ЛЕКЦИЯ 8

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

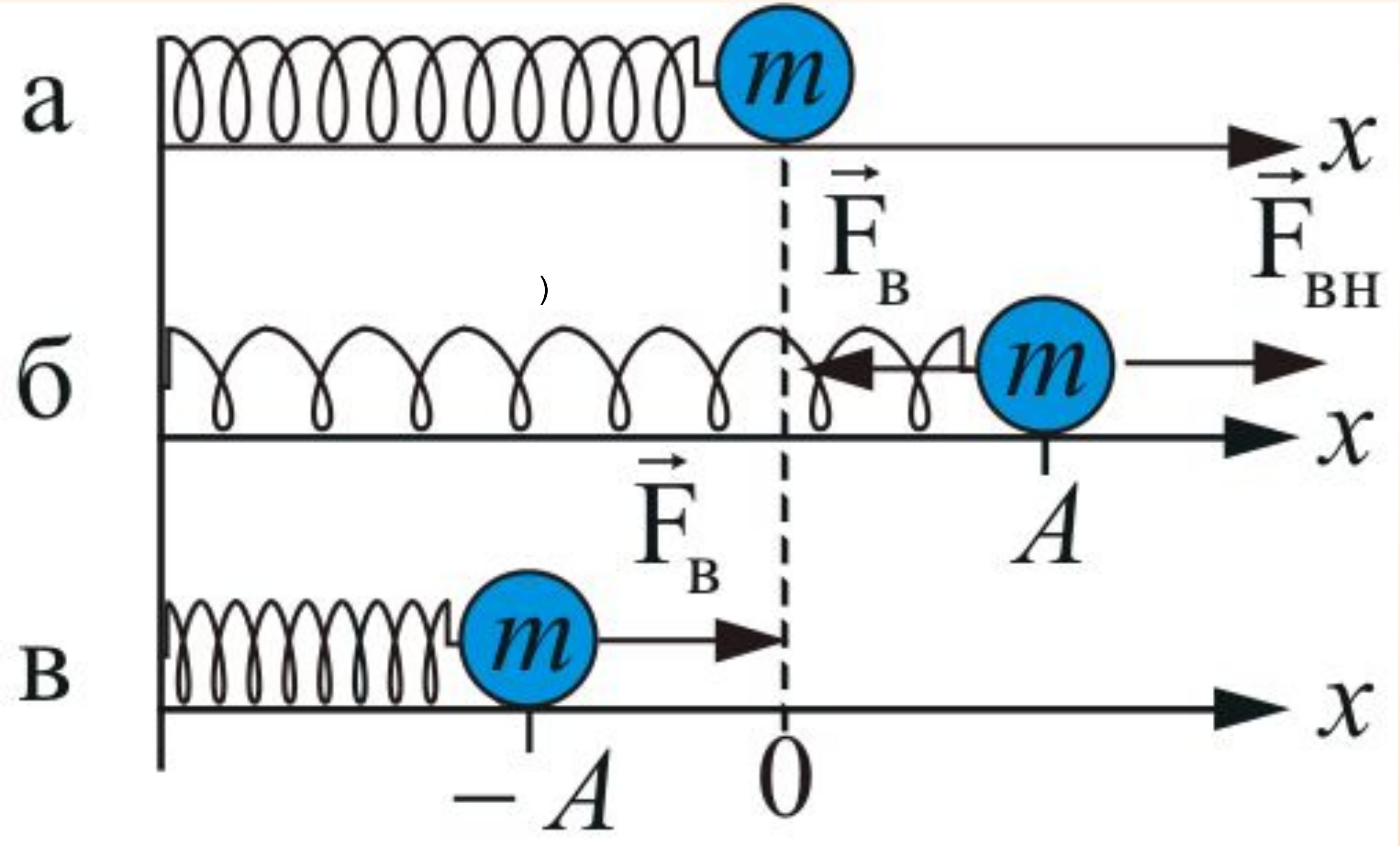
Виды и признаки колебаний

Колебания делятся на **механические** и **электромагнитные** (электромеханические комбинации)

Для колебаний характерно превращение одного вида энергии в другую – кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т.д.

Колебательным движением (или просто колебанием) называются процессы, повторяющиеся во времени.

Колебательное движение является **периодическим.** Простейшим примером периодического движения служат *колебания груза на конце пружины*.



Три признака колебательного движения:

- **повторяемость (периодичность)** – движение по одной и той же траектории туда и обратно;
- **ограниченность** пределами крайних положений;
- **действие силы**, описываемой функцией $F = -kx$.

Колебания называются **периодическими**, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

- Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые **гармонические колебания.**

- Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например, $\boldsymbol{F = -kx}$), совершает **гармонические колебания.**
-
- Саму такую систему часто называют **гармоническим осциллятором**.

- Различные **периодические процессы** (повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как **наложение гармонических колебаний**.

Периодический процесс можно описать уравнением:

$$\boxed{f(t) = f(t + nT)}$$

Колебания называются гармоническими, если зависимость некоторой величины имеет вид

$\boxed{x = A\cos\phi}$ или $\boxed{x = A\sin\phi}$

Параметры гармонических колебаний

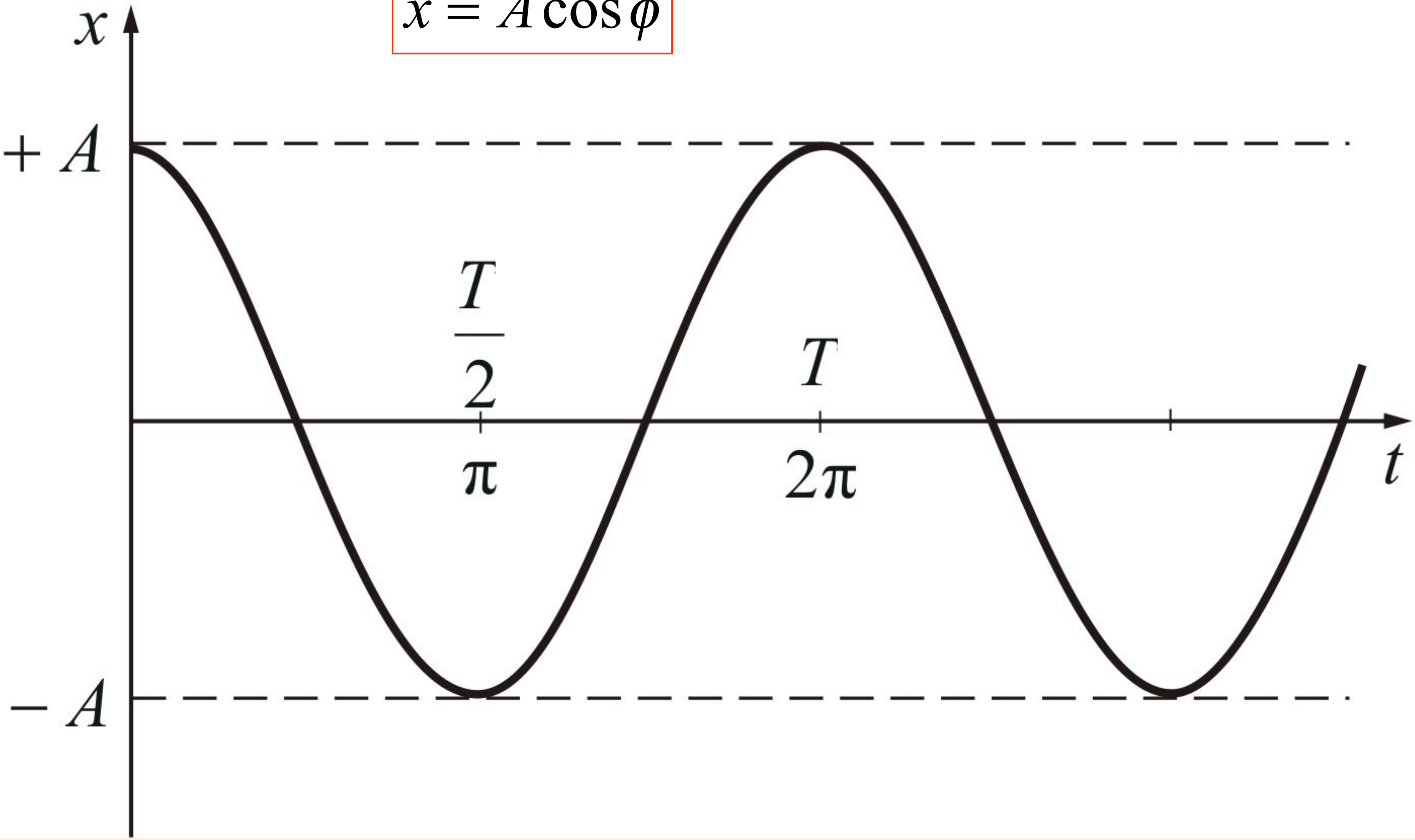
Расстояние груза от положения равновесия до точки, в которой находится груз, называют **смещением** **x**.

Максимальное смещение – наибольшее расстояние от положения равновесия – называется **амплитудой** и обозначается, буквой **A**.

$\omega_0 t + \phi_0$ определяет смещение **x** в данный момент времени t и называется **фазой колебания.**

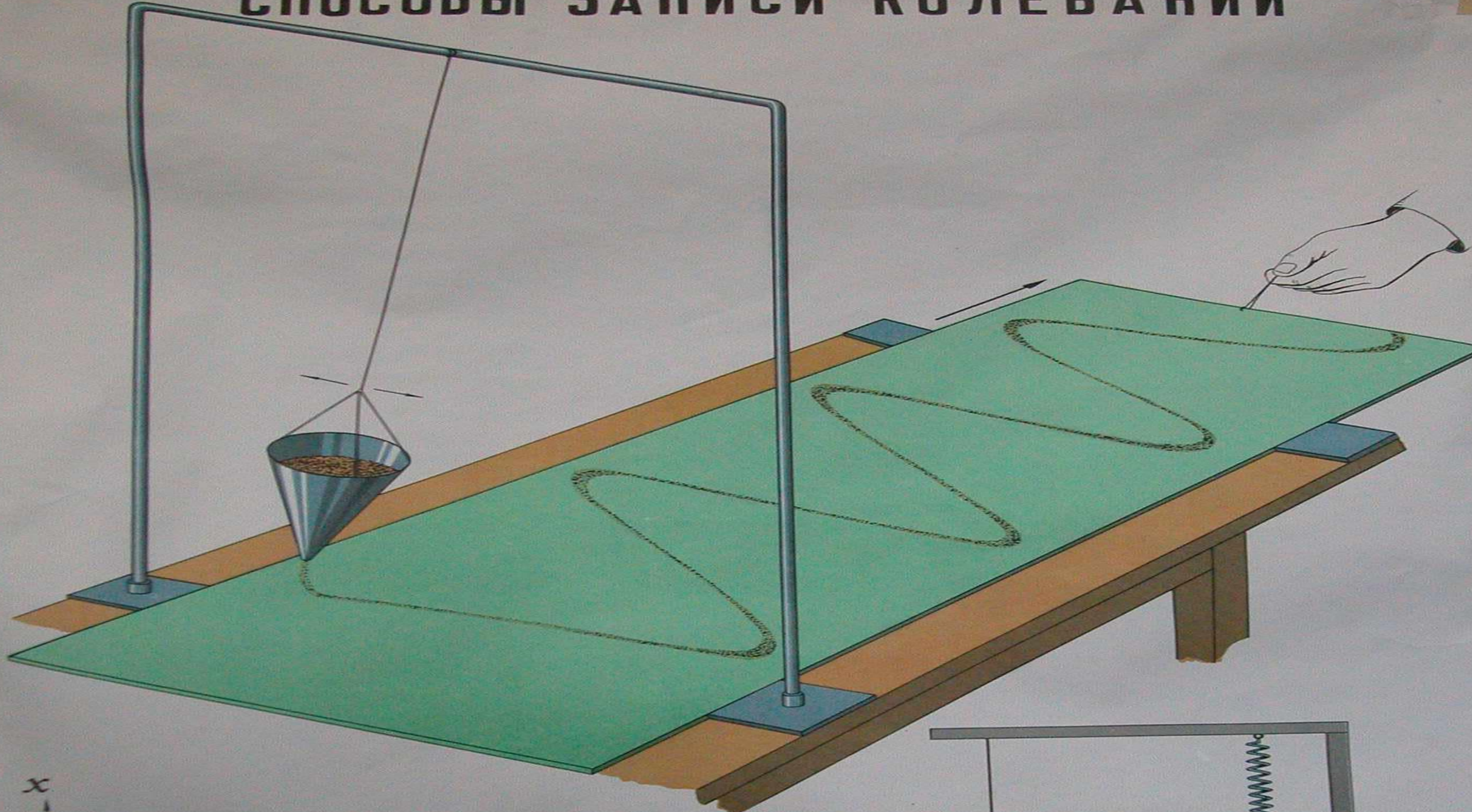
ϕ_0 называется **начальной фазой колебания** при t=0

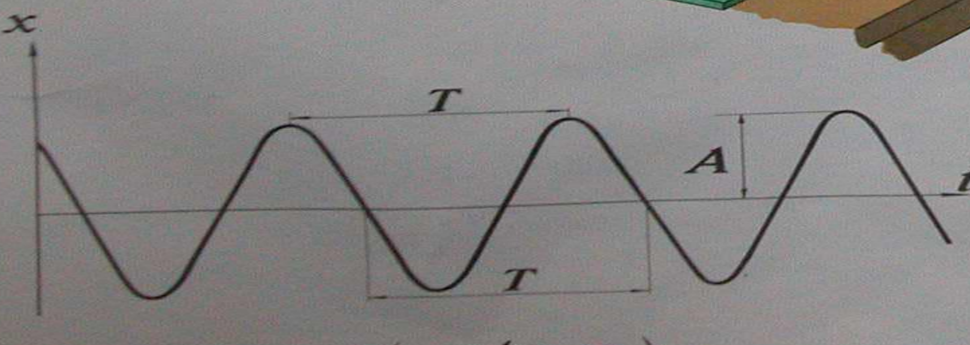
$$\boxed{x = A\cos\phi}$$

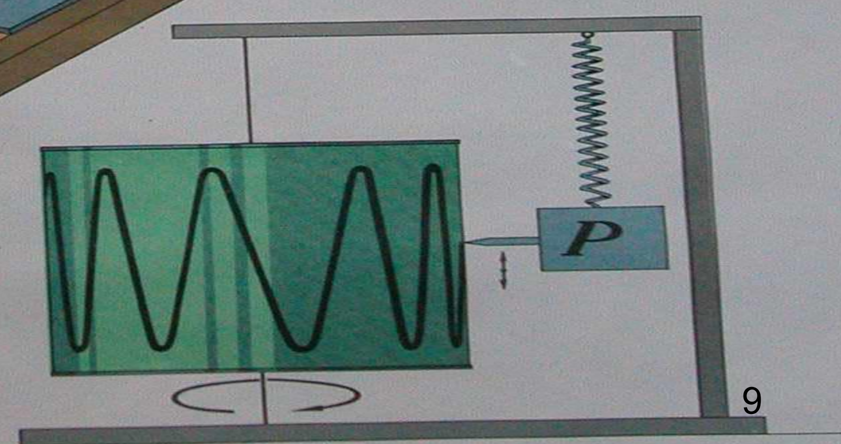


СПОСОБЫ ЗАПИСИ КОЛЕБАНИЙ

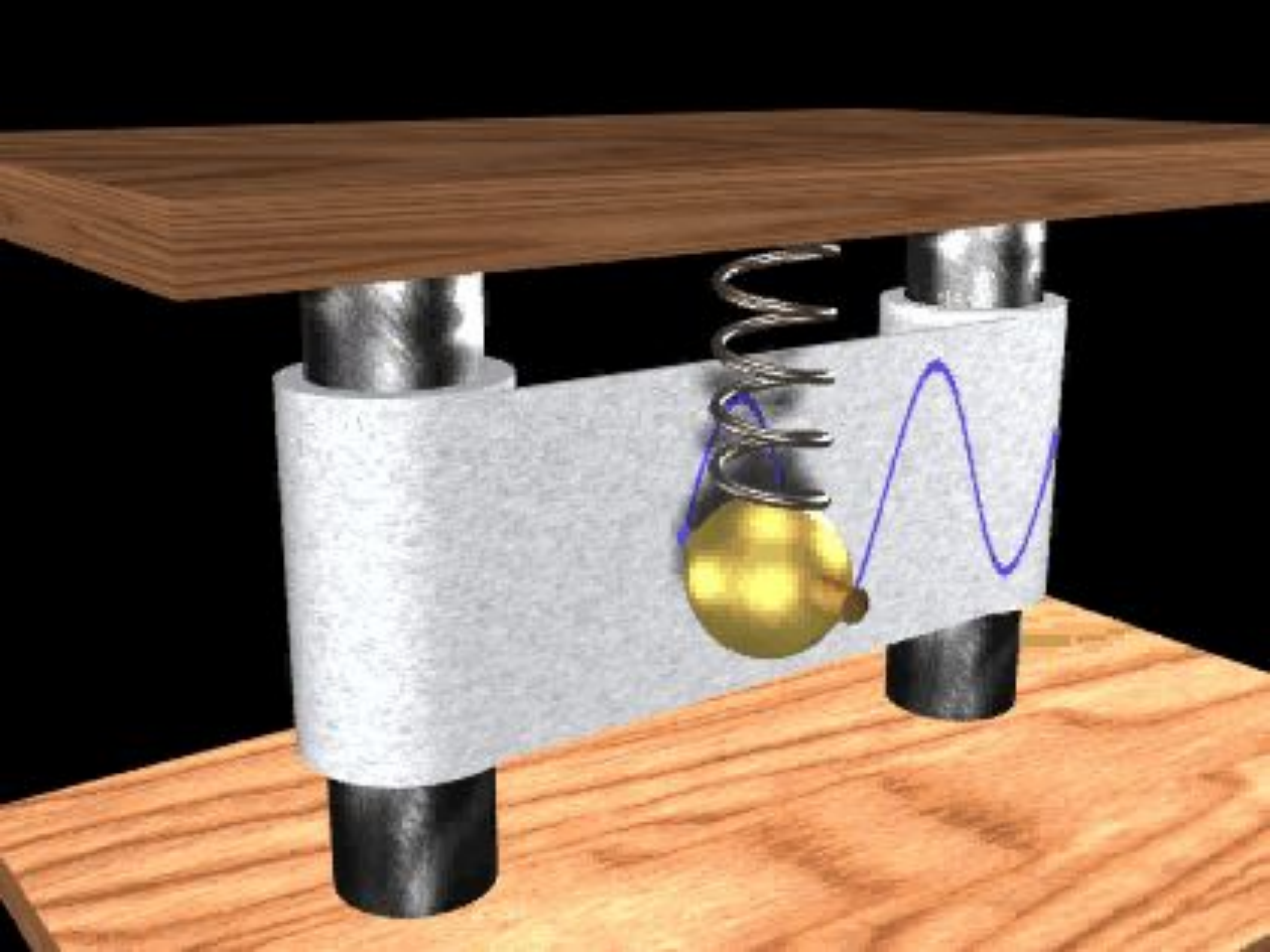
ЛИСТ 1







$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



Частота колебаний ν определяется, как число полных колебаний в 1 секунду. Частоту, измеряют в герцах (Гц): 1 Гц = 1 колебание в секунду.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

- **Период колебаний Т** – минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}$$

- ***ω – циклическая (круговая) частота*** – число полных колебаний за 2π секунд.

$$\omega_0 = 2\pi\nu$$

- Фаза φ не влияет на форму кривой x(t), а влияет лишь на ее положение в некоторый произвольный момент времени t.

- Гармонические колебания являются всегда **синусоидальными.**
- Частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды.

Смещение описывается уравнением

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

тогда, по определению:

скорость
$$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

ускорение
$$a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

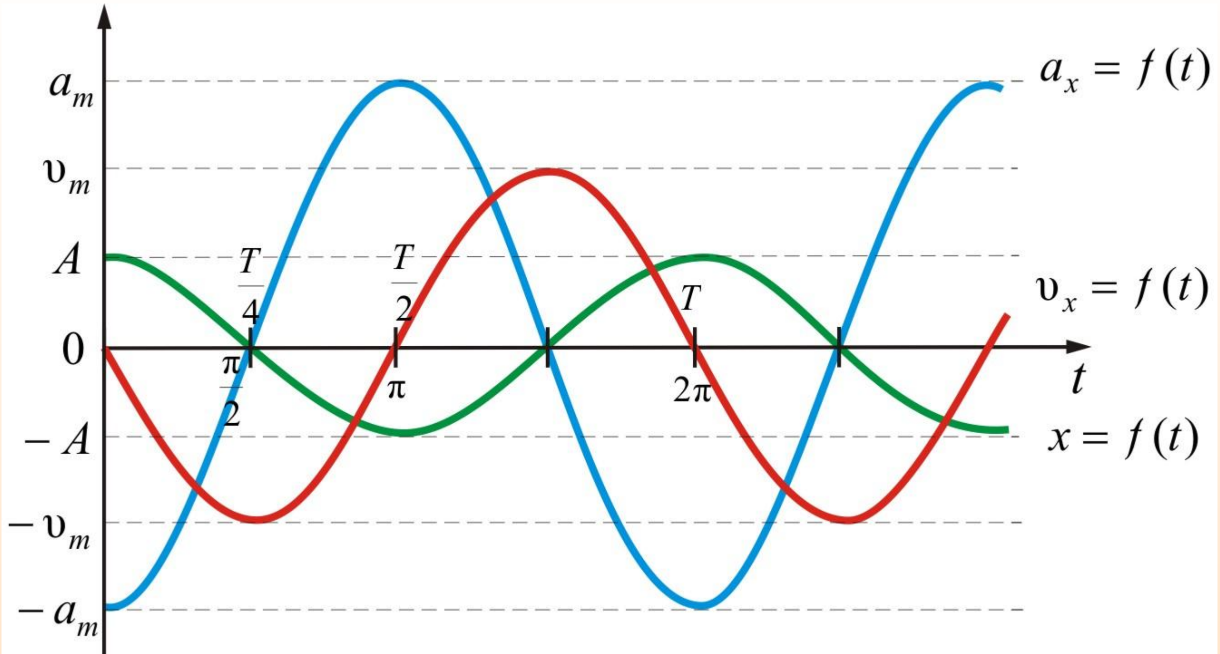
$\omega_0 A = \upsilon_m$ *– амплитуда скорости*;

$\omega_0^2 A = a_m$ *– амплитуда ускорения.*

Графики смещения скорости и ускорения

Уравнения колебаний запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega_0 t + \phi) \\ \upsilon_x = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \phi) \\ a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$



- **Скорость** **колебаний тела максимальна и равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия (x=0).**
- **При максимальном смещении (** $x = \pm A$ **) скорость равна нулю.**
- **Ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.**

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

- Исходя из второго закона, $F = ma$, можно записать

$$F_x = -m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \phi) = -m\omega_0^2 x$$

$$\boxed{F_x = -m\omega_0^2 x}$$

сила F пропорциональна x и всегда направлена к положению равновесия (поэтому ее и называют **возвращающей силой**).

- Примером сил являются упругие силы. Силы же имеющие иную природу называются квазиупругими. **Квазиупругая сила**

$$F_x = -kx,$$

где k – коэффициент квазиупругой силы

Получим основное уравнение динамики гармонических колебаний, вызываемых упругими силами:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \quad \text{или} \quad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0\ ; \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0\ , \quad \text{тогда}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

Решение этого уравнения всегда будет выражение вида

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Круговая частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

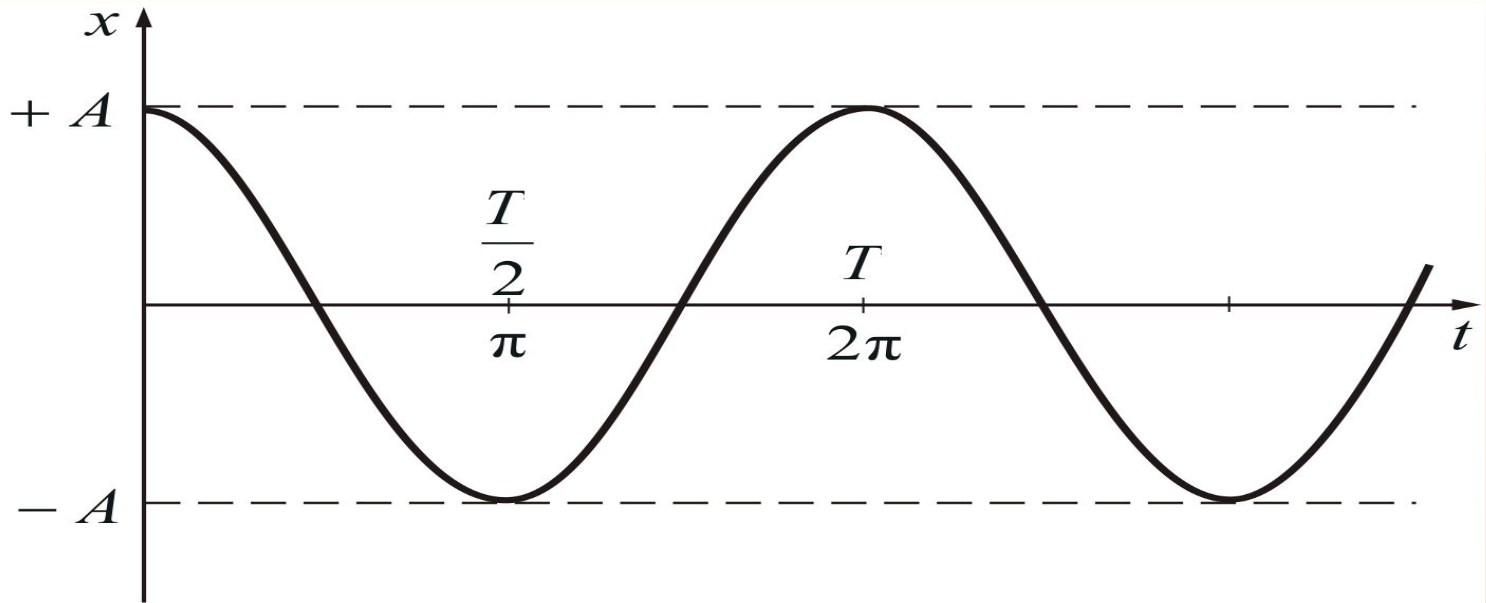
но

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$ тогда

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

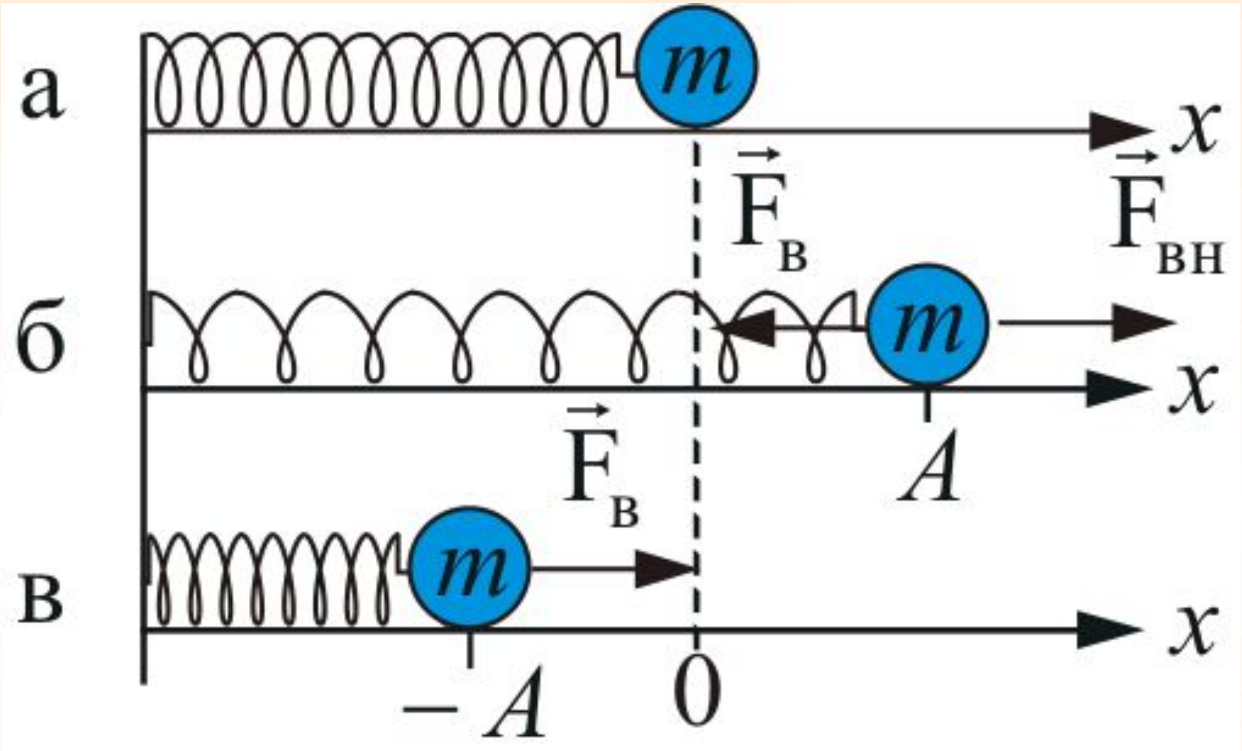
Период колебаний

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$



$$x = A\cos\phi$$

Энергия гармонических колебаний



Потенциальная энергия тела U, измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила

$$F_x = -kx$$

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}; \quad \mathrm{d}U = -F\mathrm{d}x = kx\mathrm{d}x$$, отсюда $$U = k\int_0^x x\mathrm{d}x$$

Потенциальная энергия

$$\boxed{U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)}$$

Кинетическая энергия

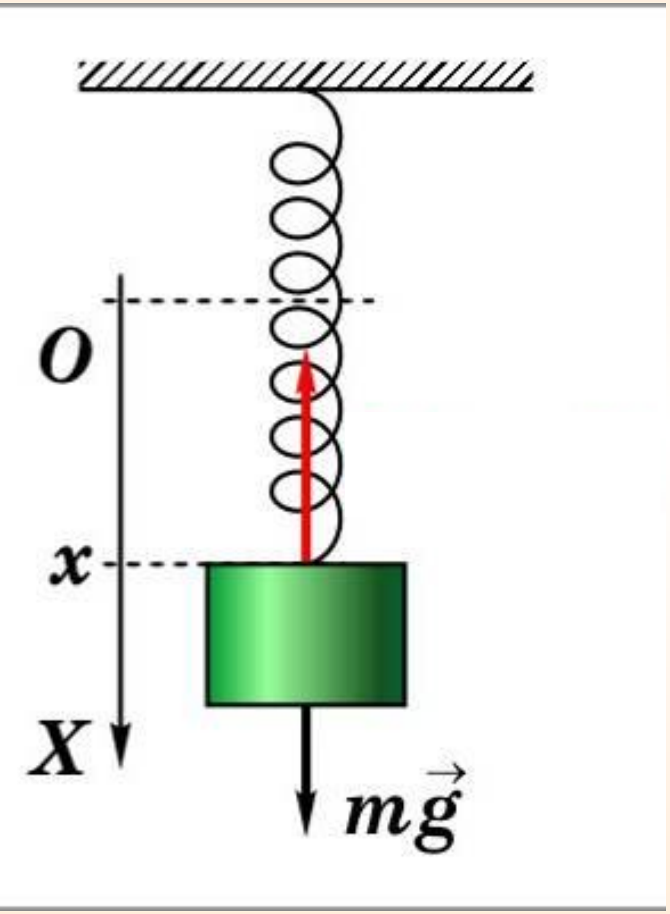
$$\boxed{K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)}$$

Полная энергия:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2}$$

Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.

Гармонический осциллятор



1. ***Пружинный маятник*** – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью k, совершающий гармонические колебания под действием *упругой силы* $F = -kx$

Из второго закона Ньютона $F = ma$; или $F = - kx$ получим ***уравнение движения маятника***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

или

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0}$$

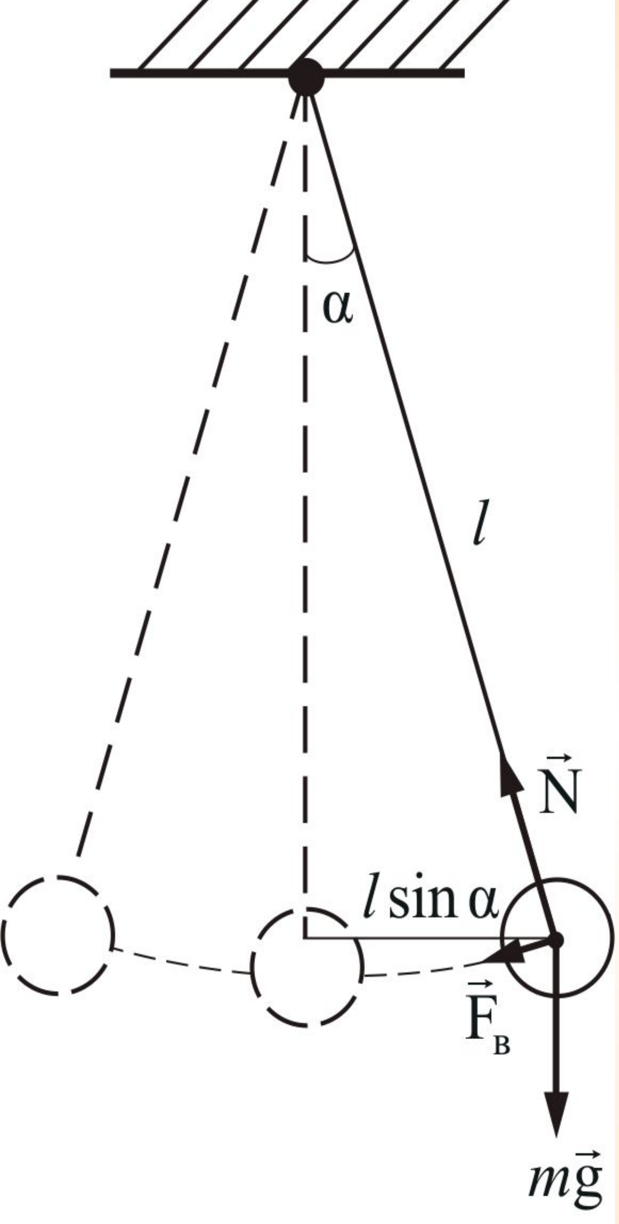
Решение этого уравнения – гармонические колебания вида:

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \phi)}$$

циклическая частота **ω** период ***T***

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



2 Математическим маятником – называется идеализированная система, состоящая из невесомой, нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (шарик на длинной тонкой нити).

- При отклонении маятника от вертикали, возникает ***вращающий момент*** $M = -mgl\sin\alpha$

- *Уравнение динамики вращательного движения для маятника*: $M = J\varepsilon$

Момент инерции маятника $J = ml^2$

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$ ***-угловое ускорение***

Тогда $ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\sin\alpha$, или $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha \approx \alpha.$ Обозначим : $\frac{g}{l} = \omega^2$

Уравнение движения маятника $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0$

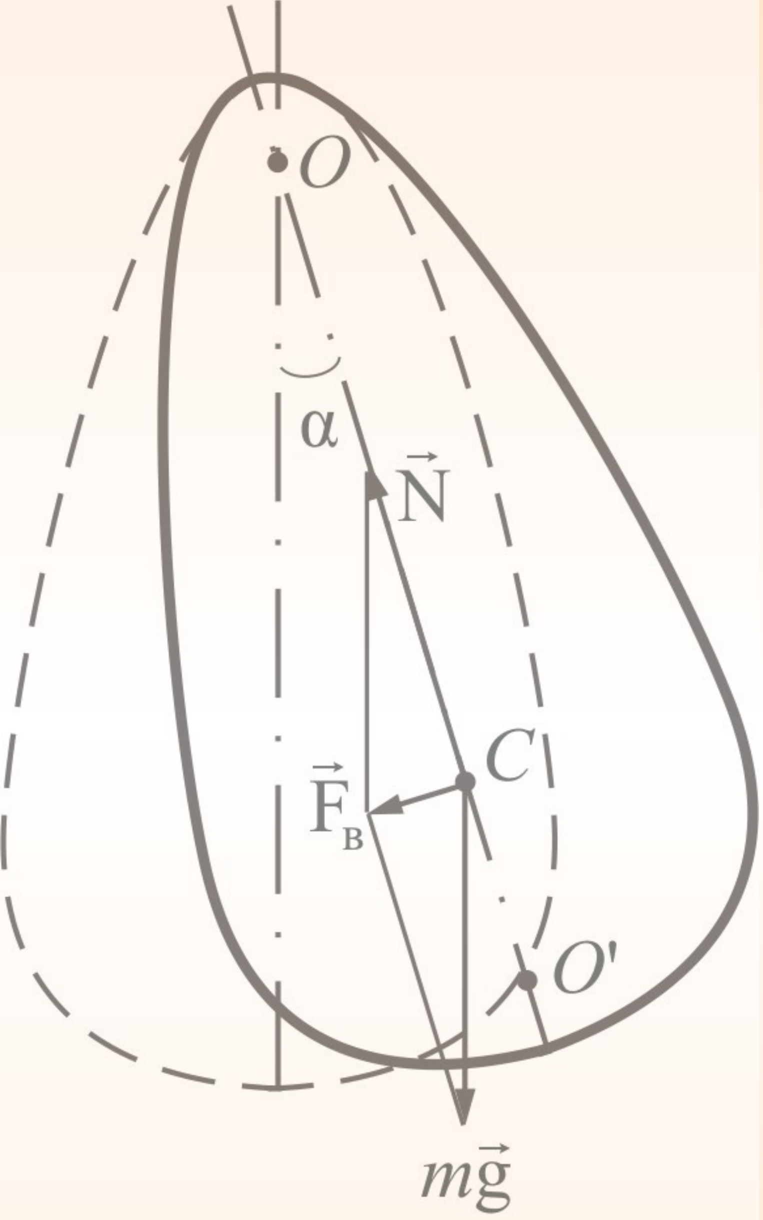
- Это уравнение динамики гармонических колебаний.

Решение уравнения имеет вид:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

T – зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения.



3 **Физический маятник** – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной **оси, проходящей через точку подвеса О, не совпадающую с центром масс С**

Вращающий момент маятника:

$$M = -mgl\sin\alpha$$

l – расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника *О-С*.

Обозначим:

***J* – момент инерции** маятника относит. точки подвеса *O*.

$\varepsilon = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ - угловое ускорение, тогда

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \alpha$$

Уравнение динамики вращательного движения

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0 \qquad \alpha = \alpha_m\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \qquad l_{\text{ïð.}} = \frac{J}{ml} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{ïð.}}}{g}}}$$

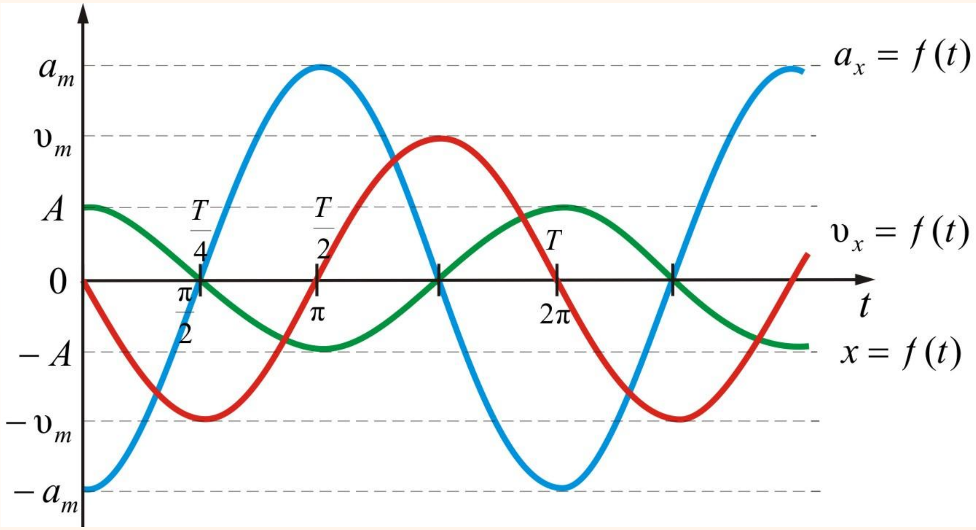
$l_{\text{пр.}}$ – **приведенная** длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Способы представления гармонических колебаний

Гармонические колебания можно представить несколькими способами:

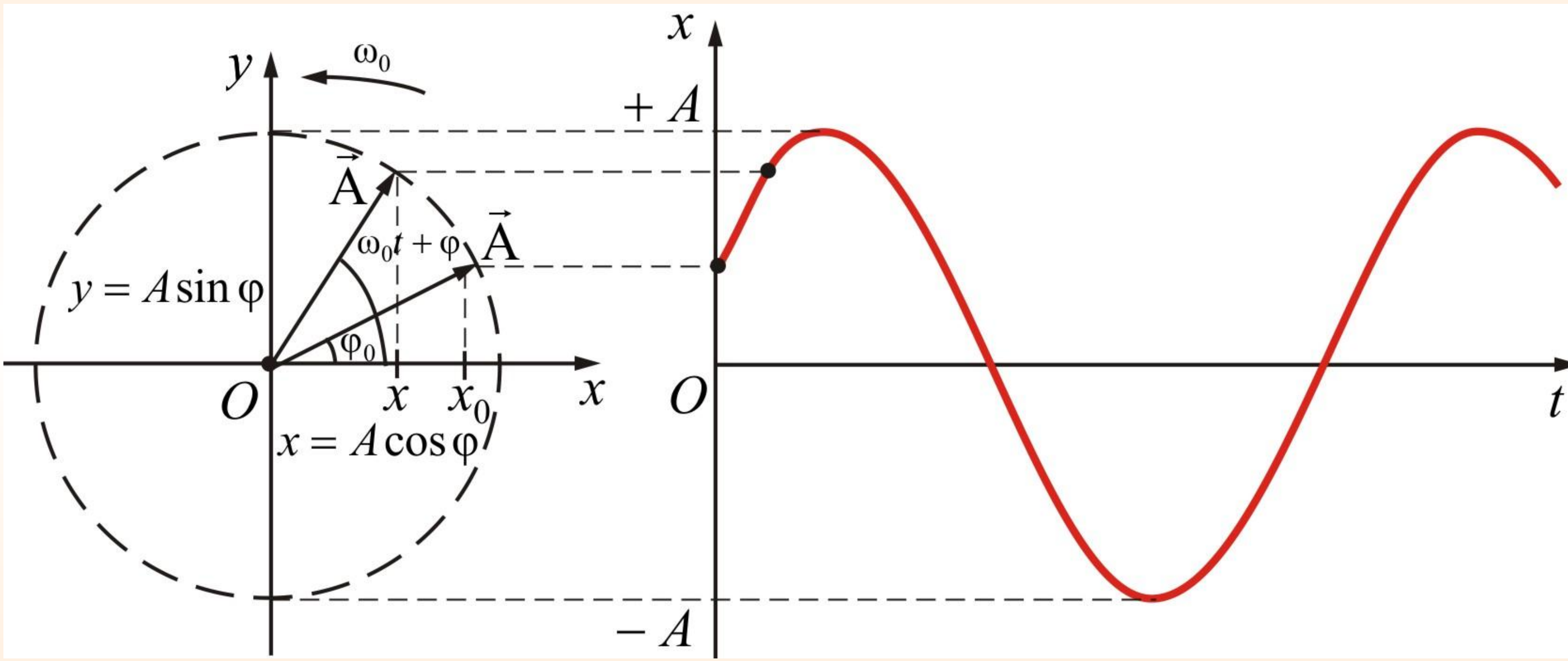
•**аналитический:** $$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

•**графический;**



•**геометрический,** с помощью вектора амплитуды (метод векторных диаграмм).

Геометрический способ, с помощью вектора амплитуды ***(метод векторных диаграмм).***



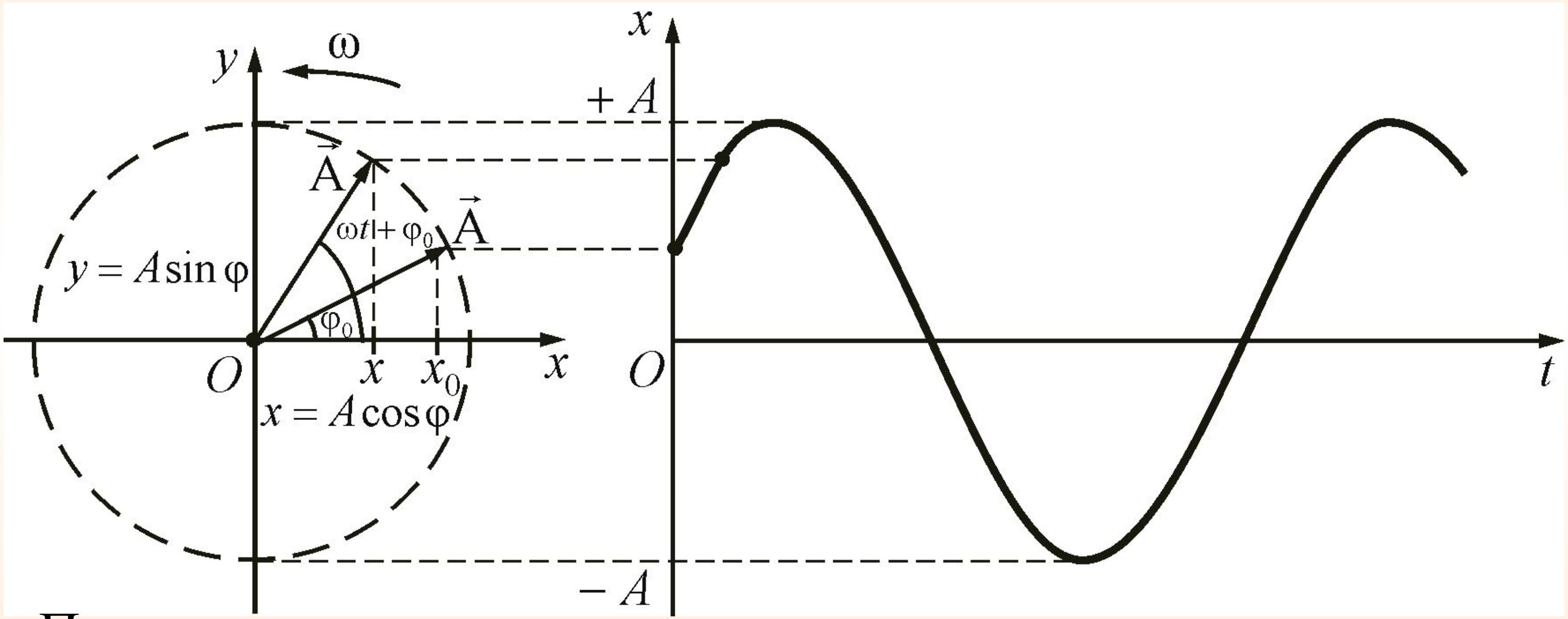
$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$x_0 = A\cos\phi_0$$

Ox – опорная прямая

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \qquad x_0 = A\cos\phi_0$$

Вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание.

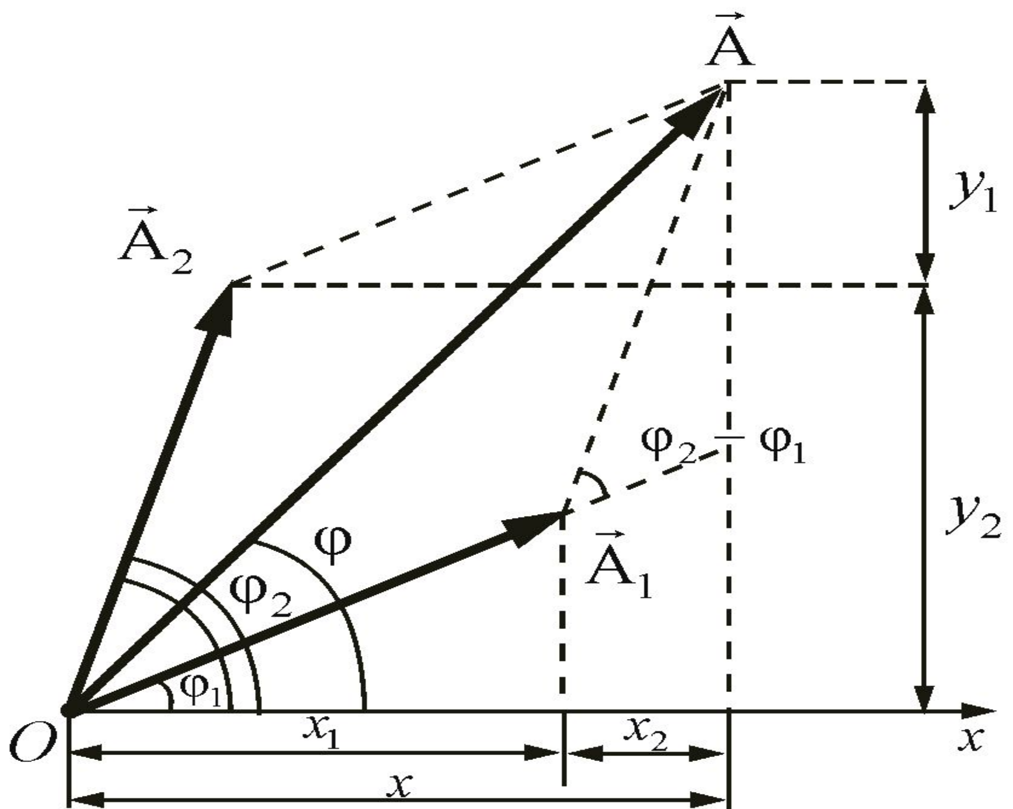


Проекция кругового движения на ось *y*, также совершает гармоническое колебание

$$y = A\sin(\omega t + \phi)$$

Пусть **точка** одновременно участвует **в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.**

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$



Такие два колебания называются когерентными, их разность фаз не зависит от времени:

$$\phi_2 - \phi_1 = \text{const}$$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$$

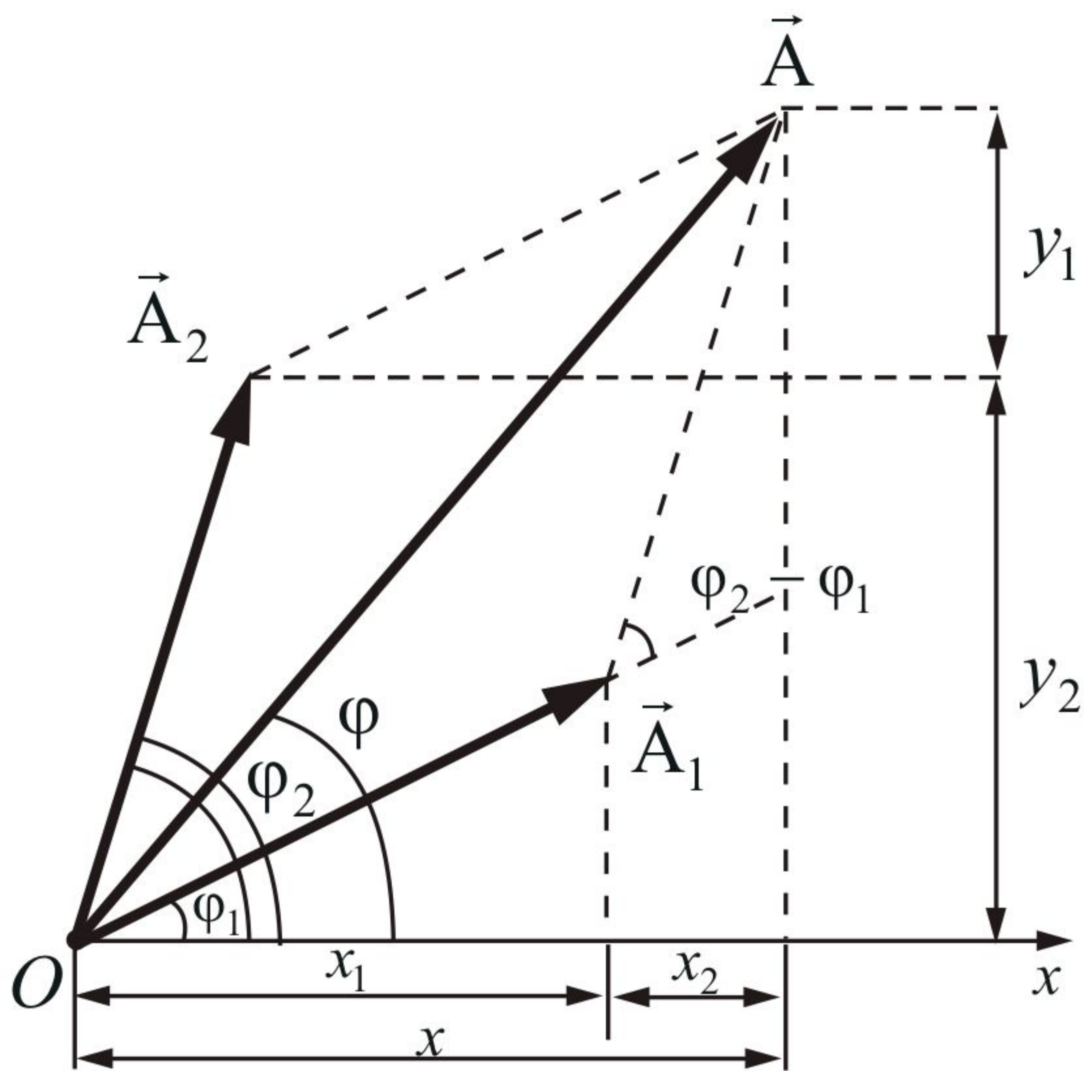
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

Ox – опорная прямая

A_1 – амплитуда 1-го колебания

φ_1 – фаза 1-го колебания.

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$



Результирующее колебание, тоже гармоническое, с частотой **ω:**

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

По правилу сложения векторов найдем суммарную амплитуду, результирующего колебания:

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

Начальная фаза определяется из соотношения

$$\boxed{\mathrm{tg}\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}}$$

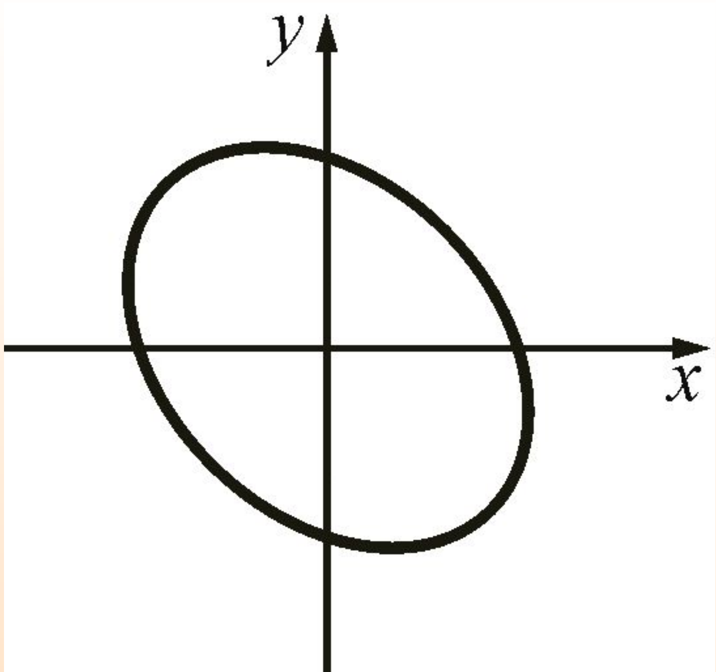
Амплитуда **А** результирующего колебания зависит от разности начальных фаз

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) \qquad y = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \qquad \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$$\boxed{\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\phi_2 - \phi_1) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1)}$$



В результате получили уравнение **эллипса** с произвольно расположенными осями

Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний уменьшается.

Сила трения (или сопротивления)

$$\boxed{\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{\upsilon}}$$

где r – коэффициент сопротивления,

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения

Второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси x

$$\boxed{ma_x = -kx - r\upsilon_x}$$

где kx – возвращающая сила, $r\upsilon_x$ – сила трения.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения $\dfrac{r}{2m} = \beta$ $\quad \dfrac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение уравнения имеет вид

$$\boxed{x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi)}$$

Найдем частоту колебаний ω. $(\omega \neq \omega_0)$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad \beta \leq \omega_0$$

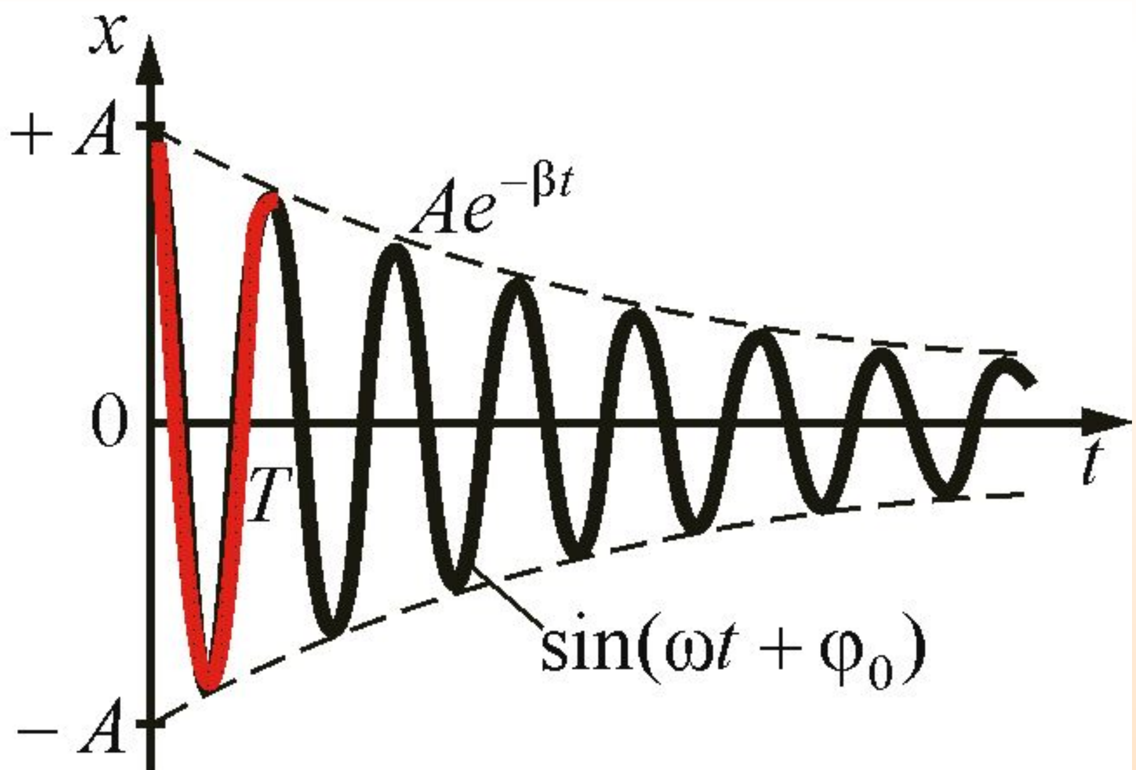
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \beta = \frac{r}{2m} \quad ; \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.}$$

Условный период $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},}$

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

где β – *коэффициент затухания*



Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период Т.

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

$$\boxed{\chi = \beta T}$$

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1, \qquad \beta\tau = 1;$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\tau}.}$$

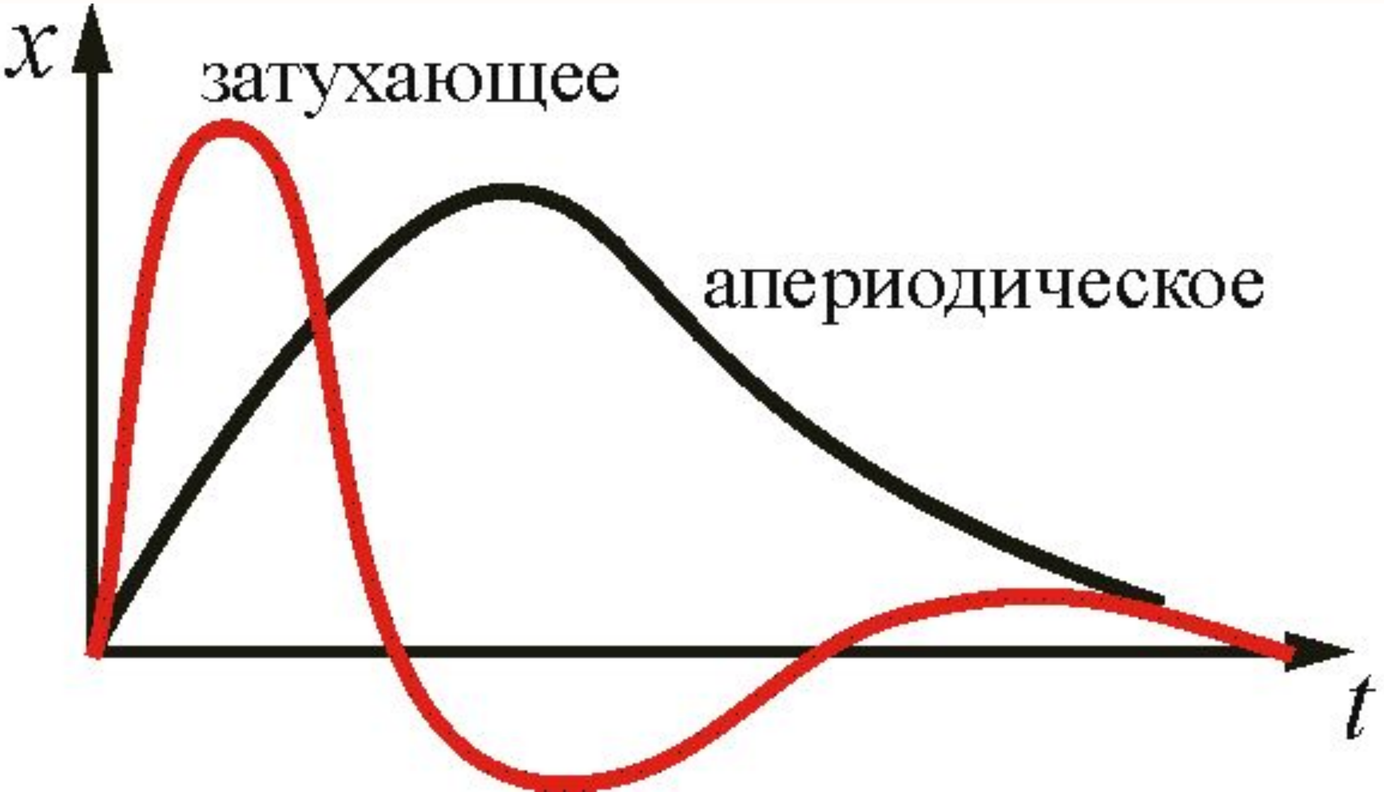
Следовательно, *коэффициент затухания* β – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого *амплитуда уменьшается в e раз*,

τ – *время релаксации*.

Когда сопротивление становится равным критическому

$$r = r_{\text{кр}}, \quad \beta = \omega_0,$$

то круговая частота обращается в нуль, $\omega = 0 \quad T \to \infty$ колебания прекращаются. Такой процесс называется *апериодическим:*



$$r = r_{\text{êð}}$$

$$\beta = \omega_0$$

$$\omega = 0$$

$$T \to \infty$$

Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую кроме *упругой силы* (–kx) и *сил сопротивления* (– $r\upsilon$) действует добавочная *периодическая сила F* – *вынуждающая сила:*

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x + F_x$$

– *основное уравнение колебательного процесса*, при вынужденных колебаниях

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = F_x$$

$$F_x = F_0 \cos\omega t.$$

Уравнение установившихся вынужденных колебаний

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

Задача найти амплитуду *A* и разность фаз φ между смещением вынужденных колебаний и вынуждающей силой.

Введем обозначения:

$A_1 = \omega^2$ – *амплитуда ускорения*;

$A_2 = 2\beta\omega$ – а*мплитуда скорости*;

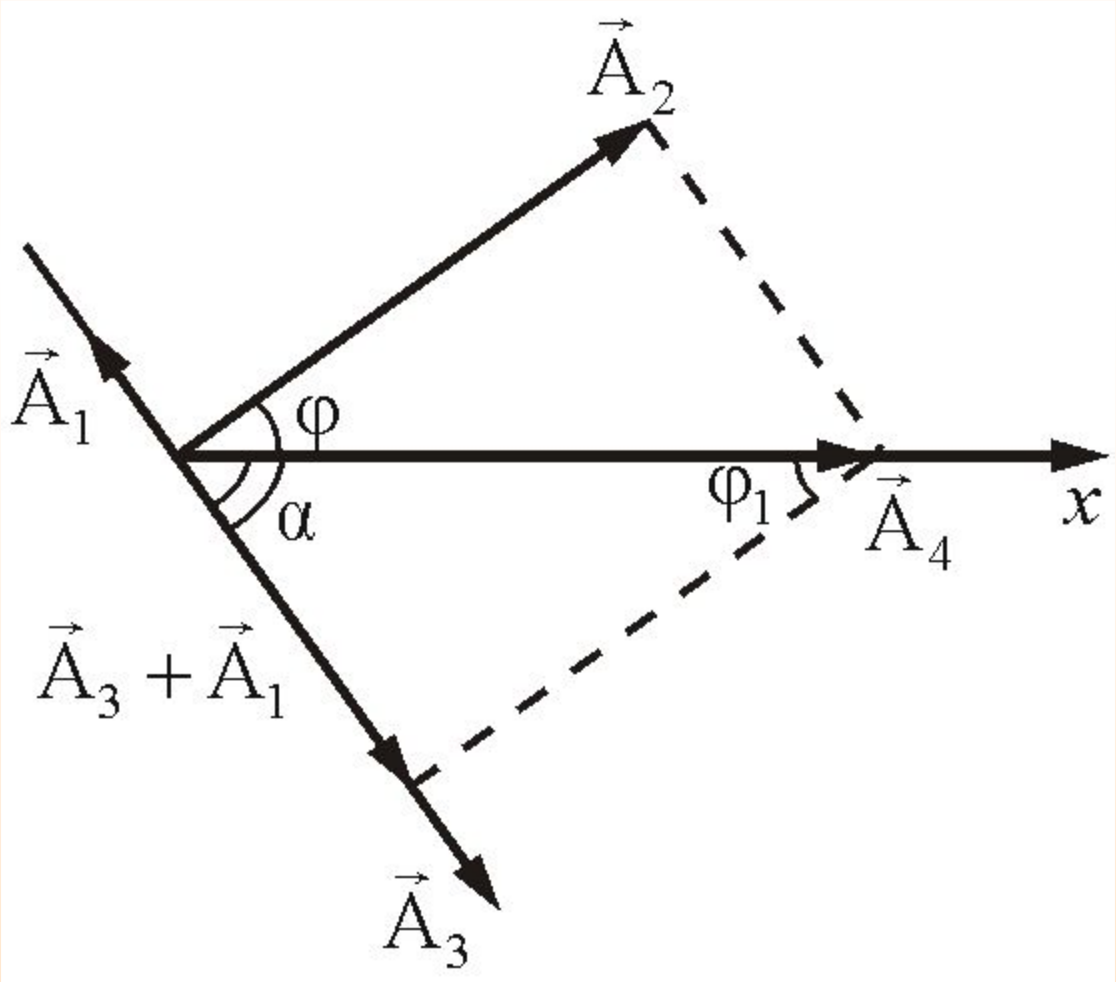
$A_3 = \omega_0^2$ – *амплитуда смещения*;

$A_4 = F_0 / mA$ – *амплитуда вынуждающей силы*

Вектор амплитуды силы найдем по правилу сложения векторов:

$$\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$$

$$A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2$$



$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

1) $\omega = 0$ (частота вынуждающей силы равна нулю)

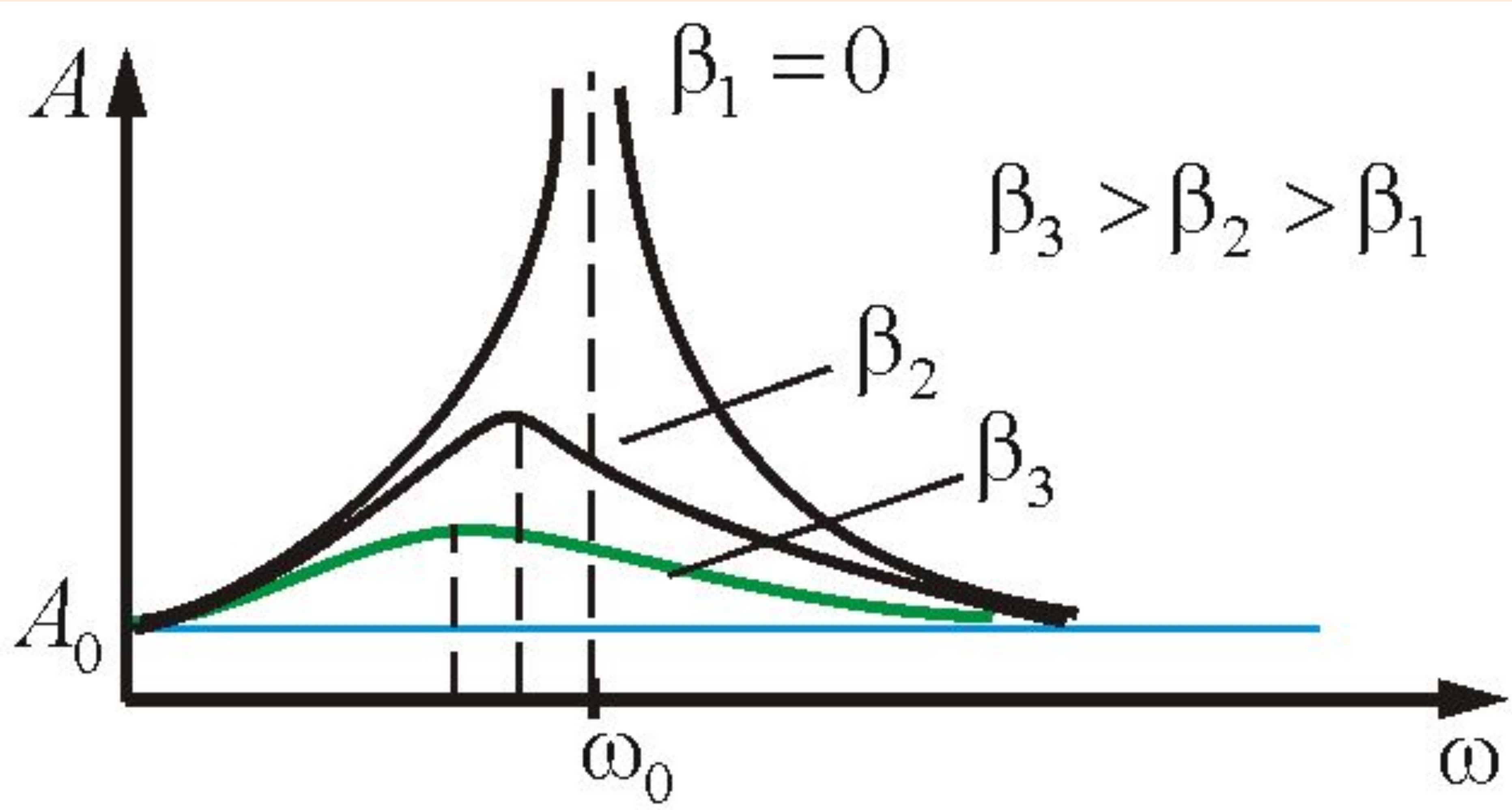
$$x = F_0 / m\omega_0^2$$

– статическая амплитуда, колебания не совершаются.

2) $\beta = 0$ (затухания нет). С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$), амплитуда растет и при $\omega = \omega_0$, амплитуда резко возрастает ($A \to \infty$). Это явление называется – *резонанс*. При дальнейшем увеличении ($\omega > \omega_0$) амплитуда опять уменьшается.

3) $\beta \neq 0.$ $\omega_{\text{ðåç}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ резонансная частота

$\omega = \omega_0$ $\grave{A} \to \infty$ *- явление резонанса*



$$\boxed{\omega_{ðåç} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

– резонансная частота

$$\boxed{\omega_{\text{ðåç}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$ – резонансная частота.

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к $\omega_{\text{ðåç}}$ называется резонансом.

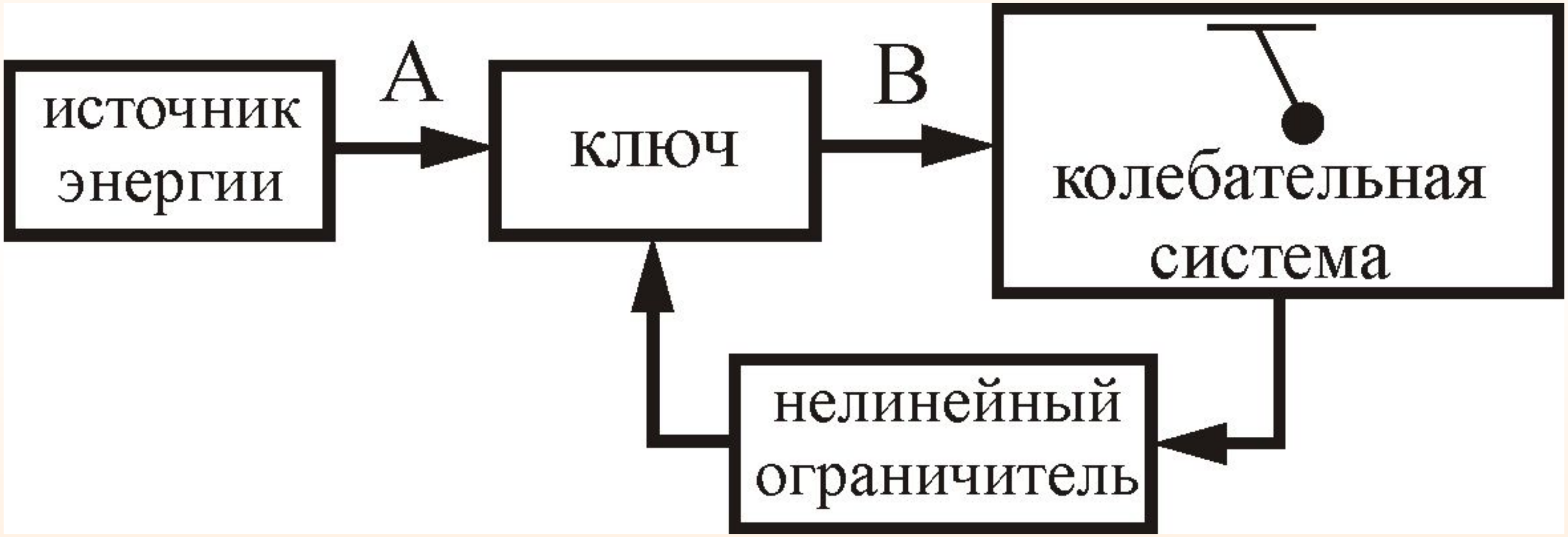
С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при

$$\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

Автоколебания

Классическим примером *автоколебательной системы* служат *механические часы* с маятником и гирями.

Принцип работы всех автоколебательных систем



Периодическим поступлением энергии в колебательную систему от источника энергии по каналу AB управляет сама колебательная система посредством обратной связи.