

# НЕРАВЕНСТВА С ЛОГАРИФМАМИ

---

ЕГЭ, ЗАДАНИЕ С3

УЧАЩИЕСЯ 11А КЛАССА

ДЖОХАДЗЕ ГИГА, ИВАНЧЕНКО ЛИЗА, КАПИНУС МАКСИМ, ЧЕРНОВОЛЮК  
МАРИЯ

# ТЕОРИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬ: ГИГА

---

- В решении логарифмических неравенств нет определённого алгоритма решения, но есть некоторые пункты, которые опасно забывать.

Вот основные из них:

- 1) Область определения найти первым делом.
- 2) Помнить свойства логарифма.
- 3) Знать метод рационализации
- 4) Верить в себя и идти до конца.

- Дополнительный материал для ознакомления: [1 видео](#) [2 видео](#)

# ТЕСТ №1 ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ СТАЛКЕР: МАКСИМ

---

## 1. Задание 15

Решите неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2 + 3x - 9) \leq \log_3(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10).$$

## 2. Задание 15

Решите неравенство:

$$\log_3(x^2 - x - 3) + \log_3(2x^2 + x - 3) \geq \log_3(x^2 - 2)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}} 4.$$

## 3. Задание 15

Решите неравенство:

$$2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \leq 256.$$

## 4. Задание 15

Решите неравенство:

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}.$$

## 5. Задание 15

Решите неравенство:

$$2\log_7(x\sqrt{2}) - \log_7\left(\frac{x}{1-x}\right) \leq \log_7\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 5\right).$$

# РЕШЕНИЯ ТЕСТА № I, ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ НА САЙТЕ РЕШУ ЕГЭ

Задание 15 № [508462](#) 📦 ●

Решите неравенство:  $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \leq 256$ .

**Решение.**

Область определения неравенства задается условием  $x > 0$ . На множестве  $(0; +\infty)$  имеем:  $x = 2^{\log_2 x}$ , и тогда для второго слагаемого получаем  $x^{\log_2 x} = (2^{\log_2 x})^{\log_2 x} = 2^{\log_2 x \cdot \log_2 x} = 2^{\log_2^2 x}$ .

Далее имеем:

$$\begin{aligned} 2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \leq 256 &\Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x} + 2^{\log_2^2 x} \leq 256 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{\log_2^2 x} \leq 256 \Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x} \leq 128 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x} \leq 2^7 \Leftrightarrow \log_2^2 x \leq 7 \Leftrightarrow -\sqrt{7} \leq \log_2 x \leq \sqrt{7} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{7}} \leq x \leq 2^{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Ответ:  $[2^{-\sqrt{7}}; 2^{\sqrt{7}}]$ .

**Примечание.**

Можно было преобразовать первое слагаемое к виду  $x^{\log_2 x}$ , свести задачу к неравенству  $x^{\log_2 x} \leq 128$ , которое логарифмированием обеих частей по основанию 2 привести к неравенству  $\log_2^2 x \leq 7$ .

Задание 15 № 507254

Решите неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2 + 3x - 9) \leq \log_3(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10).$$

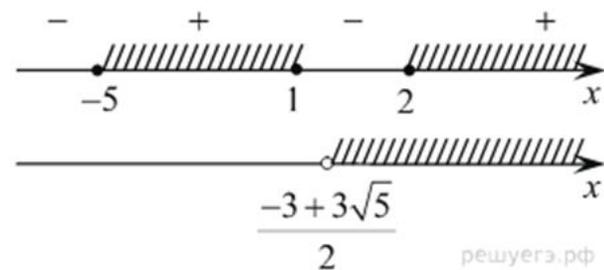
**Решение.**

Решим неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2 + 3x - 9) \leq \log_3(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 + 3x - 9) \leq \log_3(x^3 + 3x^2 + 1 - 10x), \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 9 \leq x^3 + 3x^2 + 1 - 10x, \\ x^2 + 3x - 9 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 9 \leq x^3 + 3x^2 + 1 - 10x, \\ \left[ \begin{array}{l} x < \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}, \\ x > \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 13x + 10 \geq 0, \\ x > \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + 3x - 10) \geq 0, \\ x > \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$



решуегэ.рф

Ответ:  $[2; +\infty)$ .

**Задание 15 № 507741** 📦 ●

Решите неравенство:  $\log_3(x^2 - x - 3) + \log_3(2x^2 + x - 3) \geq \log_3(x^2 - 2)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}} 4$ .

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} \log_3(4(x^2 - x - 3)(2x^2 + x - 3)) \geq \log_3(3x^2 - 6)^2, \\ x^2 - x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2 - x - 3)(2x^2 + x - 3) \geq (3x^2 - 6)^2, \\ x^2 - x - 3 > 0, \\ 3x^2 - 6 \neq 0. \end{cases}$$

Заметим, что  $3x^2 - 6 = (x^2 - x - 3) + (2x^2 + x - 3)$ . Пусть  $x^2 - x - 3 = a$ ,  $2x^2 + x - 3 = b$ . Тогда неравенство системы принимает вид:

$$4ab \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \leq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \leq 0.$$

Данное неравенство выполняется только при  $a = b$ . Значит,

$$x^2 - x - 3 = 2x^2 + x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

С учётом ограничений из первой системы получаем, что  $x = -2$

**Ответ:** -2.

Задание 15 № [517447](#) 📦 ●

Решите неравенство  $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$ .

**Решение.**

Пусть  $t = \log_4 x$ , решим рациональное неравенство:

$$\frac{t+3}{t-3} + \frac{t-3}{t+3} \geq \frac{4t+16}{t^2-9} \Leftrightarrow \frac{t^2+6t+9}{(t-3)(t+3)} + \frac{t^2-6t+9}{(t-3)(t+3)} - \frac{4t+16}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$
$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)} \Leftrightarrow \frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3, \\ t = 1, \\ t > 3. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной, получим:  $0 < x < \frac{1}{64}$ ,  $x = 4$ ,  $x > 64$ .

Ответ:  $\left(0; \frac{1}{64}\right) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$ .

Задание 15 № 520908  

Решите неравенство:  $2 \log_7(x\sqrt{2}) - \log_7\left(\frac{x}{1-x}\right) \leq \log_7\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 5\right)$ .

**Решение.**

Решим неравенство, перейдя к равносильной системе:

$$\begin{cases} x\sqrt{2} > 0, \\ \frac{x}{1-x} > 0, \\ \frac{2x^2(1-x)}{x} \leq 8x^2 + \frac{1}{x} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{2x^2 - 2x^3 - 8x^3 - 1 + 5x}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{10x^3 - 2x^2 - 5x + 1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{(5x-1)(2x^2-1)}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \left[ \begin{array}{l} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0 < x \leq \frac{1}{5}, \\ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{5}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Условий существования логарифмов в левой части неравенства достаточно для соблюдения ОДЗ, ввиду знака неравенства.

Ответ:  $\left(0; \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$ .

# РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ТЕСТА №1

## АНАЛИТИК: ЛИЗА

---

- В целом все справились хорошо, очень много замечаний по области определения. Либо про нее забывают и вспоминают в конце, когда нужно писать ответ, либо вовсе не пишут. Недостаточное оформление, многие скользкие моменты опускаются. Во втором задании ошиблись 5 человек, так как там был момент, который достаточно сложно заметить, и такое мы не делали раньше. В третьем задании ошиблось два человека, так как не знали, куда двигаться. В пятом ошибся один человек, тоже не знал в каком направлении идти. Следует лучше оформлять и больше времени уделять области определения.

# ТЕСТ №2

## СТАЛКЕР: МАКСИМ

---

### 1. Задание

Решите неравенство

$$2\log_2(1-2x) - \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1).$$

### 2. Задание

Решите неравенство

$$\log_2(x+1)^2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 4\log_2(x+1) + 4\log_3(-x) + 4 \leq 0.$$

### 3. Задание

Решите неравенство

$$\frac{\log_{x-1}(6x-1)}{(0,125 \cdot \log_3^3 x^2 - \log_3 x) \cdot (\log_3(x-2) - 1)} \geq 0.$$

### 4. Задание

Решите неравенство

$$4 \cdot 3^{\log_3^2(x-2)} - 9 \geq 4 \cdot 3^{2\log_3^2(x-2)} - 11 \cdot (x-2)^{\log_3(x-2)}.$$

# РЕШЕНИЯ ТЕСТА №2, ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ НА САЙТЕ РЕШУ ЕГЭ

## 2. Задание 15

Решите неравенство

$$\log_2(x+1)^2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 4\log_2(x+1) + 4\log_3(-x) + 4 \leq 0.$$

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} -\log_2(x+1) \cdot \log_3(-x) - \log_2(x+1) + \log_3(-x) + 1 &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1 - \log_2(x+1))(1 + \log_3(-x)) &\leq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 2 - \log_2(x+1)) \left( \log_3(-x) - \log_3 \frac{1}{3} \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \left( x + \frac{1}{3} \right) \leq 0, \\ -1 < x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x < 0.$$

Ответ:  $\left[ -\frac{1}{3}; 0 \right)$ .

### 1. Задание 15

Решите неравенство

$$2\log_2(1-2x) - \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1).$$

**Решение.**

Левая часть неравенства определена при  $0 < x < \frac{1}{2}$ . При этих значениях переменной

$$\log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) = \log_2\frac{1-2x}{x} = \log_2(1-2x) - \log_2 x,$$

и тогда

$$2\log_2(1-2x) - \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{0 < x < \frac{1}{2}}{2\log_2(1-2x) - \log_2(1-2x) + \log_2 x} \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(1-2x) + \log_2 x \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{0 < x < \frac{1}{2}}{x(1-2x) \leq 4x^2 + 6x - 1} (*) \Leftrightarrow 6x^2 + 5x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(6x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \underset{0 < x < \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{2}}.$$

Ответ:  $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$ .

### 3. Задание 15

Решите неравенство

$$\frac{\log_{x-1}(6x-1)}{(0,125 \cdot \log_3^3 x^2 - \log_3 x) \cdot (\log_3(x-2) - 1)} \geq 0.$$

**Решение.**

Преобразуем первый множитель знаменателя:

$$\begin{aligned} 0,125 \cdot \log_3^3 x^2 - \log_3 x &= (0,5 \cdot \log_3 x^2)^3 - \log_3 x = \\ &= \log_3^3 x - \log_3 x = \log_3 x (\log_3 x - 1)(\log_3 x + 1) = \log_3 x \cdot \log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_3(3x). \\ \log_3((x-2) - 1) &= \log_3 \frac{x-2}{3}. \end{aligned}$$

Преобразуем второй множитель знаменателя:

На ОДЗ логарифма знаки выражений  $\log_a b$  и  $(a-1)(b-1)$  совпадают. Заменяем множители выражениями того же знака:

$$\begin{aligned} &\frac{\log_{x-1}(6x-1)}{(0,125 \cdot \log_3^3 x^2 - \log_3 x) \cdot (\log_3(x-2) - 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)(6x-2)}{2(x-1) \cdot 2(\frac{x}{3}-1) \cdot 2(3x-1) \cdot 2(\frac{x-2}{3}-1)} \geq 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(x-3)(x-5)} \geq 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x > 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $(2; 3) \cup (5; +\infty)$ .

#### 4. Задание 15

Решите неравенство

$$4 \cdot 3^{\log_3^2(x-2)} - 9 \geq 4 \cdot 3^{2\log_3^2(x-2)} - 11 \cdot (x-2)^{\log_3(x-2)}.$$

**Решение.**

Заметим, что

$$3^{\log_3^2(x-2)} = 3^{\log_3(x-2) \cdot \log_3(x-2)} = \left(3^{\log_3(x-2)}\right)^{\log_3(x-2)} = (x-2)^{\log_3(x-2)},$$

и введём замену переменной  $t = (x-2)^{\log_3(x-2)}$ . Тогда

$$4t - 9 \geq 4t^2 - 11t \Leftrightarrow 4t^2 - 15t + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (t-3)(4t-3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq t \leq 3.$$

Вернёмся к исходной переменной и прологарифмируем неравенство по основанию 3:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \leq (x-2)^{\log_3(x-2)} \leq 3 &\Leftrightarrow \log_3 \frac{3}{4} \leq \log_3 (x-2)^{\log_3(x-2)} \leq \log_3 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \log_3 4 \leq \log_3^2(x-2) \leq 1 \Leftrightarrow \log_3^2(x-2) \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -1 \leq \log_3(x-2) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x-2 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{7}{3} \leq x \leq 5. \end{aligned}$$

Ответ:  $\left[\frac{7}{3}; 5\right]$ .

# РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ТЕСТА №2

## АНАЛИТИК: ЛИЗА

---

- Со вторым тестом все справились не то что бы лучше, но по области определения и по оформлению в целом, если сравнивать с первым тестом – небо и земля. В основном ошибались в 4, у некоторых ошибки вычислительного характера, некоторые не знали куда двигаться и как сделать замену.
- Я довольна работой ребят, они постарались, и второй тест действительно был в несколько раз сложнее первого, спасибо сталкеру, им пришлось повозиться и потратить нервы, но они справились и справились отлично!!!

# КОММЕНТАРИИ УЧЕНИКОВ



- Эля: «После этой работы стало легче смотреть на неравенство в целом и видеть и другие пути решения, а не заикливаться на базовых действиях с логарифмами/методе рационализации»

ничего нового не узнал(а) 0 %

стал(а) внимательнее · 5 ✓ 50 %

узнал(а) новый приём, способ решения · 6 ✓ 60 %

обратил(а) внимание на ошибки, совершенные ранее. теперь не совершу · 3 30 %

теперь никогда не забуду про область определения! · 6 ✓ 60 %

# ОБЩИЙ ВЫВОД ПО ПРОДЕЛАННОЙ РАБОТЕ

## МОДЕРАТОР: МАША

---

- Работа в формате САМИ+ была полезна как кураторам, так и ученикам. И те, и те действительно улучшили свои знания в области решения неравенств с логарифмами.
- Исполнитель, Сталкер и Аналитик хорошо проявили себя в умении систематизировать информацию. Каждый прекрасно справился с поставленной задачей.
- Эта работа научила не только решать СЗ, но и помогла улучшить навыки работы в команде, организации своего времени.

Спасибо всем!

