Algebriskas nevienādības

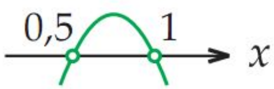
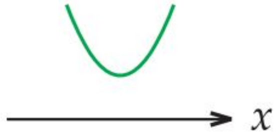
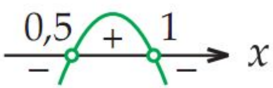
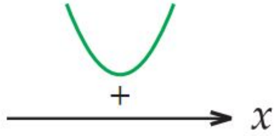
Autore: Mag. paed.,
matemātikas skolotāja
Irina Maslobojeva

Nevienādības, nevienādību sistēmas un to atrisinājumi

Divas mainīgā x izteiksmes $A(x)$ un $B(x)$, kas savienotas ar vienu no zīmēm “$>$, $<$” vai “$\geqslant$, $\leqslant$”, veido **viena mainīgā nevienādību**.

Nevienādības atrisinājumu kopu veido visas tās mainīgā x vērtības, kuras ievietojot nevienādībā, iegūst pareizu skaitlisku nevienādību.

Nevienādību atrisinājumi

Risinājuma solis	Piemēri	
	a) $-2x^2+3x-1>0$	b) $4x^2+x+2\geqslant 0$
1) Atrod atbilstoša kvadrātvienādojuma saknes (ja tādas ir)	$-2x^2+3x-1=0$ $x_1=0{,}5$ $x_2=1$	$4x^2+x+2=0$ $D=-31<0$, sakņu nav, parabola skaitļu asi nekrusto
2) Tās atliek uz skaitļu stara un uzskicē atbilstošu parabolu, ievērojot zaru vērsumu un sakņu skaitu (ja $a>0$, parabolas zari vērsti uz augšu, ja $a<0$ — uz leju)	$a=-2$, zari vērsti uz leju 	$a=4$, zari vērsti uz augšu 
3) Noskaidro nevienādības zīmes skaitļu intervālos		
4) Pieraksta atbildi	$x\in(0{,}5;1)$	$x\in R$

Atceries!

Nevienādību sistēmas ar vienu mainīgo **atrisinājumu kopa sastāv** tikai no tām mainīgā vērtībām, kas pieder katras sistēmā ietvertās nevienādības atrisinājumu kopai.

Tāpēc **nevienādību sistēmas atrisinājumu kopa** ir atsevišķo nevienādību atrisinājumu kopu šķēlums.

Ekvivalentas nevienādības un ekvivalenti pārveidojumi

Nevienādības $A(x) > B(x)$ (vai "$<, \leqslant, \geqslant$") **definīcijas apgabalu** veido visas tās mainīgā x vērtības, ar kurām gan izteiksmei $A(x)$, gan $B(x)$ ir matemātiska jēga.

Divas **nevienādības** sauc par **ekvivalentām**, ja abu nevienādību atrisinājumu kopas ir vienādas.

Ekvivalentas nevienādības un ekvivalenti pārveidojumi

Ja nevienādības $A(x) > B(x)$ (vai "$<, \leqslant, \geqslant$") definīcijas apgabals ir kopa D, un izteiksme $C(x)$ ir definēta visiem šīs kopas elementiem, tad

- nevienādības $A(x) > B(x)$ un $A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$ ir ekvivalentas,
- ja $C(x) > 0$ visiem kopas D elementiem, nevienādības
$$A(x) > B(x) \text{ un } A(x) \cdot C(x) > B(x) \cdot C(x)$$
ir ekvivalentas,
- ja $C(x) < 0$ visiem kopas D elementiem, nevienādības
$$A(x) > B(x) \text{ un } A(x) \cdot C(x) < B(x) \cdot C(x)$$
ir ekvivalentas.

Daļveida nevienādības

Nevienādību, kuras vispārīgais veids ir $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ (vai "$<$, $\leqslant$, $\geqslant$"), $f(x)$ un $g(x)$ ir polinomi, sauc par **racionālu daļveida nevienādību**.

Racionāla daļveida nevienādība ir definēta visiem reāliem x, izņemot tos, kuriem $g(x) = 0$.

Daļveida nevienādības atrisināšana, to aizstājot ar nevienādību sistēmām

Lai pielietotu šo metodi, izmanto dalījuma salīdzināšanu ar 0. Ja nevienādība nav dota nevienādības $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (vai „<, ≤, ≥") veidā, tad, veicot ekvivalentus pārveidojumus, to attiecīgi pārveido šādā formā.

Daļas vērtība var būt pozitīva tikai tad, ja skaitītāja un saucēja izteiksmēm ir vienādas zīmes.

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ tad un tikai tad ja } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ tad un tikai tad ja } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \text{ tad un tikai tad ja } \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} f(x) \leqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0 \text{ tad un tikai tad ja } \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ vai } \begin{cases} f(x) \leqslant 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

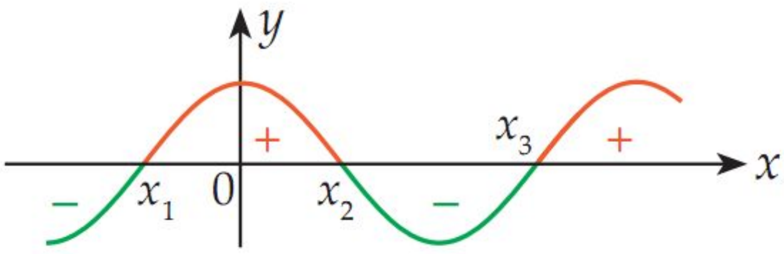
Intervālu metode

Intervālu metodi izmanto tādu nevienādību atrisināšanā, kas ir uzrakstāmas formā

$$A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)\cdot \ldots > 0 \text{ vai } \frac{A(x)\cdot B(x)\cdot\ldots}{C(x)\cdot D(x)\cdot\ldots} > 0$$

Intervālu metodes grafiskais atrisināšanas paņēmiens

Lai noteiktu reizinājuma vai dalījuma atsevišķo locekļu zīmju maiņu intervālus, var izmantot funkcijas grafika īpašību — ja funkcijas vērtības kādā intervālā ir pozitīvas, tās grafiks atrodas virs x ass, ja negatīvas — zem x ass (skat. 1.1. att.).



1.1. att.

Intervālu metodes analītiskais atrisināšanas paņēmiens

Nevienādību risināšanai, kuras ir uzrakstāmas formā

$$A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) \cdot \ \ldots > 0 \text{ vai } \frac{A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots}{C(x) \cdot D(x) \cdot \ldots} > 0$$

(vai "$<$, $\leqslant$, $\geqslant$"), var izmatot arī **intervālu metodes analītisko paņēmienu** — veikt spriedumus par reizinātāju zīmi neskicējot atbilstošo funkciju grafikus.

Algoritms

<table>
<tr><th>Algoritma solis</th><th>Nevienādības $(x-1)(4-x^2) \geqslant 0$ risināšana</th></tr>
<tr><td>1) Katru nevienādības polinomu pielīdzina 0 un atrisina iegūtos vienādojumus</td><td>$x-1=0$
$x_1=1$

$4-x^2=0$
$x^2=4$
$x_2=2,\quad x_3=-2$</td></tr>
<tr><td>2) Iegūtās vērtības atliek uz skaitļu ass, izveidojot vairākus intervālus</td><td rowspan="4">Risinājumu ērti attēlot shematiski.
$-\infty \quad -5 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 1{,}5 \quad 2 \quad 5 \quad +\infty \quad x$

Pirmajā intervālā izvēlamies skaitli – 5 un nosakām reizinātāju zīmes:
$x-1=-5-1<0,\quad 4-x^2=4-(-5)^2<0$
Līdzīgi rīkojamies visos citos intervālos.
$-\infty \quad -5 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 1{,}5 \quad 2 \quad 5 \quad +\infty \quad x$
<table><tr><td>$x-1$</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>$4-x^2$</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td></tr><tr><td>$(x-1)(4-x^2)$</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>3) Katrā no intervāliem izvēlas kādu tā iekšēju punktu</td></tr>
<tr><td>4) Nosaka katra nevienādības reizinātāja (polinoma) zīmi</td></tr>
<tr><td>5) Nosaka reizinājuma vai dalījuma zīmi katrā intervālā</td></tr>
<tr><td>6) Pieraksta atbildi, ievērojot dotās nevienādības veidu</td><td>Tā kā dotā nevienādība ir nestingra (⩾), tad intervālu galapunkti pieder atrisinājumam. Nevienādības atrisinājumu kopa ir:
$x \in (-\infty; -2] \in [1; 2]$</td></tr>
</table>

Nevienādību $|f(x)| < a$, $|f(x)| > a$, $|f(x)| \leqslant a$, $|f(x)| \geqslant a$, kur $a \in R$, atrisināšana

Nevienādības $|f(x)| < a$ un nevienādību sistēmas $\begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases}$ atrisinājumu kopas ir vienādas.

Nevienādības $|f(x)| > a$, ja $a \geqslant 0$, atrisinājumu kopa ir vienāda ar nevienādību $f(x) > a$ **un** $f(x) < -a$ atrisinājumu kopu apvienojumu.

Paldies par uzmanību!