Теория расписаний

Минимизация
приоритето-порождающих функций

Минимизация приоритето-порождающих функций

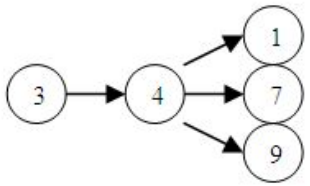
Задача 1/out — tree/ $\sum C_j$

Решить задачу 1/out — tree/ $\sum C_j$, в которой имеется 10 *требований. Требование* ***3*** *предшествует требованию* ***4,*** *которое, в свою очередь, предшествует требованиям* ***1, 7 и 9.***

Длительности обслуживания p_j *заданы в таблице:*

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_{jn}	4	2	3	5	7	4	1	2	9	4

Для задачи ***1// $\sum$Cj*** *решением было бы расписание (**7**, {2, 8}, **3**, {**1**, 6, 10}, **4**, 5, **9**). Однако это расписание нарушает отношения предшествования:*



Минимизация приоритето-порождающих функций

Обозначим

Π_r - *множество всех перестановок* $\pi_r = (i_1, \ldots, i_r)$ *элементов множества* $N = \{1, \ldots, n\}$, $r = 1, \ldots, n$

$\Pi_0 = \{\pi_0\} = \{(\varnothing)\}$

$$\Pi = \bigcup_{r=0}^{n} \Pi_r$$

где U *– операция объединения множеств.*

Минимизация приоритето-порождающих функций

Функция $F(\pi)$, *определенная на множестве* Π_n **называется *приоритето-порождающей (ППФ)***, *если существует функция* $\omega(\pi)$, $\pi \in \Pi$, *называемая* ***функцией приоритета***, *которая обладает следующими свойствами:*

для любых перестановок $\pi = (\pi^1, \pi^\alpha, \pi^b, \pi^2) \in \Pi_n$ *и* $\pi' = (\pi^1, \pi^b, \pi^\alpha, \pi^2) \in \Pi_n$

- *из* $\omega(\pi^\alpha) > \omega(\pi^b)$ *следует* $F(\pi) \le F(\pi')$ *и*
- *из* $\omega(\pi^\alpha) = \omega(\pi^b)$ *следует* $F(\pi) = F(\pi')$.

Минимизация приоритето-порождающих функций

*Множество **N** является **частично упорядоченным**, если задано отношение предшествования (бинарное, транзитивное, антирефлексивное отношение), представленное графом редукции этого отношения **G = (N, U).***

*Граф **G** называется **графом редукции отношения предшествования**, если он получен из графа отношения частичного порядка путем удаления всех транзитивных дуг.*

Минимизация приоритето-порождающих функций

Многие задачи построения оптимальных расписаний сводятся к минимизации ППФ на частично упорядоченных множествах требований.

Отношения предшествования присутствуют в задачах, где некоторые операции используют результаты других (предшествующих) операций.

Примеры приоритето-порождающих функций

Можно доказать, что:

для задачи ***1/prec/ ΣC$_j$*** *целевая функция является ППФ с функцией приоритета*

$$\omega(\pi) = |\{\pi\}|/P(\pi)$$

где $P(\pi) = \Sigma p_j$,

для задачи ***1/prec/ Σw$_j$C$_j$*** *целевая функция является ППФ с функцией приоритета*

$$\omega(\pi) = W(\pi)/P(\pi),$$

где $W(\pi) = \Sigma w_j$.

Методы минимизации приоритето-порождающих функций на частично упорядоченных множествах

Пусть задано частично упорядоченное множество ***N*** с графом редукции отношения частичного порядка ***G = (N,U)***.

Задача состоит в минимизации $F(\pi)$, $\pi \in \Pi_n(G)$, где $\Pi_n(G)$ - множество всех перестановок элементов множества ***N***, допустимых относительно ***G***.

Методы минимизации приоритето-порождающих функций на частично упорядоченных множествах

Введем операции над бесконтурными орграфами, не содержащими транзитивных дуг (в т.ч. графами редукции отношения частичного порядка):

- ***Преобразование I - [t, s] отождествления вершин t и s**:* замена вершин ***t*** и ***s*** одной **составной вершиной [*t, s*]**.

Все входящие (исходящие) дуги в вершины ***t*** и ***s*** заменяются на входящие (исходящие) дуги в составную вершину. Удаляются появившиеся тразитивные дуги.

- ***Преобразование II - (s, t) добавления дуги (s, t***): добавление дуги *(s, t)* с последующим удалением тразитивных дуг.

Методы минимизации приоритето-порождающих функций на частично упорядоченных множествах

Цепь $(i_1, ..., i_k)$, где компоненты i_j являются составными вершинами, называется ***ω-цепью***, если $\omega(i_l) \geq \omega(i_{l+1})$, $l = 1, ..., k - 1$.

Если G представляет собой ***ω -цепь***, то перестановка $(i_1, ..., i_k)$ является оптимальной.

Если граф G – лес, то существует последовательность преобразований ***I*** и ***II,*** переводящая G в ***ω -цепь.***

Алгоритм минимизации ППФ на частично упорядоченных множествах

Задача ***1/out — tree/ F*** , где ***F*** – ППФ.

Алгоритм минимизации ППФ на множестве $\mathbf{\Pi}_n(G)$, где ***G - набор выходящих деревьев*** :

- 1. Вычисляем ***приоритеты*** не имеющих потомков (*висячих) вершин*.
- 2. Если ***G*** не есть набор изолированных вершин, то находим в ***G*** вершину i_0, называемую ***опорной***, все **прямые потомки которой** являются висячими.

Пусть этим потомкам соответствуют ***ω-цепи*** $C_1, ..., C_l$.

Построим ***ω-цепь*** $(i_1, ..., i_v)$, упорядочив все (составные) вершины цепей $C_1, ..., C_l$ по невозрастанию приоритетов.

Алгоритм минимизации ППФ на частично упорядоченных множествах (продолжение)

Построим цепь $(i_0, i_1, ..., i_v)$.

- Если $\omega(i_0) > \omega(i_1)$, то цепь $(i_0, i_1, ... ,i_v)$ является ***ω-цепью***.
- Если $\omega(i_0) \leq \omega(i_1)$, то объединяем i_0 и i_1 в составную вершину $[i_0, i_1]$.

Далее сравниваем $\omega(i_0, i_1)$ и $\omega(i_2)$ и, в случае необходимости, объединяем $[i_0, i_1]$ и i_2 и т.д.

Процесс продолжается до тех пор, пока цепь $(i_0, i_1, ..., i_v)$ не будет преобразована в некоторую ω-цепь $C^0 = ([i_0, i_1, ..., i_k], i_{k+1}, ... , i_v)$.

Удаляем из G всех потомков вершины i_0 и ставим ей в соответствие ω-цепь C^0.

Алгоритм минимизации ППФ на частично упорядоченных множествах (продолжение)

- 3. Повторяем описанный процесс до тех пор, пока не будет построен граф, состоящий из **изолированных вершин**.

*Последовательность (составных) вершин соответствующих **ω-цепям**, в которой вершины упорядочены по невозрастанию приоритетов, является **оптимальным решением задачи**.*

Алгоритм минимизации ППФ на частично упорядоченных множествах (продолжение)

В случае, когда граф ***G*** *–* ***входящее дерево****, в качестве опорной выбирается вершина* i_0*, все непосредственные* ***предшественники*** *которой* $i_1, ..., i_v$ ***не имеют предшественников****.*

Формируется цепь $(i_1, ..., i_v, i_0)$*. Она преобразуется в* ***ω-цепь*** *путем сравнения* $\omega(i_0)$ *и* $\omega(i_v)$*. Составная вершина* $[i_v, i_0]$ *образуется, если* $\omega(i_v) \leq \omega(i_0)$*.*

Далее процесс аналогичен случаю выходящего дерева.

Пример реализации алгоритма.

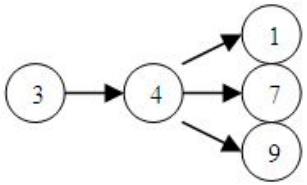
Задача 1/out — tree/ ∑Cj

Решить задачу 1/out — tree/ ∑Cj, *в которой имеется* ***10*** *требований. Требование* ***3*** *предшествует требованию* ***4,*** *которое, в свою очередь, предшествует требованиям* ***1, 7 и 9.***

Длительности обслуживания p_j *заданы в таблице:*

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_{jn}	4	2	3	5	7	4	1	2	9	4

Граф отношений предшествования:



Пример реализации алгоритма (продолжение).

1. *Вычислим значение функции приоритета для висячих вершин.*

Функция приоритета:

$\omega(\pi) = |\{\pi\}|/P(\pi)$ *где* $P(\pi) = \Sigma p_j$,

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω	1/4	1/2			1/7	1/4	1	1/2	1/9	1/4

Пример реализации алгоритма (продолжение).

*2а. Опорной вершиной является вершина **4**, все прямые потомки которой **1**, **7** и **9** являются висячими.*

*ω-цепь для потомков вершины **4**: **(7, 1, 9)**, поскольку значения функции **ω** вершин равны, соответственно, **(1, 1/4, 1/9)***

Пример реализации алгоритма (продолжение).

2б. Цепь ***(4, 7, 1, 9) не является ω-цепью****, поскольку значения функции* ***ω*** *вершины 4 равно* **1/5<1**.

Объединяем вершины ***4*** *и* ***7*** *в составную вершину* **[*4, 7*].**

Приоритет составной вершины **[*4, 7*]** *равен 2/(5+1)=****1/3****. Цепь* **([*4, 7*], *1, 9*) *является ω-цепью****, *т.к.* **1/3>1/4**.

Удаляем из графа ***G*** *всех потомков вершины* ***4*** *и ставим ей в соответствие* ***ω-цепь.***

Пример реализации алгоритма (продолжение).

3а. *Опорной вершиной является вершина* ***3****,* ***ω-цепь*** *для потомков вершины* ***3:*** ***([4, 7], 1, 9)***

Пример реализации алгоритма (продолжение).

3б. *Цепь* **(3, [4, 7], 1, 9)** ***не является ω-цепью*** *поскольку значения функции* ***ω*** *вершины* ***3*** *равно* **1/3=1/3**.

Объединяем вершины ***3*** *и* **[4, 7]** *в составную вершину* **[3, 4, 7].** *Приоритет составной вершины* **[3, 4, 7]** *равен 3/(3+5+1)=****1/3***.

Цепь **([3, 4, 7], 1, 9)** ***является ω-цепью***, *т.к.* **1/3>1/4**.

Удаляем из графа ***G*** *всех потомков вершины* ***3*** *и ставим ей в соответствие* ***ω-цепь***.

Пример реализации алгоритма (продолжение).

4. *Построен граф, состоящий из изолированных вершин.*

Последовательность (составных) вершин соответствующих ***ω-цепям****, в которой вершины* ***упорядочены по невозрастанию приоритетов (ω)****:*

({2, 8}, 3, 4, 7, {1, 6, 10}, 5, 9).

Данная последовательность является оптимальной.

Ответ: ({2, 8}, 3, 4, 7, {1, 6, 10}, 5, 9), *значение целевой функции равно* ***174.***

j	{2	8}	3	4	7	{1	6	10}	5	9	
p	2	2	3	5	1	4	4	4	7	9	∑Cj=
Cj	2	4	7	12	13	17	21	25	32	41	174