

Математический анализ

1 семестр

Лекция 11

Лектор: Михайлов Ю. А.
Кафедра 812

1 семестр

Раздел 1. Введение в математический анализ.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Раздел 3. Применение производных к исследованию функций.

Раздел 4. Неопределенный интеграл.

Исследование функций и построение графиков.

- Асимптоты графика функции.
- Общая схема исследования функции и построения графика.

• Асимптоты графика функции

Асимптота – это прямая, к которой «стремится» график функции. Имеются три вида таких прямых.

1) Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty.$$

2) Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty(-\infty)$, если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b).$$

3) Прямая $y = kx + b$ ($k \neq 0$) называется наклонной асимптотой графика функции $f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) =$

$$= (\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - b)) = 0.$$

В последнем случае при $k = 0$ получается горизонтальная асимптота.

Теорема. $y = kx + b$ – наклонная асимптота

графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow$

$$\exists k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \text{ и } \exists b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Доказательство. Если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0,$$

то при делении на x :

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - kx - b}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$$

•
А из $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ следует

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) - b = 0$, значит,

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Если $\exists k$ и $\exists b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$, то

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, ч.т.д.

При $x \rightarrow -\infty$ аналогично.

Пример 1

Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, то $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Далее,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x}{x(x-1)} = 1,$$

$$k = 1 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x-1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3.$$

Итак, $y = x + 3$ – наклонная асимптота

при $x \rightarrow \pm\infty$.

Пример 2

Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$, поэтому

$x = 0$ – вертикальная асимптота.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, тогда $y = 1$ – горизонтальная

асимптота, при $x \rightarrow \pm\infty$.

Пример 3

Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^2}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, $x = 0$ – вертикальная асимптота.

При

$$\begin{aligned} x \rightarrow +\infty : k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^6}}}{x^3} = 1, \end{aligned}$$

•

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^2} - x \right) =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1} - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + 1 - x^6}{x^2(\sqrt{x^6 + 1} + x^3)} = 0$$

$y = x$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$.

При

$$x \rightarrow -\infty : k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^6}}}{x^3} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1} + x^3}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 1 - x^6}{x^2 (\sqrt{x^6 + 1} - x^3)} = 0$$

$y = -x$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

Общая схема исследования функции и построения графика

Для построения графика дважды дифференцируемой (кроме, может быть, отдельных точек) функции будем придерживаться следующей схемы.

Подобные схемы могут отличаться в деталях, но не в основных параметрах.

1. Область определения функции, четность, точки пересечения с осями координат, интервалы знакопостоянства.
2. Пределы на границе области определения.
3. Асимптоты.
4. Монотонность и точки экстремума.
5. Выпуклость и точки перегиба.
6. График (с учетом результатов предыдущих пунктов).

Пример 4

Исследовать функцию и построить график

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$$

1. Область определения:

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$$

Точки пересечения с осями координат:

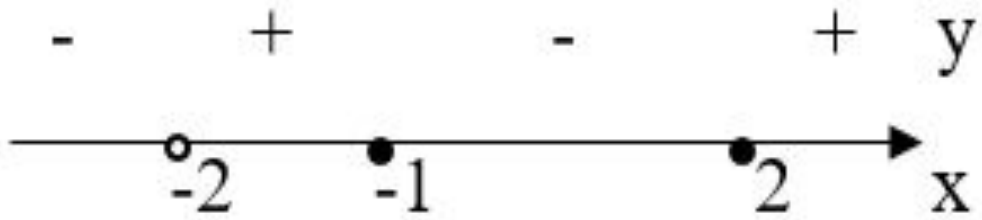
$(0; -1)$, $(-1; 0)$, $(2; 0)$,

поскольку при подстановке $x = 0$ получим

$$y = -1, \text{ а } y = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0, x_1 = -1,$$

$$x_2 = 2.$$

Интервалы знакопостоянства:



2. Необходимо найти пределы функции при

$x \rightarrow \pm\infty$ и $x \rightarrow -2 \pm 0$. Все эти пределы

бесконечны, причем с учетом указанных

интервалов знакопостоянства

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Из предыдущего пункта следует, что $x = -2$ – вертикальная асимптота, а горизонтальных асимптот нет.

Проверим наличие наклонных асимптот.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2}{x(x + 2)} = 1;$$

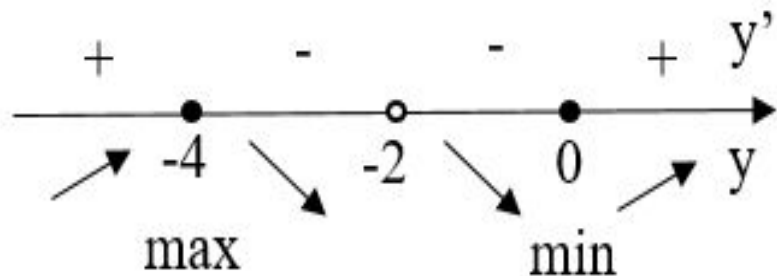
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2 - x^2 - 2x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x - 2}{x + 2} = -3. \end{aligned}$$

Итак, $y = x - 3$ – наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

4. Найдем y' .

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{x^2 - x - 2}{x + 2} \right)' = \\&= \frac{(2x - 1)(x + 2) - (x^2 - x - 2) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \\&= \frac{2x^2 + 3x - 2 - x^2 + x + 2}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}\end{aligned}$$

Определим нули и знаки y' :



Итак, $f(x)$ возрастает в интервалах $(-\infty; -4)$

и $(0; +\infty)$ и убывает в интервалах $(-4; -2)$

и $(-2; 0)$.

$x = -4$ – точка максимума,

$$f(-4) = \frac{16 + 4 - 2}{-4 + 2} = -9;$$

$x = 0$ – точка минимума, $f(0) = -1$.

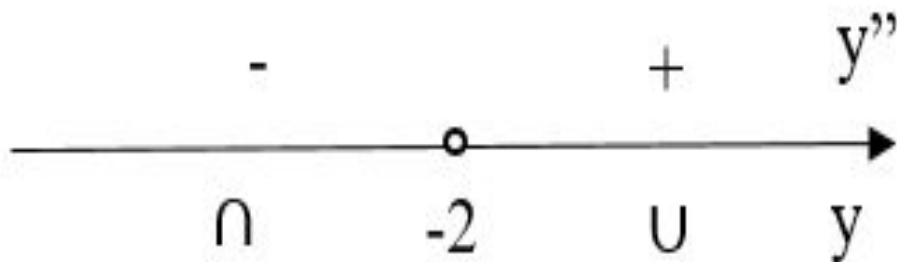
5. Найдем y'' .

$$y'' = \frac{(2x + 4)(x + 2)^2 - (x^2 + 4x) \cdot 2 \cdot (x + 2)}{(x + 2)^4} =$$

$$= \frac{(2x + 4)(x + 2) - 2(x^2 + 4x)}{(x + 2)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 + 4x + 4x + 8 - 2x^2 - 8x}{(x + 2)^3} = \frac{8}{(x + 2)^3}$$

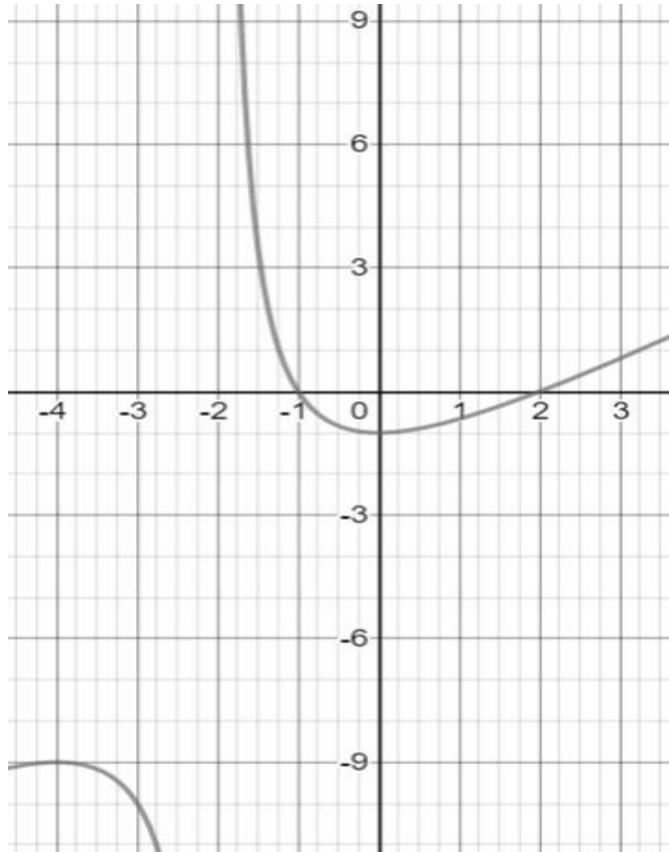
Тогда



Функция выпукла вверх на $(-\infty; -2)$, выпукла вниз на $(-2; +\infty)$.

Точек перегиба нет.

6. Построим график функции



Пример 5

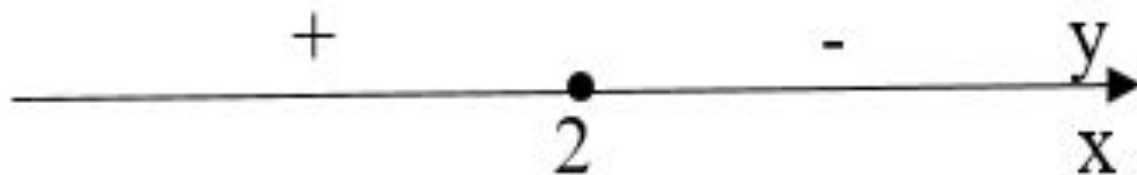
Исследовать функцию и построить график

$$y = (2 - x)e^{x-1}$$

1. $D_y = (-\infty; +\infty)$.

При $x = 0 : y = 2e^{-1}$; при $y = 0 : x = 2$;

$(0; \frac{2}{e})$ и $(2; 0)$ – точки пересечения с осями координат.



•

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

(неопределенность, раскрывается по правилу Лопиталя).

3. Вертикальных асимптот нет.

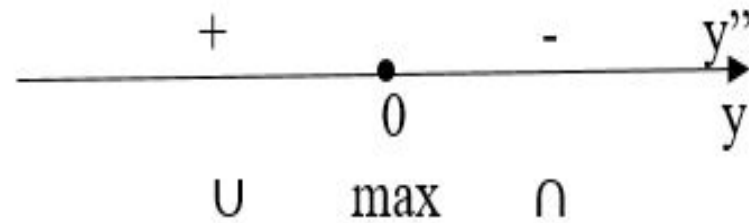
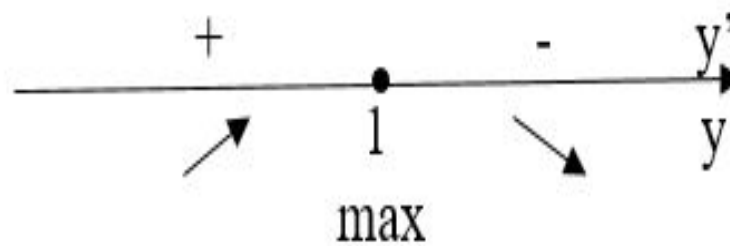
$y = 0$ – горизонтальная асимптота при

$x \rightarrow -\infty$. При $x \rightarrow +\infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-x)e^{x-1}}{x} = -\infty,$$

асимптот при $x \rightarrow +\infty$ нет.

$$4) y' = e^{x-1}(1-x)$$



$$5) y'' = e^{x-1}(1-x) - e^{x-1} = -xe^{x-1}$$

$x = 0$ – точка перегиба

$$f(0) = \frac{2}{e}$$

6)

