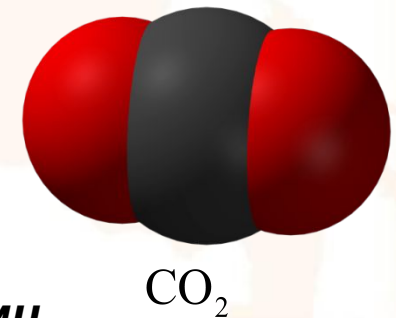
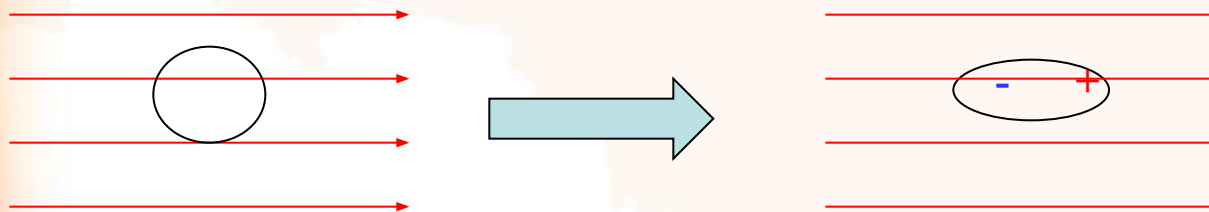
**Диэлектрик** – вещество, где нет свободных электрических зарядов, способных перемещаться под действием приложенного электрического поля (= проводить электрический ток).

**Проводник** – вещество, где способные перемещаться заряды есть и электрический ток (упорядоченное направленное движение электрических зарядов) существовать может .

**Полярные (в частности - вода) – молекулы обладают дипольным электрическим моментом, ориентируются против приложенного внешнего поля. .**

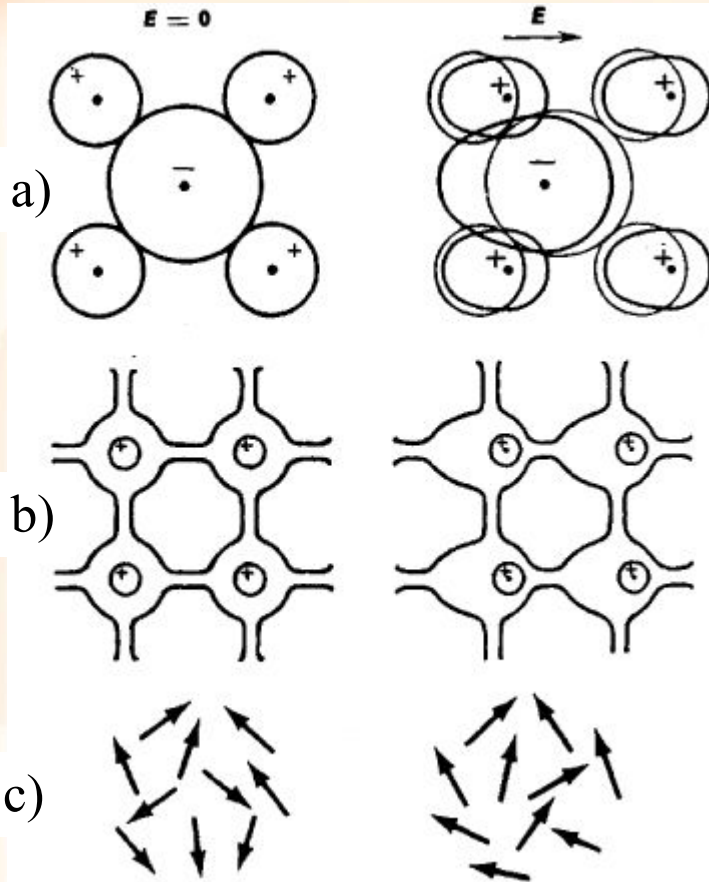


**Неполярные (инертные газы, органика, пластик и др.) – могут приобретать дипольный момент в эл. поле (поляризуемость).**



Заряды, создающие внешнее поле, называются **сторонними**.

Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются **связанными**.



(а) электронная и ионная поляризация в ионных кристаллах,

(б) Электронная поляризация в ковалентных кристаллах

(в) Ориентационная поляризация в полярных диэлектриках





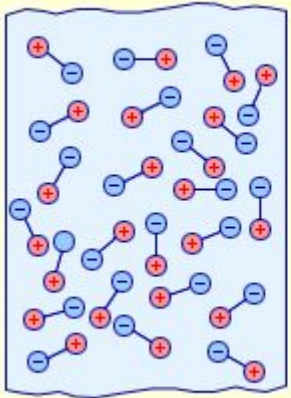
# Поляризация диэлектриков



**Эффект поляризации –  
см. «Физика в опытах»!**

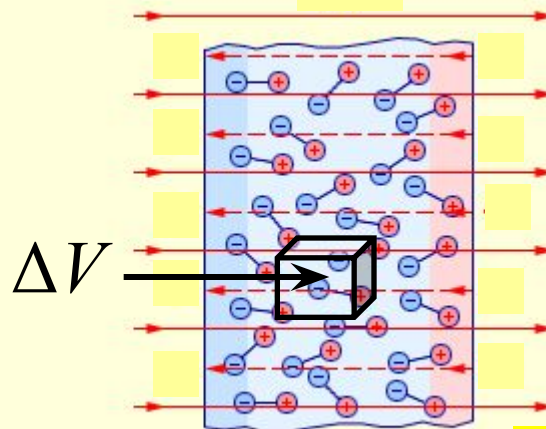


$$\vec{E}_0 = 0$$



$$\sum \vec{P}_i = 0$$

$$\vec{E}_0$$



$$\sum \vec{P}_i \neq 0$$

Вектор поляризованности –  
дипольный момент  
единицы объема  
поляризованного вещества

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Опыт: в изотропном диэлектрике

$$P = \epsilon_0 \xi E$$

$\xi (>0)$  – диэлектрическая восприимчивость.

Диэлектрик называется *однородным*, если во всех его точках диэлектрическая восприимчивость одинакова:  $\xi = Const$



# Характеристики диэлектриков



**Вектор поляризованности** – дипольный момент единицы объема поляризованного вещества

В изотропном диэлектрике  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \xi \mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$$

$\xi$  – диэлектрическая восприимчивость

$\varepsilon = 1 + \xi (>1)$  – относительная диэлектрическая проницаемость (безразмерный фактор, показывающий, во сколько раз снижается

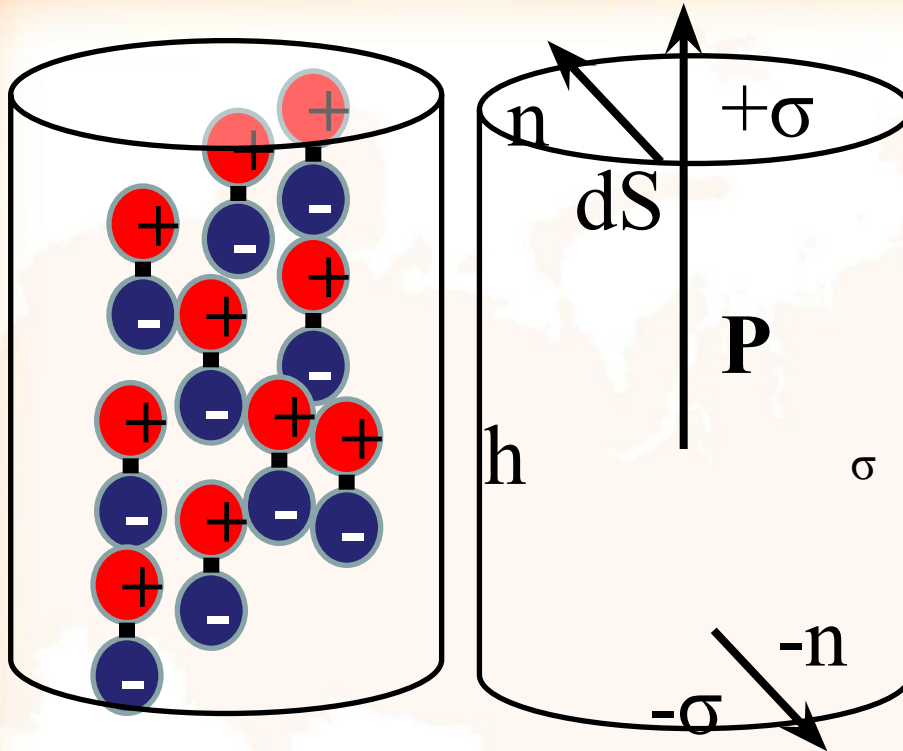
поле в поляризованном диэлектрике;  $\varepsilon = E_0 / E$ ;  $\xi = \varepsilon - 1$

Как показывает опыт, в однородном диэлектрике поле снижается именно

в  $\varepsilon = (1 + \xi)$  раз.

$\varepsilon_{эл} = (1 + \xi)\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость (размерная, Ф/м)

В однородном диэлектрике  $\xi = Const > 0$ ;  $\varepsilon = Const > 1$



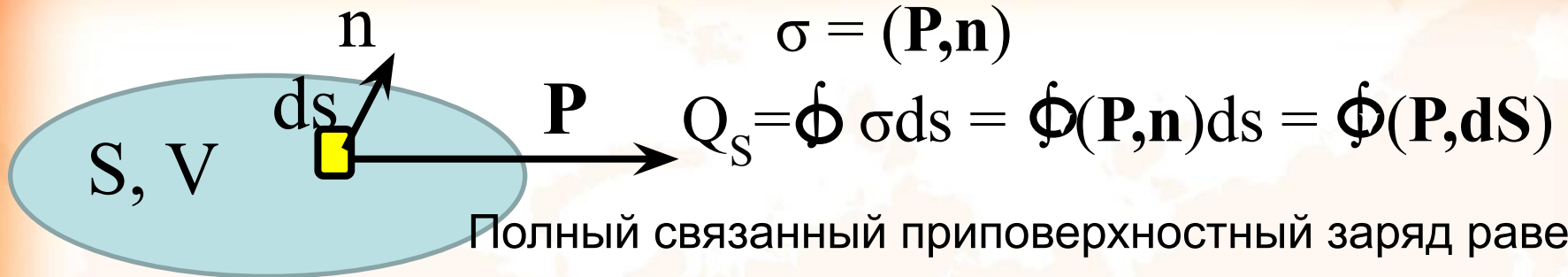
Дипольные моменты цепочки сонаправленных диполей просто складываются. Дипольный момент цепочки равен величине заряда  $q$ , умноженной на длину цепочки.

$$|\Sigma p| = h\sigma dS = PdV = \\ = PhdS\cos\theta = (\mathbf{P}, \mathbf{n})hdS$$

Плотность приповерхностного заряда

$$\sigma = (\mathbf{P}, \mathbf{n})$$





Полный связанный приповерхностный заряд равен потоку вектора поляризованности через поверхность.

$Q_V = \int \rho' dV$  – полный объемный связанный заряд внутри поверхности.

$Q_V + Q_S = 0$  - условие электронейтральности вещества

Если диэлектрик поляризован неоднородно,  $Q_V = -Q_S \neq 0$

$$-\int \rho' dV = \oint (\mathbf{P}, d\mathbf{S}) = \int \text{div} \mathbf{P} dV \Rightarrow \text{div} \mathbf{P} = -\rho'$$

В однородно поляризованном диэлектрике  $\mathbf{P} = \text{Const}$ ,  $\rho' = 0$



$$\rho_{\text{стор}} = \rho, \quad \rho_{\text{связ}} = \rho' \quad (\nabla, \vec{\mathbf{E}}) = \frac{\rho + \rho'}{\epsilon_0}$$

$$\rho' = -(\nabla, \vec{\mathbf{P}}) \quad \epsilon_0 (\nabla, \vec{\mathbf{E}}) = \rho - (\nabla, \vec{\mathbf{P}})$$

$$\rho = (\nabla, \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}}) + (\nabla, \vec{\mathbf{P}}) = (\nabla, \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}})$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}} \quad [D] = \frac{\text{Кл}}{\text{М}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\nabla, \vec{\mathbf{D}}) = \rho}$$

В изотропном диэлектрике  $\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \xi \vec{\mathbf{E}}$ .

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \epsilon_0 \xi \vec{\mathbf{E}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} (1 + \xi)$$

$$\boxed{\epsilon = 1 + \xi}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \epsilon \vec{\mathbf{E}}}$$



$$\rho_{\text{стор}} = \rho, \quad \rho_{\text{связ}} = \rho' \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\nabla, \overset{\nabla}{\mathbf{D}}) = \rho}$$

В изотропном диэлектрике

$$\boxed{\overset{\nabla}{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon \overset{\nabla}{\mathbf{E}}}$$

$$\boxed{\varepsilon = 1 + \xi}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho = \varepsilon_0 \varepsilon \text{ div } \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \text{ div}(-\mathbf{grad } \varphi) = -\varepsilon_0 \varepsilon \Delta \varphi$$

$$\boxed{\rho = -\varepsilon_0 \varepsilon \Delta \varphi} \text{ - уравнение Пуассона для электростатического поля}$$



Теорема Гаусса для вектора электрического смещения в интегральной форме

$$\Rightarrow \boxed{(\nabla, \vec{\mathbf{D}}) = \rho}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{\mathbf{D}} d\vec{\mathbf{S}} = q}$$

Аналогия с теоремой Гаусса для электрического поля.  
Только заряд, вместо полного – исключительно сторонний

$$(\nabla, \vec{\mathbf{D}}) = \rho \Rightarrow \Phi_{\vec{\mathbf{D}}} = q$$

$$\rho_{\text{стор}} = \rho, \quad \rho_{\text{связ}} = \rho'$$

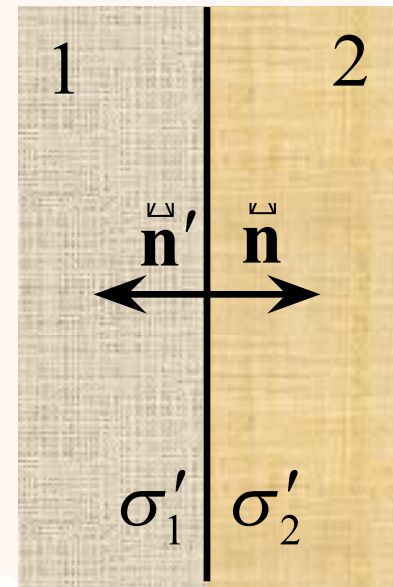


Поверхностная плотность связанных зарядов на границе двух диэлектриков

$$\sigma = (\mathbf{P}, \mathbf{n})$$

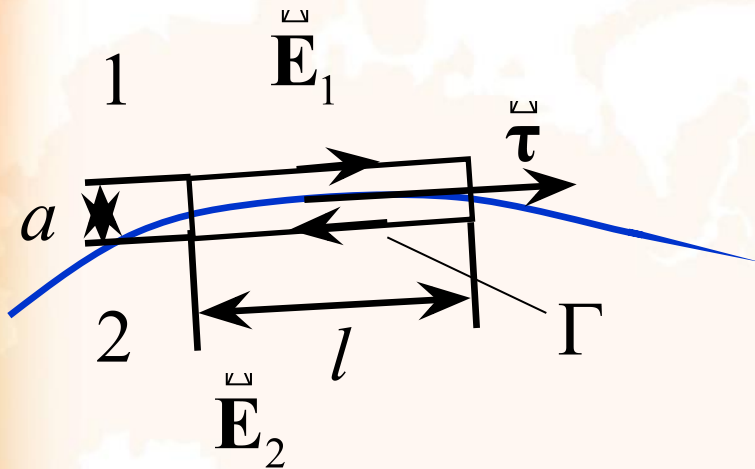
$$\sigma' = \sigma'_1 + \sigma'_2 = P_{1n} + P_{2n'} = P_{1n} - P_{2n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma' = P_{1n} - P_{2n}}$$





Условие для тангенциальной составляющей вектора  $\vec{E}$  - разность потенциалов по замкнутому контуру всегда ноль



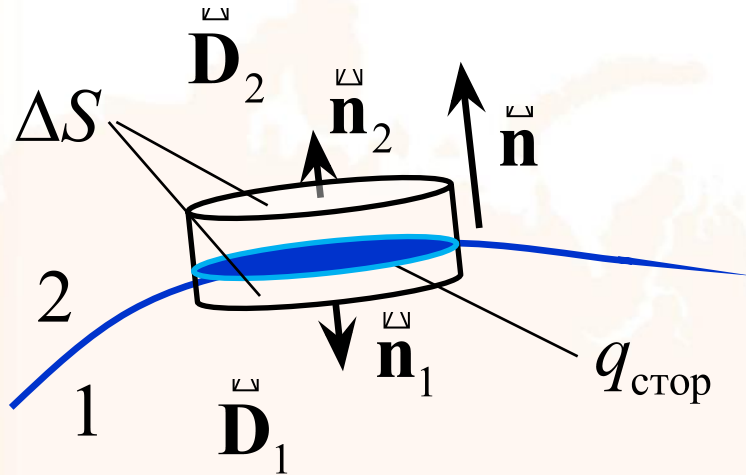
$$l \gg a \quad \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} &= \int_1 \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_2 \vec{E}_2 d\vec{l} = \\ &= E_{1\tau} l - E_{2\tau} l = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$$



Условие для нормальной составляющей вектора  $\vec{D}$  - поток через замкнутую поверхность равен стороннему заряду внутри нее



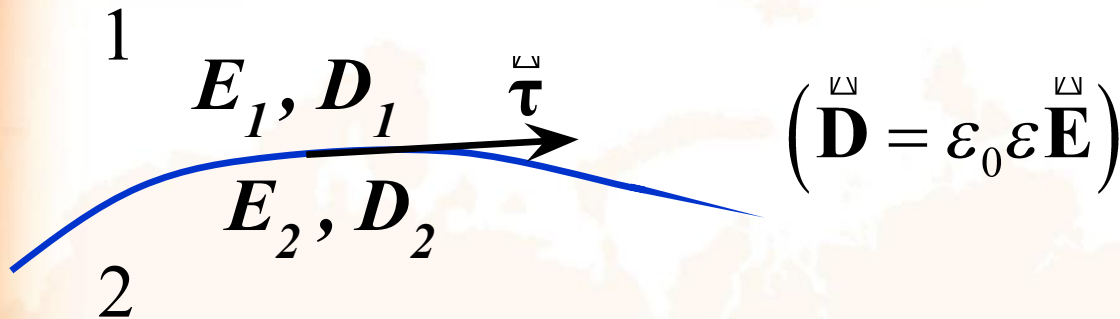
$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_{1n_1} \Delta S + D_{2n_2} \Delta S =$$

$$= (D_{2\text{стор}} - D_{1n}) \Delta S = q$$

$$q_{\text{стор}} = \sigma_{\text{стор}} \Delta S$$

$$D_{2\text{стор}} - D_{1n} = \sigma$$

$$\sigma_{\text{стор}} = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$



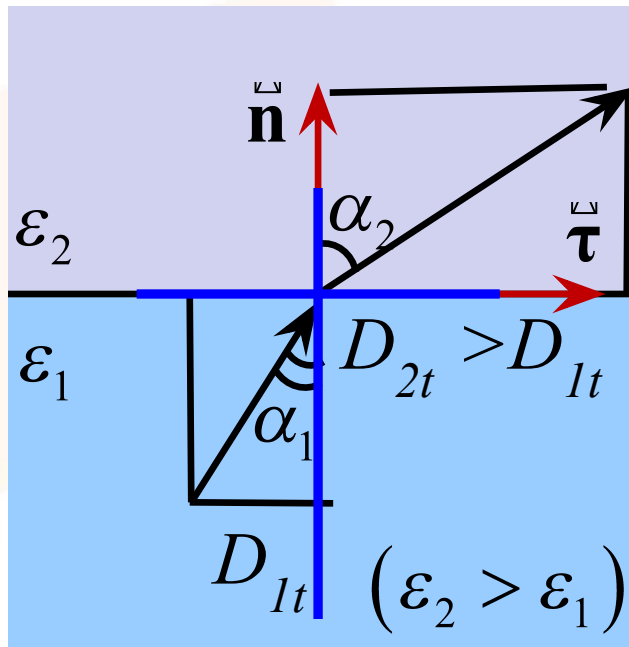
$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \Rightarrow \frac{D_{1\tau}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_2}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$





## Преломление силовых линий вектора $D$



$$\sigma_{\text{стор}} = 0$$

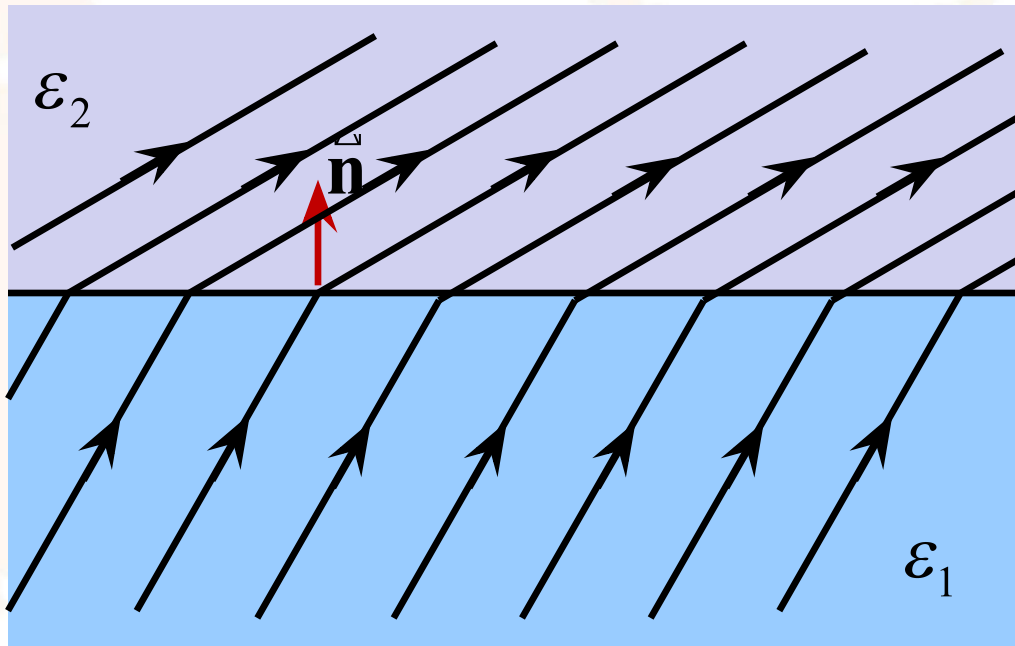
$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \Rightarrow \frac{D_{1\tau}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_2}$$

$$\text{tg } \alpha_1 / \text{tg } \alpha_2 = D_{1t} D_{2n} / D_{1n} D_{2t}$$

$$\frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

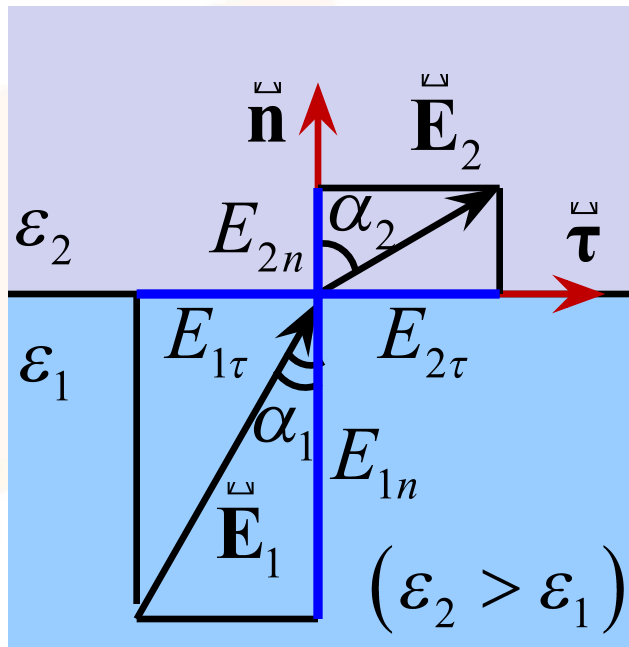
## Преломление силовых линий вектора $D$



$$\sigma_{\text{стор}} = 0 \quad (\varepsilon_2 > \varepsilon_1)$$



Преломление силовых линий вектора  $\vec{E}$



$$\sigma_{\text{стор}} = 0$$

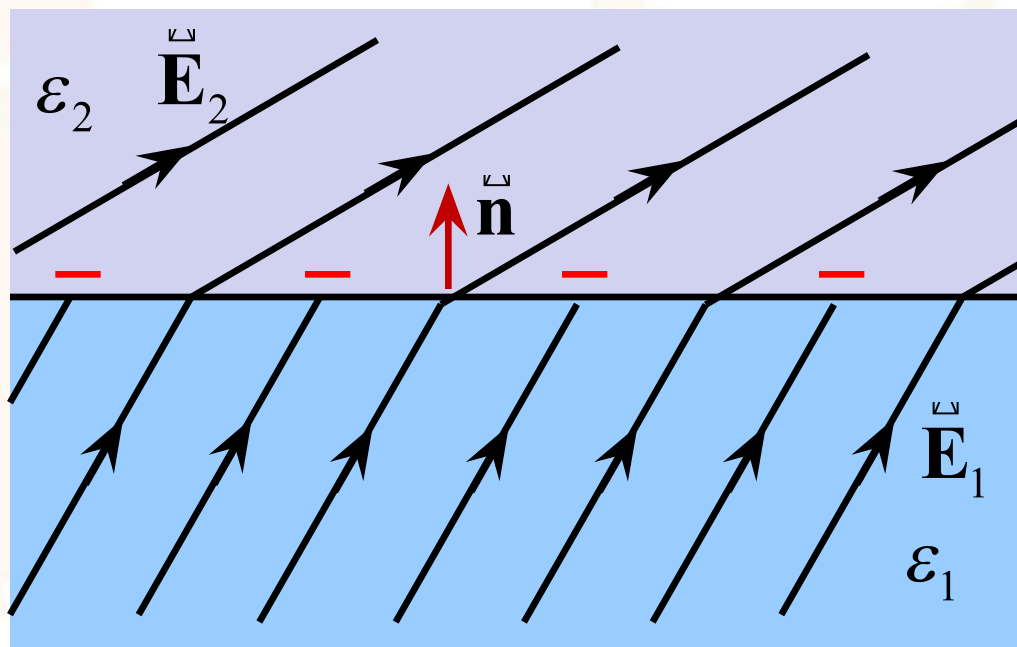
$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \Rightarrow \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}, \quad \text{tg } \alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}},$$

$$\frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} \frac{E_{1n}}{E_{1\tau}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}}$$

$$\frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$



$$\sigma_{\text{стор}} = 0 \quad (\varepsilon_2 > \varepsilon_1)$$





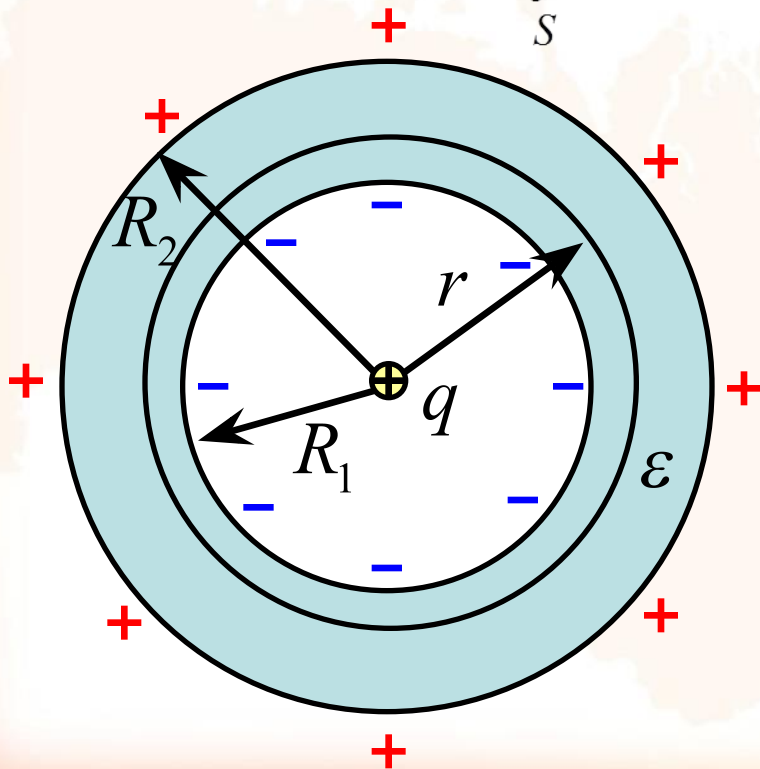
В каких случаях  $\vec{E}_{\text{диэл}} = \frac{\vec{E}_{\text{внешн}}}{\varepsilon}$  ?

Если однородный диэлектрик ( $\varepsilon = \text{const}$ ) целиком заполняет пространство между эквипотенциальными поверхностями внешнего электрического поля, т.е. поля сторонних зарядов.

Только в этом случае линии напряженности электрического поля входят и выходят из диэлектрика по нормали к поверхности.

## Пример 1

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{стор}} \quad 4\pi r^2 D_r = q \quad D_r = \frac{q}{4\pi r^2}$$

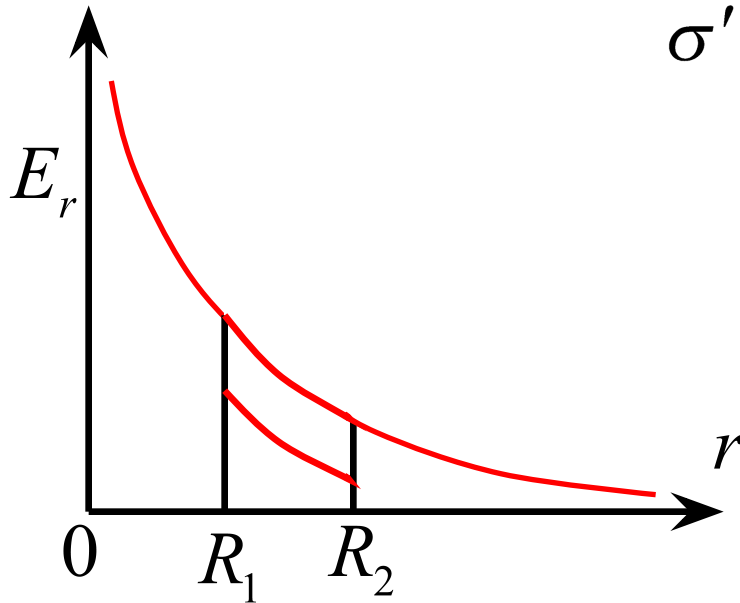


а)  $R_1 < r < R_2 \quad D_r = \epsilon \epsilon_0 E_r$

$$E_r = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2}$$

б)  $r < R_1$  и  $R_2 < r, \quad \epsilon = 1$

$$D_r = \epsilon_0 E_r \quad E_r = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

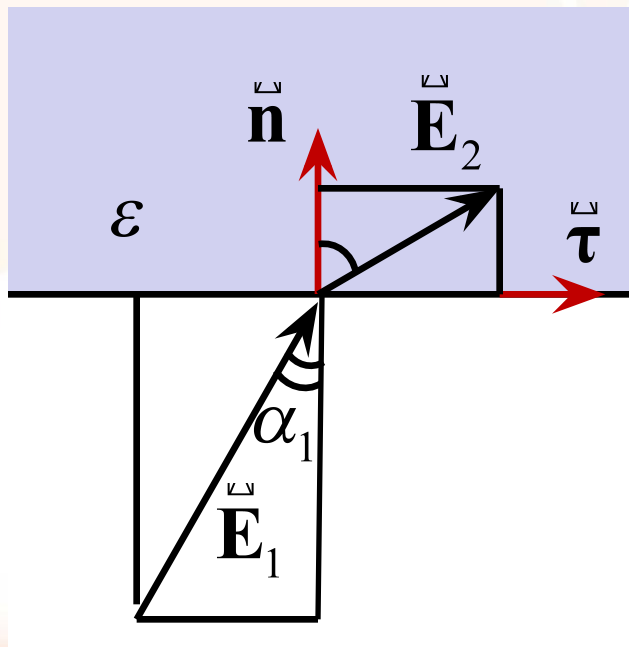


$$\begin{aligned}\sigma'(R_1) &= -P_r(R_1) = -\varepsilon_0 \xi E_r(R_1) = \\ &= -\frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon R_1^2}\end{aligned}$$

$$\sigma'(R_2) = P_r(R_2) = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon R_2^2}$$

$$\rho' = -\operatorname{div} \vec{\mathbf{P}} = 0, \quad q' = \sigma'(R_2) 4\pi R_2^2 = \frac{q(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}$$

**Пример 2.** Вектор напряжённости  $\vec{E}_1$  электрического поля в вакууме образует угол  $\alpha_1$  с нормалью к поверхности диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Найти напряжённость электрического поля в диэлектрике.



$$E_{2\tau} = E_{1\tau} \Rightarrow E_{2\tau} = E_1 \sin \alpha_1$$

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \quad \varepsilon E_{2n} = E_1 \cos \alpha_1$$

$$E_{2n} = \frac{E_1 \cos \alpha_1}{\varepsilon} \quad E_2 = \sqrt{E_{2\tau}^2 + E_{2n}^2}$$

$$E_2 = E_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 + \frac{\cos^2 \alpha_1}{\varepsilon^2}}$$





**Пример 3.** И2.44 Определить напряженность поля  $E$ , если его потенциал

A)  $\varphi = a(x^2 + y^2)$     B)  $\varphi = axy$     C)  $\varphi = a(x^2 - y^2)$

РЕШЕНИЕ:  $E = -\mathbf{grad} \varphi \Rightarrow E_x = -\partial\varphi/\partial x$  ;  $E_y = -\partial\varphi/\partial y$

A)  $E_x = -\partial\varphi/\partial x = -2ax$  ;  $E_y = -\partial\varphi/\partial y = -2ay$

B)  $E_x = -\partial\varphi/\partial x = -ay$  ;  $E_y = -\partial\varphi/\partial y = -ax$

C)  $E_x = -\partial\varphi/\partial x = -2ax$  ;  $E_y = -\partial\varphi/\partial y = +2ay$

ДОПОЛНЕНИЕ (АО): а какова может быть конфигурация заряда?

$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} E = \varepsilon_0 (\partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y) = -\varepsilon_0 \Delta\varphi$  – уравнение Пуассона

A)  $\rho = -4\varepsilon_0 a$  – однородно заряженный шар

B)  $\Delta\varphi = 0$  ; C)  $\Delta\varphi = 0$  – что это значит? – подумайте...



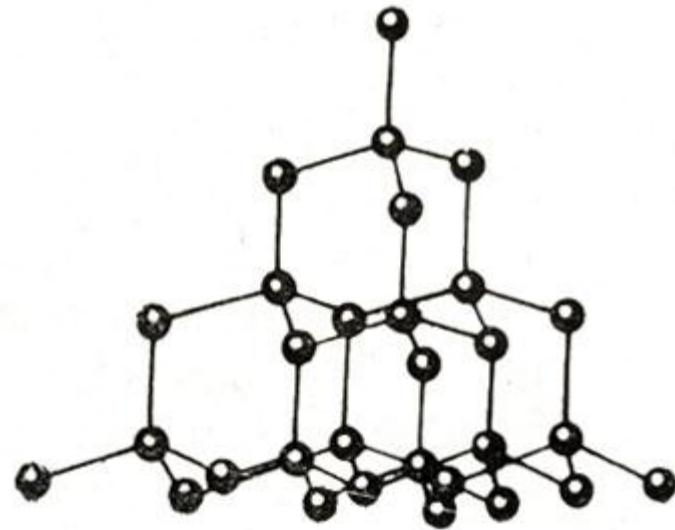
$$P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \xi_{ij} E_j, \quad i, j = x, y, z.$$

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j$$

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \xi_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Кристаллическая  
решетка алмаза





# Кристаллические диэлектрики



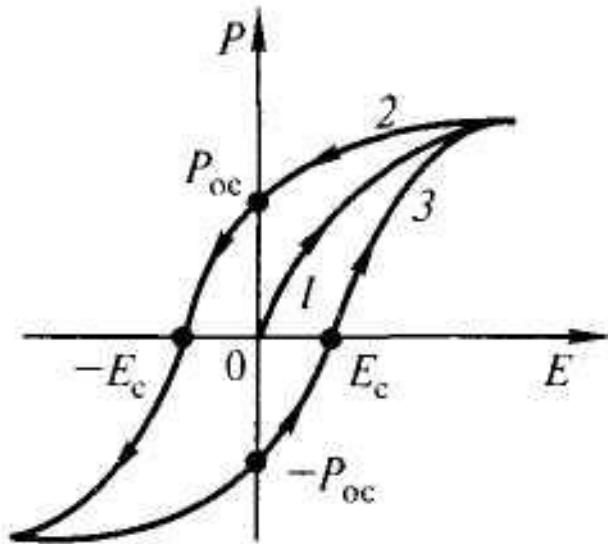
**Пьезоэлектрики** – кристаллические диэлектрики, в которых при сжатии и растяжении в определённых направлениях возникает электрическая поляризация в отсутствие электрического поля (прямой пьезоэффект)

**Пироэлектрики** – кристаллические диэлектрики, обладающие спонтанной поляризацией ( в отсутствие электрического поля), которая изменяется при изменении температуры.

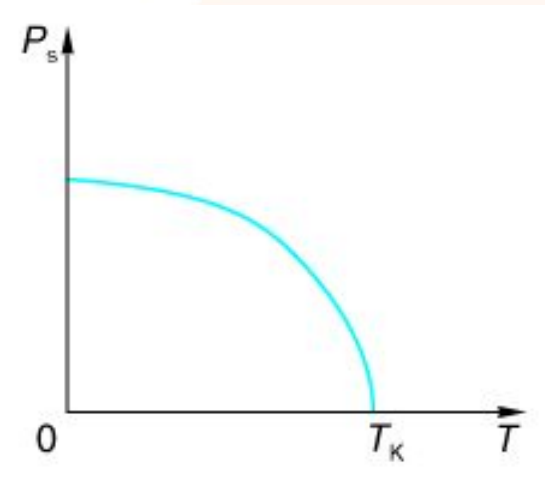
**Сегнетоэлектрики** – кристаллические диэлектрики, обладающие в определённом интервале температур спонтанной поляризацией, которая существенно изменяется при внешних воздействиях.



$$\varepsilon \sim 10^3 - 10^4$$



Зависимость поляризованности от напряжённости электрического поля в сегнетоэлектрике.



Зависимость спонтанной поляризации от температуры.  
 $T_k$  – температура Кюри





**Спасибо за внимание!**

**Следующая лекция  
06 октября**



# Проводники и диэлектрики



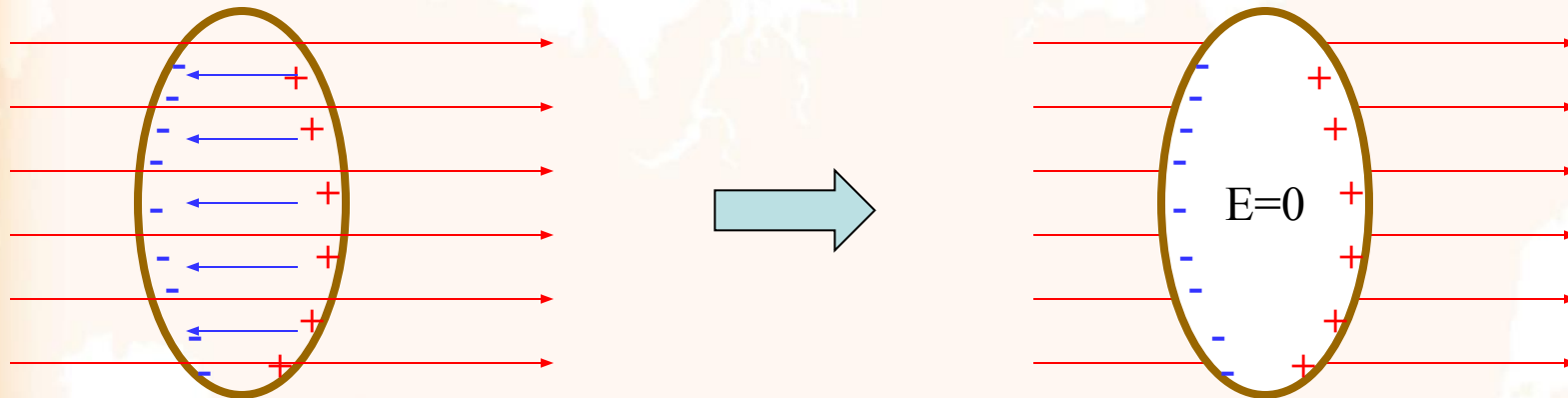
Диэлектрик – вещество, где нет свободных электрических зарядов, способных перемещаться под действием приложенного электрического поля.

Проводник – вещество, где такие свободные заряды есть. не проводящее электрический ток.

Идеальный проводник – это вещество с бесконечно малым сопротивлением электрическому току

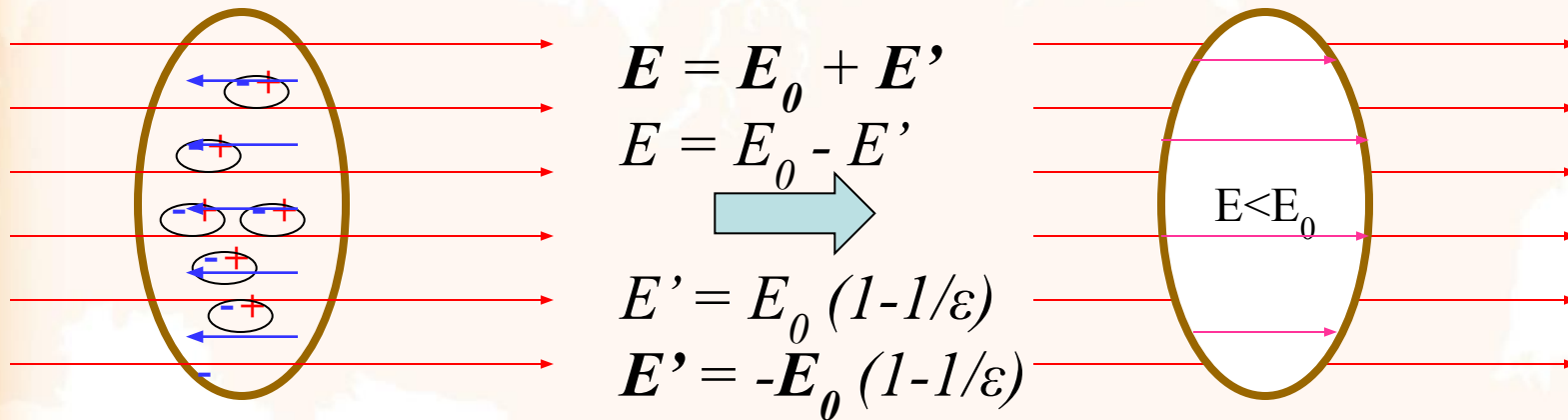
Полупроводник - проводник с невысокой и легко управляемой (температура, примеси) проводимостью

В проводниках имеются заряженные частицы, способные свободно перемещаться внутри проводника под действием электрического поля. Типичные проводники - металлы. Свободные заряды в металлах - электроны проводимости.



Под действием электрического поля свободные заряды в проводниках смещаются к поверхности, и создают внутри проводника встречное поле, компенсирующее внешнее. **В итоге - внутри проводника поле равно нулю.**

В диэлектриках (минералы, органические вещества и др.) нет свободных зарядов, способных свободно перемещаться под действием электрического поля. НО! Молекулы, из которых состоят диэлектрики, поляризуются под действием внешнего поля и создают некоторое встречное поле, частично компенсирующее внешнее. Внутри диэлектрика поле всегда несколько меньше, чем внешнее.



Отношение величины напряженности поля  $E_0$ , какой она могла бы быть в вакууме (в отсутствии диэлектрика) к фактической величине поля внутри диэлектрика  $E$  зависит от свойств вещества диэлектрика и называется *относительной диэлектрической проницаемостью*:  $\epsilon = E_0 / E$