Математический анализ

1 семестр

Лекция 11

Лектор: Михайлов Ю. А.
Кафедра 812

1 семестр

Раздел 1. Введение в математический анализ.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Раздел 3. Применение производных к исследованию функций.

Раздел 4. Неопределенный интеграл.

Исследование функций и построение графиков.

- Асимптоты графика функции.
- Общая схема исследования функции и построения графика.

Асимптоты графика функции

Асимптота – это прямая, к которой «стремится» график функции. Имеются три вида таких прямых.

1) Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$.

2) Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty(-\infty)$, если

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \; (\lim_{x\to-\infty} f(x) = b).$$

3) Прямая $y = kx + b \; (k \neq 0)$ называется наклонной асимптотой графика функции $f(x)$, если $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) =$

$$= (\lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx - b)) = 0\,.$$

В последнем случае при $k = 0$ получается горизонтальная асимптота.

Теорема. $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty \iff$

$$\exists k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \text{ и } \exists b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Доказательство. Если

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0,$$

то при делении на x:

$$0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - kx - b}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - k.$$

- А из $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ следует

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)-b=0$, значит,

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx).$$

Если $\exists\ k$ и $\exists\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$, то

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$, ч.т.д.

При $x\to-\infty$ аналогично.

•

Пример 1

Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$$

Так как $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, то $x = 1 -$ вертикальная асимптота.

Далее,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x}{x(x-1)} = 1,$$

$$k = 1 \text{ при } x \to \pm\infty,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x-1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1} = 3.$$

Итак, $y = x + 3 -$ наклонная асимптота

при $x \to \pm\infty$.

Пример 2

Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty$, поэтому

$x = 0 -$ вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, тогда $y = 1$ –горизонтальная

асимптота, при $x \to \pm\infty$.

•

Пример 3

Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^6+1}}{x^2}.$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty, x = 0 -$ вертикальная асимптота.

При

$$x \to +\infty : \; k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^6+1}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}}{x^3} = 1,$$

- $$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1} - x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^6 + 1 - x^6}{x^2\left(\sqrt{x^6 + 1} + x^3\right)} = 0$$

$y = x$ – наклонная асимптота при $x \to +\infty$.

При

$$x \to -\infty: \; k = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^6+1}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}}{x^3} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{\sqrt{x^6+1}}{x^2} + x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^6+1}+x^3}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^6+1-x^6}{x^2\left(\sqrt{x^6+1}-x^3\right)} = 0$$

$y = -x$ – наклонная асимптота при $x \to -\infty$.

Общая схема исследования функции и построения графика

Для построения графика дважды дифференцируемой (кроме, может быть, отдельных точек) функции будем придерживаться следующей схемы.

Подобные схемы могут отличаться в деталях, но не в основных параметрах.

1. Область определения функции, четность, точки пересечения с осями координат, интервалы знакопостоянства.
2. Пределы на границе области определения.
3. Асимптоты.
4. Монотонность и точки экстремума.
5. Выпуклость и точки перегиба.
6. График (с учетом результатов предыдущих пунктов).

Пример 4

Исследовать функцию и построить график

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$$

1. Область определения:

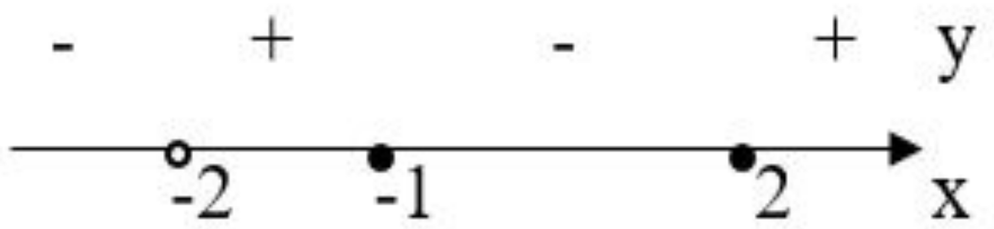
$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$$

Точки пересечения с осями координат:
(0;-1), (-1;0), (2,0),

поскольку при подстановке $x = 0$ получим $y = -1$, а $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0, x_1 = -1,$

$$x_2 = 2.$$

Интервалы знакопостоянства:



2. Необходимо найти пределы функции при $x \to \pm\infty$ и $x \to -2 \pm 0$. Все эти пределы бесконечны, причем с учетом указанных интервалов знакопостоянства

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \to -2-0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -2+0} f(x) = +\infty, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Из предыдущего пункта следует, что $x = -2$ – вертикальная асимптота, а горизонтальных асимптот нет.

Проверим наличие наклонных асимптот.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x(x+2)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x+2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - 2 - x^2 - 2x}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x - 2}{x+2} = -3.$$

Итак, $y = x - 3$ – наклонная асимптота при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

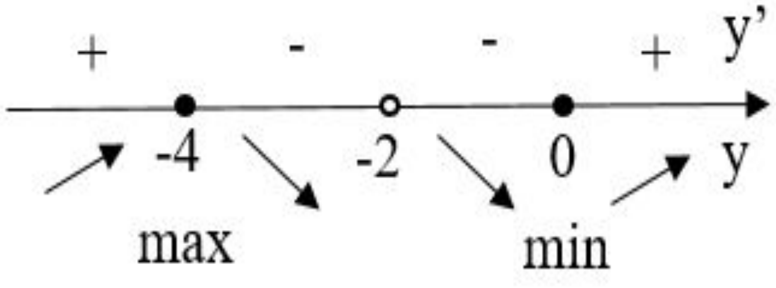
4. Найдем y'.

$$y' = \left(\frac{x^2 - x - 2}{x + 2}\right)' =$$

$$= \frac{(2x - 1)(x + 2) - (x^2 - x - 2) \cdot 1}{(x + 2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 3x - 2 - x^2 + x + 2}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$$

Определим нули и знаки y':



Итак, $f(x)$ возрастает в интервалах $(-\infty;\ -4)$ и $(0; +\infty)$ и убывает в интервалах $(-4; -2)$ и $(-2; 0)$.

$x = -4$ – точка максимума,

$$f(-4) = \frac{16 + 4 - 2}{-4 + 2} = -9;$$

$x = 0$ - точка минимума, $f(0) = -1$.

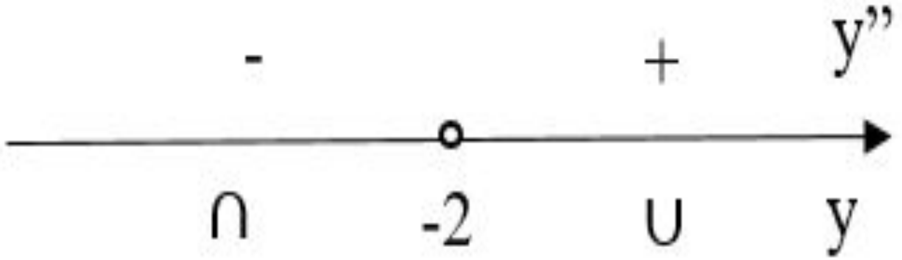
5. Найдем y''.

$$y'' = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x)\cdot 2\cdot (x+2)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{(2x+4)(x+2) - 2(x^2+4x)}{(x+2)^3} =$$

$$= \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x}{(x+2)^3} = \frac{8}{(x+2)^3}$$

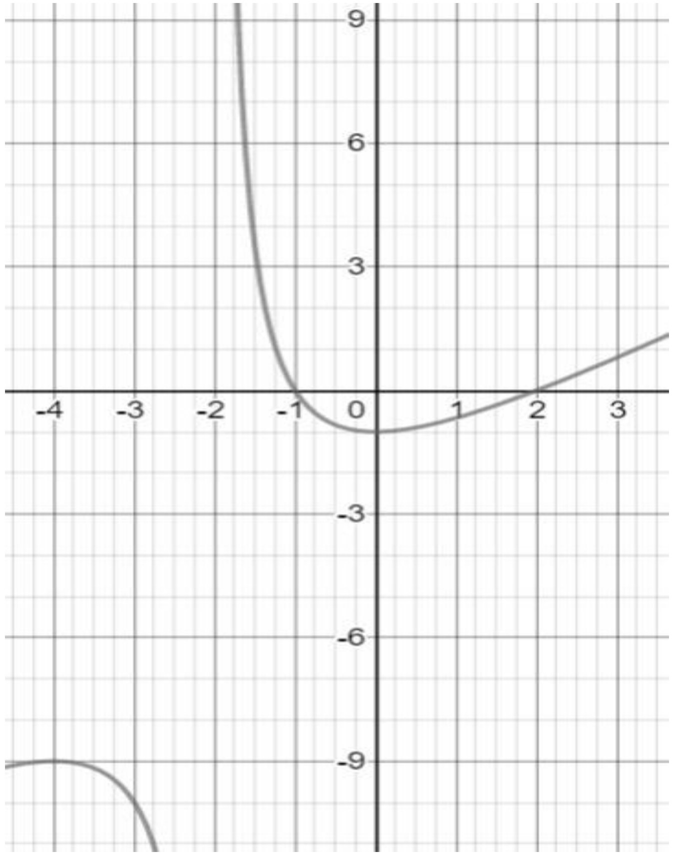
Тогда



Функция выпукла вверх на $(-\infty; -2)$, выпукла вниз на $(-2; +\infty)$.

Точек перегиба нет.

6. Построим график функции



Пример 5

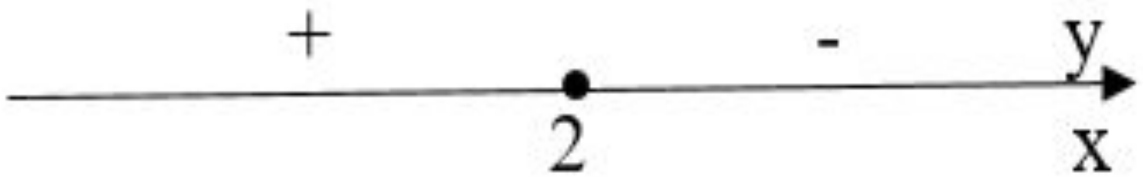
Исследовать функцию и построить график

$$y = (2 - x)e^{x-1}$$

1. $D_y = (-\infty; +\infty)$.

При $x = 0 : y = 2e^{-1}$; при $y = 0 : x = 2$;

$\left(0; \frac{2}{e}\right)$ и $(2; 0)$ – точки пересечения с осями координат.



•

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

(неопределенность, раскрывается по правилу

Лопиталя).

3. Вертикальных асимптот нет.

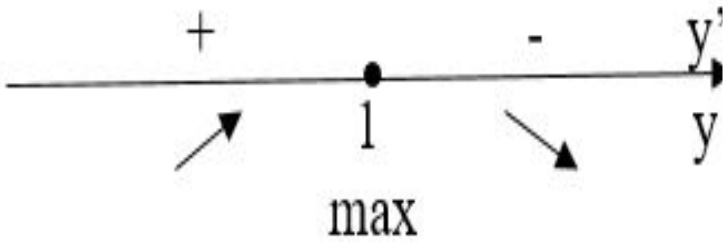
$y = 0$ – горизонтальная асимптота при

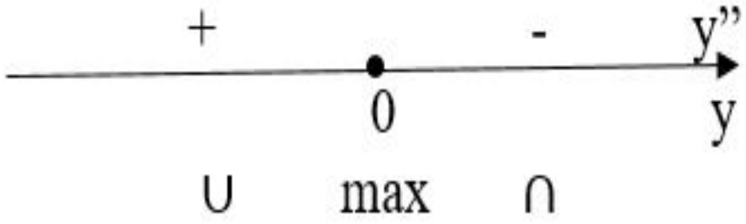
$x \to -\infty$. При $x \to +\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2-x)e^{x-1}}{x} = -\infty,$$

асимптот при $x \to +\infty$ нет.

4) $y' = e^{x-1}(1-x)$





5) $y'' = e^{x-1}(1-x) - e^{x-1} = -xe^{x-1}$

$x = 0$ – точка перегиба

$$f(0) = \frac{2}{e}$$

6)