НЕРАВЕНСТВА С ЛОГАРИФМАМИ

ЕГЭ, ЗАДАНИЕ С3

УЧАЩИЕСЯ 11А КЛАССА

ДЖОХАДЗЕ ГИГА, ИВАНЧЕНКО ЛИЗА, КАПИНУС МАКСИМ, ЧЕРНОВОЛЮК МАРИЯ

ТЕОРИЯ
ИСПОЛНИТЕЛЬ: ГИГА

- В решении логарифмических неравенств нет определённого алгоритма решения, но есть некоторые пункты, которые опасно забывать.

Вот основные из них:

1) Область определения найти первым делом.

2) Помнить свойства логарифма.

3) Знать метод рационализации

4) Верить в себя и идти до конца.

- Дополнительный материал для ознакомления: 1 видео 2 видео

ТЕСТ №1 ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ СТАЛКЕР: МАКСИМ

1. Задание 15

Решите неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \leq \log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right).$$

2. Задание 15

Решите неравенство:

$$\log_3(x^2-x-3) + \log_3(2x^2+x-3) \geq \log_3(x^2-2)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}} 4.$$

3. Задание 15

Решите неравенство:

$$2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \leq 256.$$

4. Задание 15

Решите неравенство:

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}.$$

5. Задание 15

Решите неравенство:

$$2\log_7(x\sqrt{2}) - \log_7\left(\frac{x}{1-x}\right) \leq \log_7\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 5\right).$$

РЕШЕНИЯ ТЕСТА №1, ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ НА САЙТЕ РЕШУ ЕГЭ

Задание 15 № 508462

Решите неравенство: $2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}\le 256.$

Решение.

Область определения неравенства задается условием $x>0$. На множестве $(0;\ +\infty)$ имеем: $x=2^{\log_2 x}$, и тогда для второго слагаемого получаем $x^{\log_2 x}=(2^{\log_2 x})^{\log_2 x}=2^{\log_2 x\cdot\log_2 x}=2^{\log_2^2 x}$.

Далее имеем:

$$2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}\le 256\Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x}+2^{\log_2^2 x}\le 256\Leftrightarrow 2\cdot 2^{\log_2^2 x}\le 256\Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x}\le 128\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x}\le 2^7\Leftrightarrow \log_2^2 x\le 7\Leftrightarrow -\sqrt{7}\le \log_2 x\le \sqrt{7}\Leftrightarrow 2^{-\sqrt{7}}\le x\le 2^{\sqrt{7}}.$$

Ответ: $[2^{-\sqrt{7}};\ 2^{\sqrt{7}}]$.

Примечание.

Можно было преобразовать первое слагаемое к виду $x^{\log_2 x}$, свести задачу к неравенству $x^{\log_2 x}\le 128$, которое логарифмированием обеих частей по основанию 2 привести к неравенству $\log_2^2 x\le 7$.

Задание 15 № 507254

Решите неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right).$$

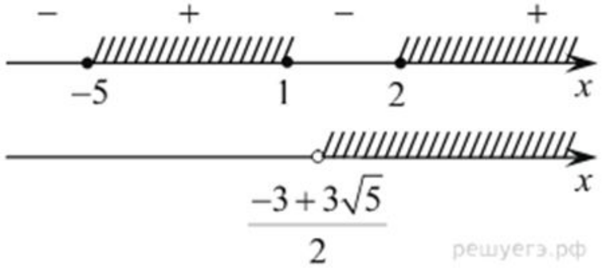
Решение.

Решим неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3(x^3+3x^2+1-10x), \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-9 \le x^3+3x^2+1-10x, \\ x^2+3x-9>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-9 \le x^3+3x^2+1-10x, \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}, \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x^2-13x+10 \ge 0, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+3x-10) \ge 0, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$$



Ответ: $[2;\ +\infty)$.

Задание 15 № 507741

Решите неравенство: $\log_3(x^2-x-3)+\log_3(2x^2+x-3)\geq\log_3(x^2-2)^2+2+\log_{\frac{1}{3}}4.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases}\log_3(4(x^2-x-3)(2x^2+x-3))\geq\log_3(3x^2-6)^2,\\ x^2-x-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(x^2-x-3)(2x^2+x-3)\geq(3x^2-6)^2,\\ x^2-x-3>0,\\ 3x^2-6\neq0.\end{cases}$$

Заметим, что $3x^2-6=(x^2-x-3)+(2x^2+x-3)$. Пусть $x^2-x-3=a$, $2x^2+x-3=b$. Тогда неравенство системы принимает вид:

$$4ab\geq(a+b)^2\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\leq0\Leftrightarrow(a-b)^2\leq0.$$

Данное неравенство выполняется только при $a=b$. Значит,

$$x^2-x-3=2x^2+x-3\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

С учётом ограничений из первой системы получаем, что $x=-2$

Ответ: −2.

Задание 15 № 517447

Решите неравенство $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geq\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Решение.

Пусть $t=\log_4 x$, решим рациональное неравенство:

$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{t-3}{t+3}\geq\frac{4t+16}{t^2-9}\Leftrightarrow\frac{t^2+6t+9}{(t-3)(t+3)}+\frac{t^2-6t+9}{(t-3)(t+3)}-\frac{4t+16}{(t-3)(t+3)}\geq 0$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\Leftrightarrow\frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-3,\\ t=1,\\ t>3.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной, получим: $0<x<\dfrac{1}{64},\ x=4,\ x>64.$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right)\cup\{4\}\cup(64;+\infty)$.

Задание 15 № 520908

Решите неравенство: $2\log_7(x\sqrt{2}) - \log_7\left(\frac{x}{1-x}\right) \le \log_7\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 5\right)$.

Решение.

Решим неравенство, перейдя к равносильной системе:

$$\begin{cases} x\sqrt{2} > 0, \\ \frac{x}{1-x} > 0, \\ \frac{2x^2(1-x)}{x} \le 8x^2 + \frac{1}{x} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{2x^2 - 2x^3 - 8x^3 - 1 + 5x}{x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{10x^3 - 2x^2 - 5x + 1}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{(5x-1)(2x^2-1)}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0 < x \le \frac{1}{5}, \\ x \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \frac{1}{5}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \le x < 1. \end{array}\right.$$

Условий существования логарифмов в левой части неравенства достаточно для соблюдения ОДЗ, ввиду знака неравенства.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ТЕСТА №1 АНАЛИТИК: ЛИЗА

- В целом все справились хорошо, очень много замечаний по области определения. Либо про нее забывают и вспоминают в конце, когда нужно писать ответ, либо вовсе не пишут. Недостаточное оформление, многие скользкие моменты опускаются. Во втором задании ошиблись 5 человек, так как там был момент, который достаточно сложно заметить, и такое мы не делали раньше. В третьем задании ошиблось два человека, так как не знали, куда двигаться. В пятом ошибся один человек, тоже не знал в каком направлении идти. Следует лучше оформлять и больше времени уделять области определения.

ТЕСТ №2
СТАЛКЕР: МАКСИМ

1. Задание

Решите неравенство

$$2\log_2(1-2x)-\log_2\left(\frac{1}{x}-2\right)\le\log_2(4x^2+6x-1).$$

2. Задание

Решите неравенство

$$\log_2(x+1)^2\cdot\log_{\frac{1}{3}}x^2-4\log_2(x+1)+4\log_3(-x)+4\le0.$$

3. Задание

Решите неравенство

$$\frac{\log_{x-1}(6x-1)}{(0,125\cdot\log_3^3x^2-\log_3x)\cdot(\log_3(x-2)-1)}\ge0.$$

4. Задание

Решите неравенство

$$4\cdot3^{\log_3^2(x-2)}-9\ge4\cdot3^{2\log_3^2(x-2)}-11\cdot(x-2)^{\log_3(x-2)}.$$

РЕШЕНИЯ ТЕСТА №2, ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ НА САЙТЕ РЕШУ ЕГЭ

2. Задание 15

Решите неравенство

$$\log_2(x+1)^2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 4\log_2(x+1) + 4\log_3(-x) + 4 \le 0.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$-\log_2(x+1)\cdot\log_3(-x) - \log_2(x+1) + \log_3(-x) + 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\log_2(x+1))(1+\log_3(-x)) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 2 - \log_2(x+1))\left(\log_3(-x) - \log_3\frac{1}{3}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x+\dfrac{1}{3}\right) \le 0, \\ -1 < x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le x < 0.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};\ 0\right)$.

1. Задание 15

Решите неравенство

$$2\log_2(1-2x)-\log_2\left(\frac{1}{x}-2\right)\le\log_2(4x^2+6x-1).$$

Решение.

Левая часть неравенства определена при $0<x<\frac{1}{2}.$ При этих значениях переменной

$$\log_2\left(\frac{1}{x}-2\right)=\log_2\frac{1-2x}{x}=\log_2(1-2x)-\log_2 x,$$

и тогда

$$2\log_2(1-2x)-\log_2\left(\frac{1}{x}-2\right)\le\log_2(4x^2+6x-1)\Leftrightarrow$$

$$\underset{0<x<\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}2\log_2(1-2x)-\log_2(1-2x)+\log_2 x\le\log_2(4x^2+6x-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2(1-2x)+\log_2 x\le\log_2(4x^2+6x-1)\Leftrightarrow$$

$$\underset{0<x<\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}x(1-2x)\le 4x^2+6x-1\ (*)\Leftrightarrow 6x^2+5x-1\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+1)(6x-1)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -1,\\ x\ge\frac{1}{6}\end{array}\right.\underset{0<x<\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}\frac{1}{6}\le x<\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right).$

3. Задание 15

Решите неравенство

$$\frac{\log_{x-1}(6x-1)}{(0,125\cdot\log_3^3 x^2-\log_3 x)\cdot(\log_3(x-2)-1)}\geq 0.$$

Решение.

Преобразуем первый множитель знаменателя:

$$0,125\cdot\log_3^3 x^2-\log_3 x=\left(0,5\cdot\log_3 x^2\right)^3-\log_3 x=$$

$$=\log_3^3 x-\log_3 x=\log_3 x(\log_3 x-1)(\log_3 x+1)=\log_3 x\cdot\log_3\frac{x}{3}\cdot\log_3(3x).$$

Преобразуем второй множитель знаменателя: $\log_3((x-2)-1)=\log_3\dfrac{x-2}{3}.$

На ОДЗ логарифма знаки выражений $\log_a b$ и $(a-1)(b-1)$ совпадают. Заменим множители выражениями того же знака:

$$\frac{\log_{x-1}(6x-1)}{(0,125\cdot\log_3^3 x^2-\log_3 x)\cdot(\log_3(x-2)-1)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-2)(6x-2)}{2(x-1)\cdot 2\left(\frac{x}{3}-1\right)\cdot 2(3x-1)\cdot 2\left(\frac{x-2}{3}-1\right)}\geq 0,\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{(x-3)(x-5)}\geq 0,\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<3,\\ x>5.\end{array}\right.$$

Ответ: $(2;\ 3)\cup(5;\ +\infty)$.

4. Задание 15

Решите неравенство

$$4\cdot 3^{\log_3^2(x-2)}-9\geq 4\cdot 3^{2\log_3^2(x-2)}-11\cdot(x-2)^{\log_3(x-2)}.$$

Решение.

Заметим, что

$$3^{\log_3^2(x-2)}=3^{\log_3(x-2)\cdot\log_3(x-2)}=\left(3^{\log_3(x-2)}\right)^{\log_3(x-2)}=(x-2)^{\log_3(x-2)},$$

и введём замену переменной $t=(x-2)^{\log_3(x-2)}$. Тогда

$$4t-9\geq 4t^2-11t\Leftrightarrow 4t^2-15t+9\leq 0\Leftrightarrow (t-3)(4t-3)\leq 0\Leftrightarrow \frac{3}{4}\leq t\leq 3.$$

Вернёмся к исходной переменной и прологарифмируем неравенство по основанию 3:

$$\frac{3}{4}\leq(x-2)^{\log_3(x-2)}\leq 3\Leftrightarrow \log_3\frac{3}{4}\leq\log_3(x-2)^{\log_3(x-2)}\leq\log_3 3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\log_3 4\leq\log_3^2(x-2)\leq 1\Leftrightarrow \log_3^2(x-2)\leq 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1\leq\log_3(x-2)\leq 1\Leftrightarrow\frac{1}{3}\leq x-2\leq 3\Leftrightarrow\frac{7}{3}\leq x\leq 5.$$

Ответ: $\left[\frac{7}{3};\ 5\right]$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ТЕСТА №2
АНАЛИТИК: ЛИЗА

- Со вторым тестом все справились не то что бы лучше, но по области определения и по оформлению в целом, если сравнивать с первым тестом – небо и земля. В основном ошибались в 4, у некоторых ошибки вычислительного характера, некоторые не знали куда двигаться и как сделать замену.
- Я довольна работой ребят, они постарались, и второй тест действительно был в несколько раз сложнее первого, спасибо сталкеру, им пришлось повозиться и потратить нервы, но они справились и справились отлично!!!

КОММЕНТАРИИ УЧЕНИКОВ

- Эля: «После этой работы стало легче смотреть на неравенство в целом и видеть и другие пути решения, а не зацикливаться на базовых действиях с логарифмами/методе рационализации»

ничего нового не узнал(а)	0 %
стал(а) внимательнее · 5	✓ 50 %
узнал(а) новый приём, способ решения · 6	✓ 60 %
обратил(а) внимание на ошибки, совершенные ранее. теперь не совершу · 3	30 %
теперь никогда не забуду про область определения! · 6	✓ 60 %

ОБЩИЙ ВЫВОД ПО ПРОДЕЛАННОЙ РАБОТЕ МОДЕРАТОР: МАША

- Работа в формате САМИ+ была полезна как кураторам, так и ученикам. И те, и те действительно улучшили свои знания в области решения неравенств с логарифмами.
- Исполнитель, Сталкер и Аналитик хорошо проявили себя в умении систематизировать информацию. Каждый прекрасно справился с поставленной задачей.
- Эта работа научила не только решать С3, но и помогла улучшить навыки работы в команде, организации своего времени.

Спасибо всем!