

ЛЕКЦИЯ 8

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

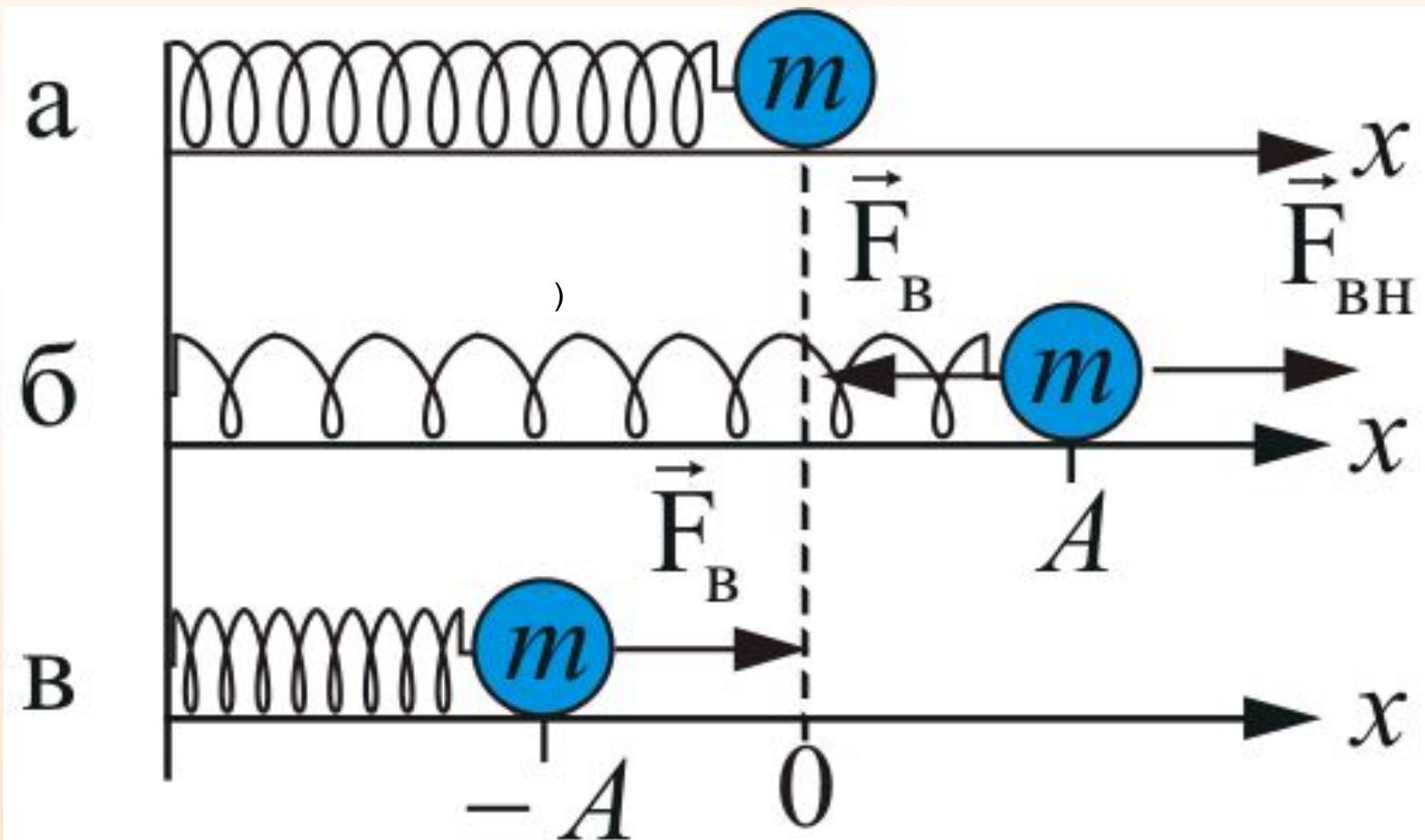
Виды и признаки колебаний

Колебания делятся на механические и электромагнитные (электромеханические комбинации)

Для колебаний характерно превращение одного вида энергии в другую – кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т.д.

Колебательным движением (или просто колебанием) называются процессы, повторяющиеся во времени.

Колебательное движение является **периодическим**.
Простейшим примером периодического движения служат *колебания груза на конце пружины*.



Три признака колебательного движения:

- **повторяемость (периодичность)** – движение по одной и той же траектории туда и обратно;
- **ограниченность** пределами крайних положений;
- **действие силы**, описываемой функцией $F = -kx$.

Колебания называются **периодическими**, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, **повторяются** через равные промежутки времени.

- **Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые гармонические колебания.**

- Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например, $F = - kx$), совершает **гармонические колебания.**

- Самую такую систему часто называют **гармоническим осциллятором.**

• Различные **периодические процессы** (повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как **наложение гармонических колебаний**.

Периодический процесс можно описать уравнением:

$$f(t) = f(t + nT)$$

Колебания называются гармоническими, если зависимость некоторой величины имеет вид

$$x = A \cos \phi$$

или

$$x = A \sin \phi$$

Параметры гармонических колебаний

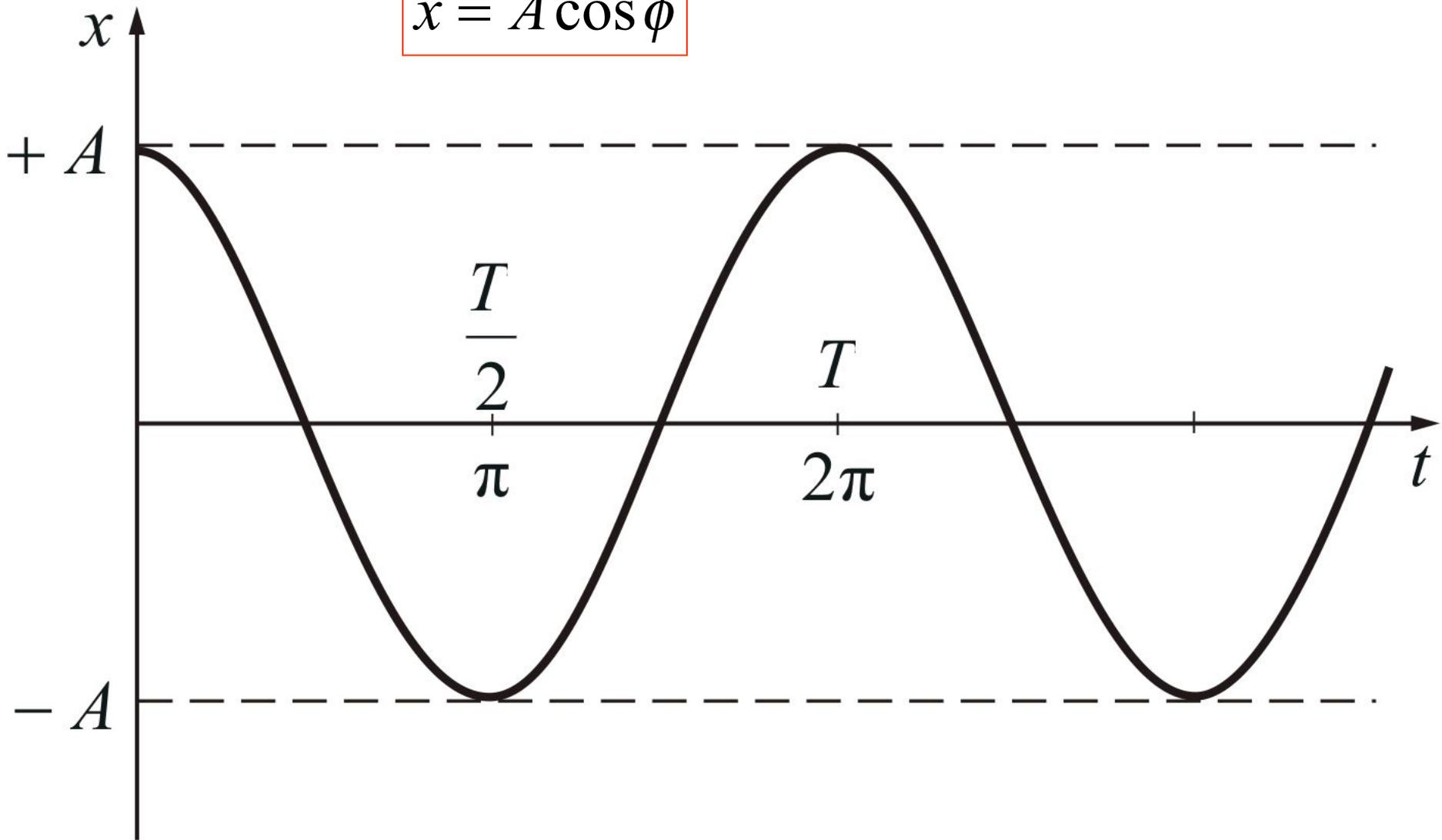
Расстояние груза от положения равновесия до точки, в которой находится груз, называют **смещением** x .

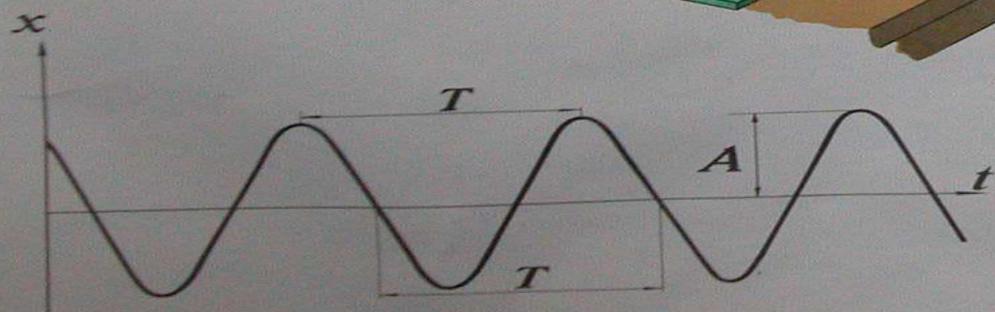
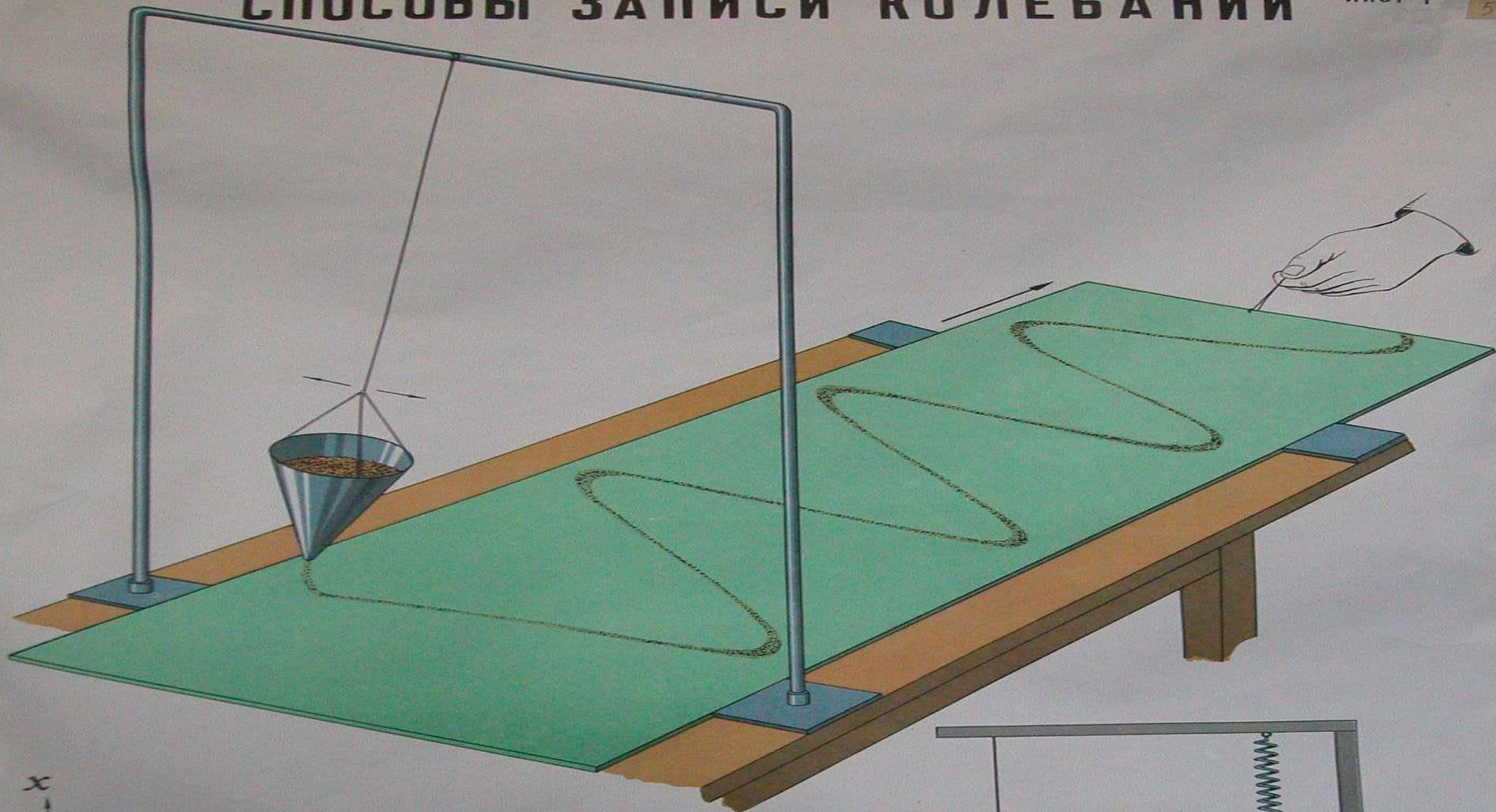
Максимальное смещение – наибольшее расстояние от положения равновесия – называется **амплитудой** и обозначается, буквой A .

$\omega_0 t + \phi_0$ определяет смещение x в данный момент времени t и называется **фазой колебания**.

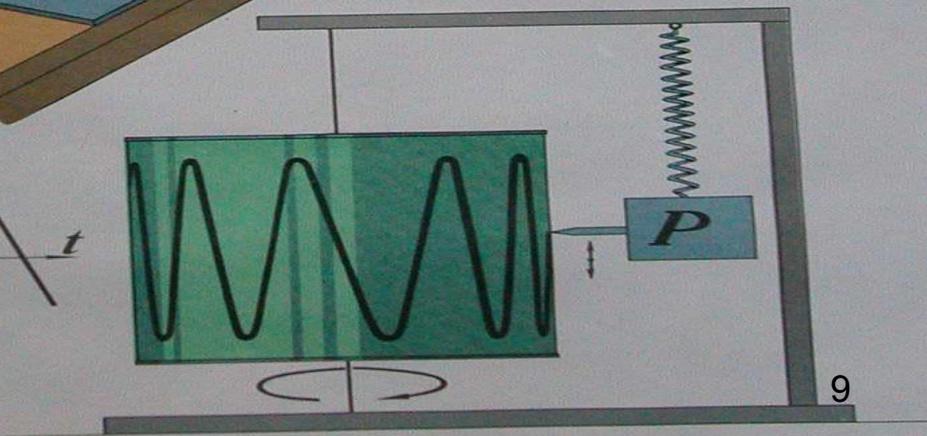
ϕ_0 называется **начальной фазой колебания** при $t=0$

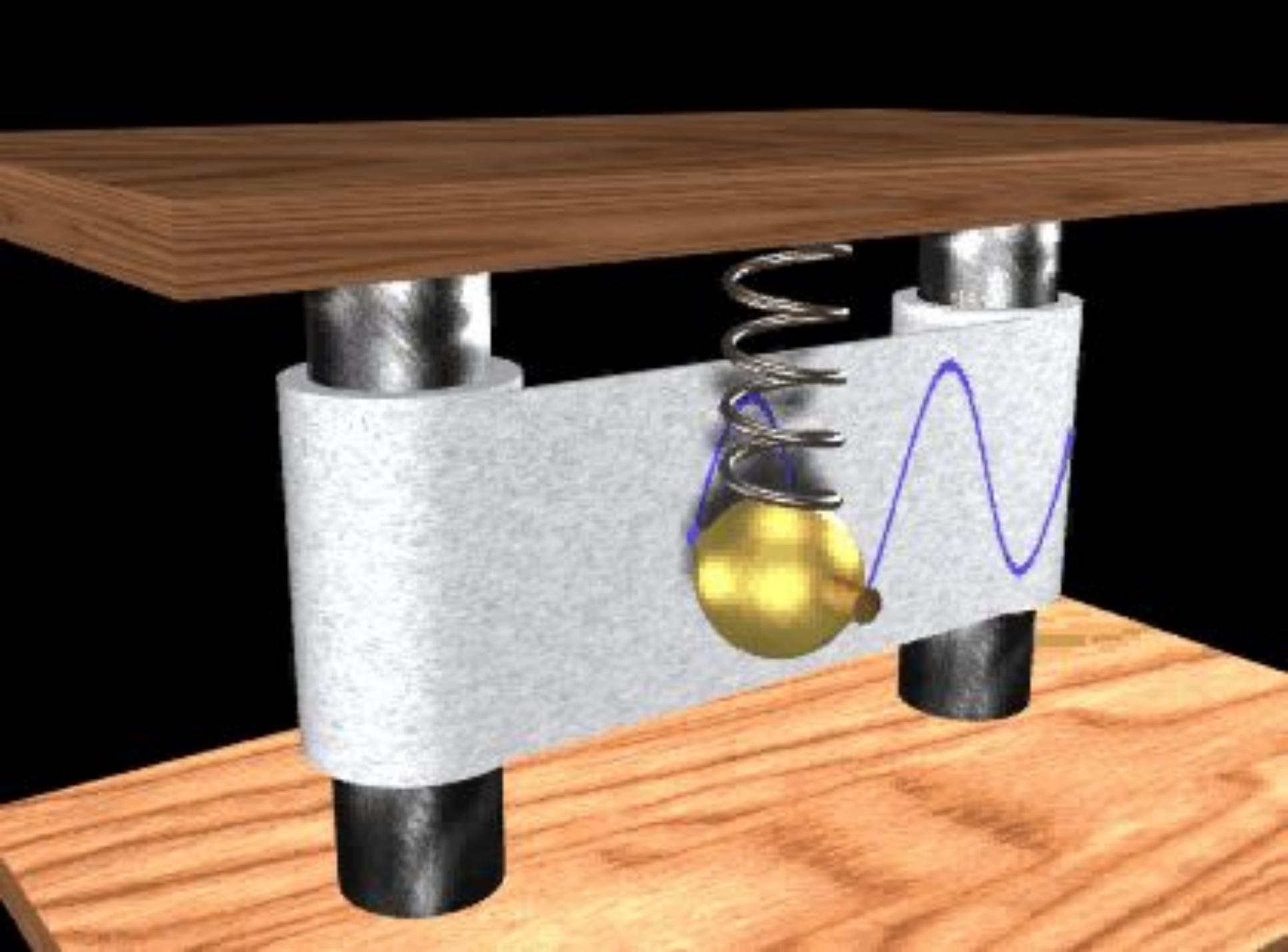
$$x = A \cos \phi$$





$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$





Частота колебаний ν определяется, как число полных колебаний в 1 секунду. Частоту, измеряют в герцах (Гц):
1 Гц = 1 колебание в секунду.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

• **Период колебаний T** – минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}$$

- **ω – циклическая (круговая) частота** – число полных колебаний за 2π секунд.

$$\omega_0 = 2\pi\nu$$

- Фаза φ не влияет на форму кривой $x(t)$, а влияет лишь на ее положение в некоторый произвольный момент времени t .
- Гармонические колебания являются всегда **синусоидальными**.
- Частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды.

Смещение описывается уравнением

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

тогда, по определению:

скорость $v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$

ускорение $a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi)$

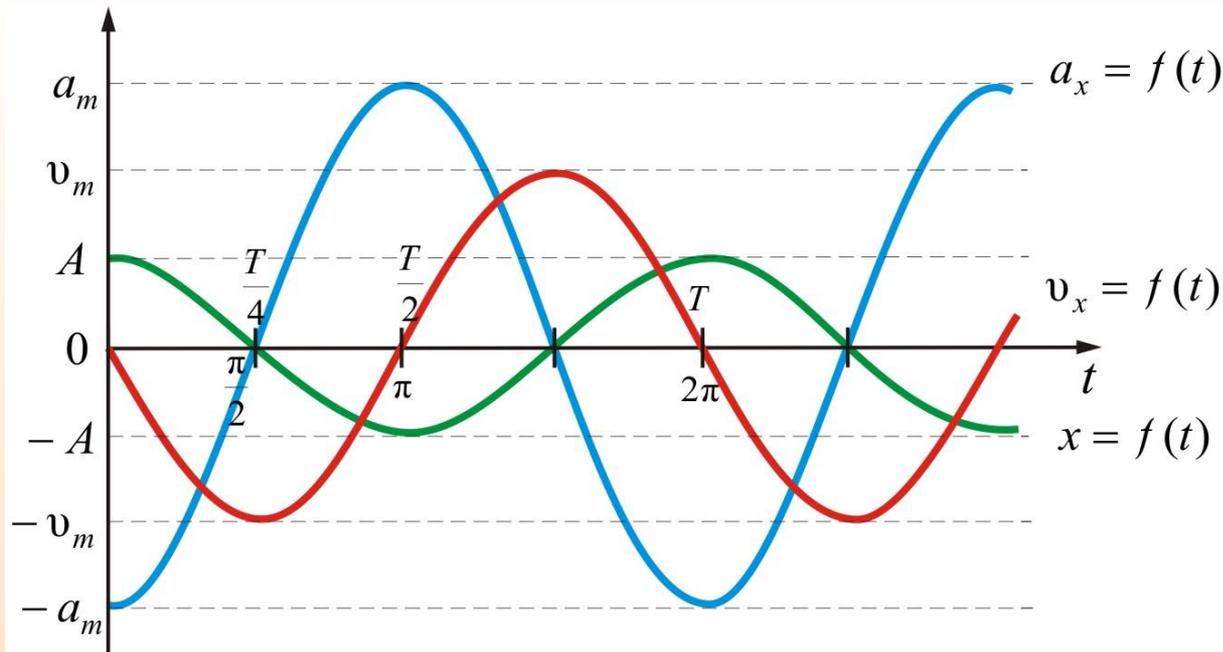
$$\omega_0 A = v_m \quad \text{— амплитуда скорости;}$$

$$\omega_0^2 A = a_m \quad \text{— амплитуда ускорения.}$$

Графики смещения скорости и ускорения

Уравнения колебаний запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega_0 t + \phi) \\ v_x = -v_m \sin(\omega_0 t + \phi) \\ a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$



- **Скорость** колебаний тела максимальна и равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия ($x=0$).
- При максимальном смещении ($x = \pm A$) **скорость равна нулю**.
- **Ускорение** равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

- Исходя из второго закона, $F = ma$ можно записать

$$F_x = -m\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi) = -m\omega_0^2 x$$

$$F_x = -m\omega_0^2 x$$

сила F пропорциональна x и всегда направлена к положению равновесия (поэтому ее и называют **возвращающей силой**).

- Примером сил являются **упругие силы**. Силы же имеющие иную природу называются **квазиупругими**.

Квазиупругая сила

$$F_x = -kx,$$

где k – коэффициент квазиупругой

силы

Получим основное уравнение динамики гармонических колебаний, вызываемых упругими силами:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad , \quad \text{тогда}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

**Основное уравнение
динамики
гармонических
колебаний**

Решение этого уравнения всегда будет выражение

вида

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Круговая частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

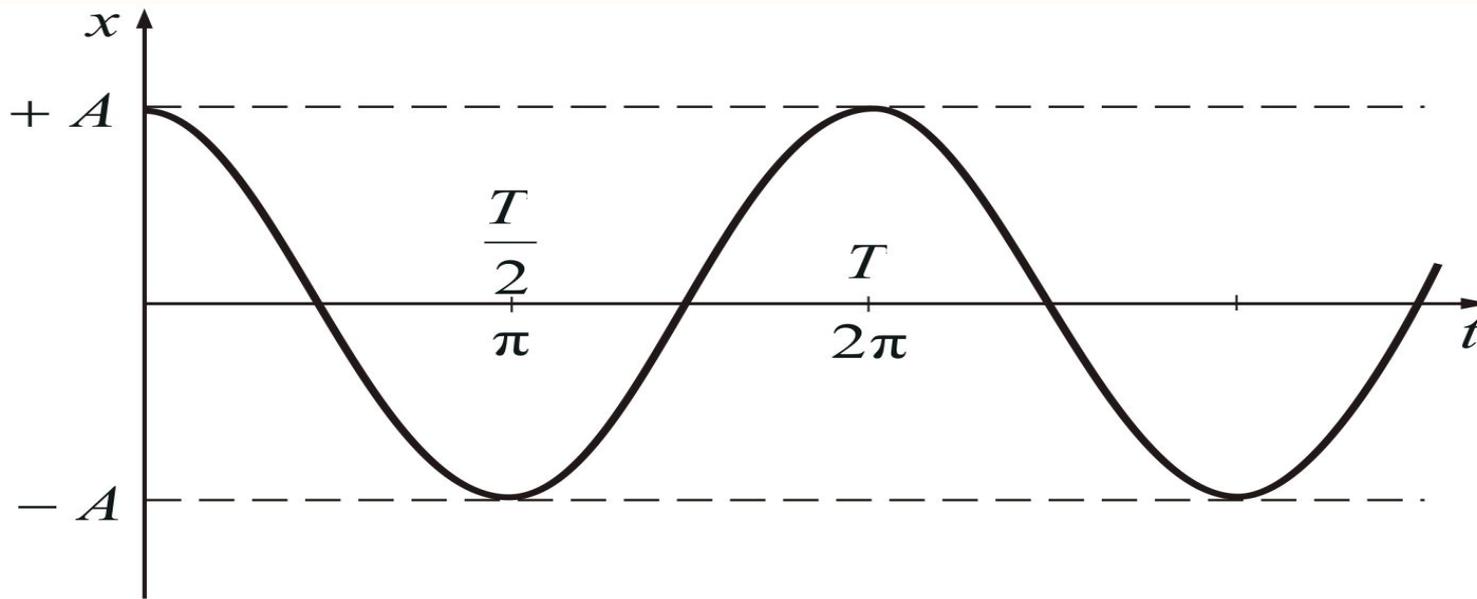
НО

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ тогда}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

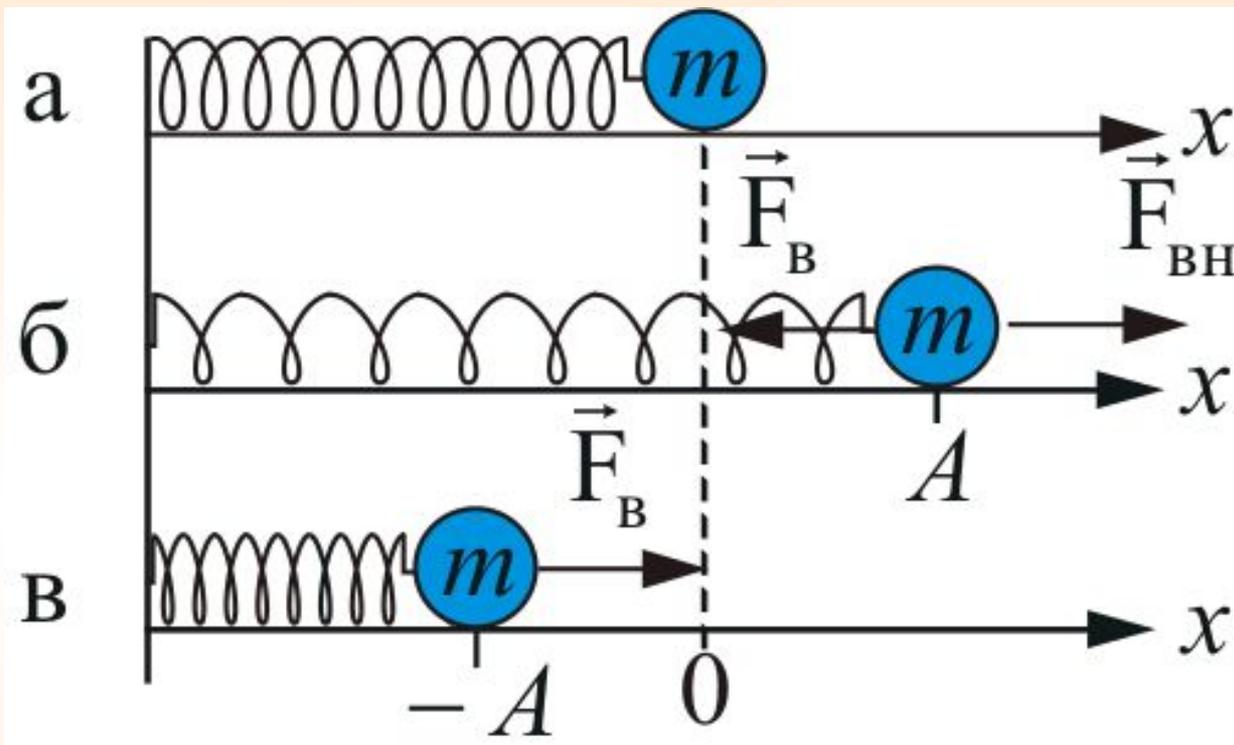
Период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$x = A \cos \phi$$

Энергия гармонических колебаний



Потенциальная энергия тела U , измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила

$$F_x = -kx$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}; \quad dU = -Fdx = kx dx \quad , \text{отсюда} \quad U = k \int_0^x x dx$$

Потенциальная энергия

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

Кинетическая энергия

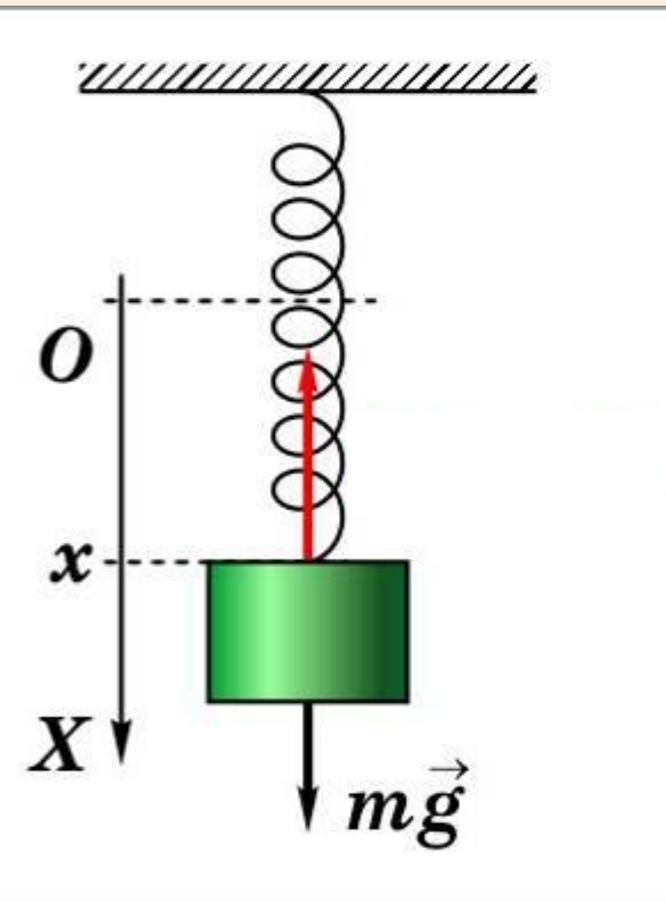
$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

Полная энергия:

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.

Гармонический осциллятор



1. *Пружинный маятник* — это груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью k , совершающий гармонические колебания под действием *упругой силы* $F = -kx$

Из второго закона Ньютона $F = ma$; или $F = -kx$
получим **уравнение движения маятника**:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m} \right) x = 0$$

Решение этого уравнения – гармонические колебания вида:

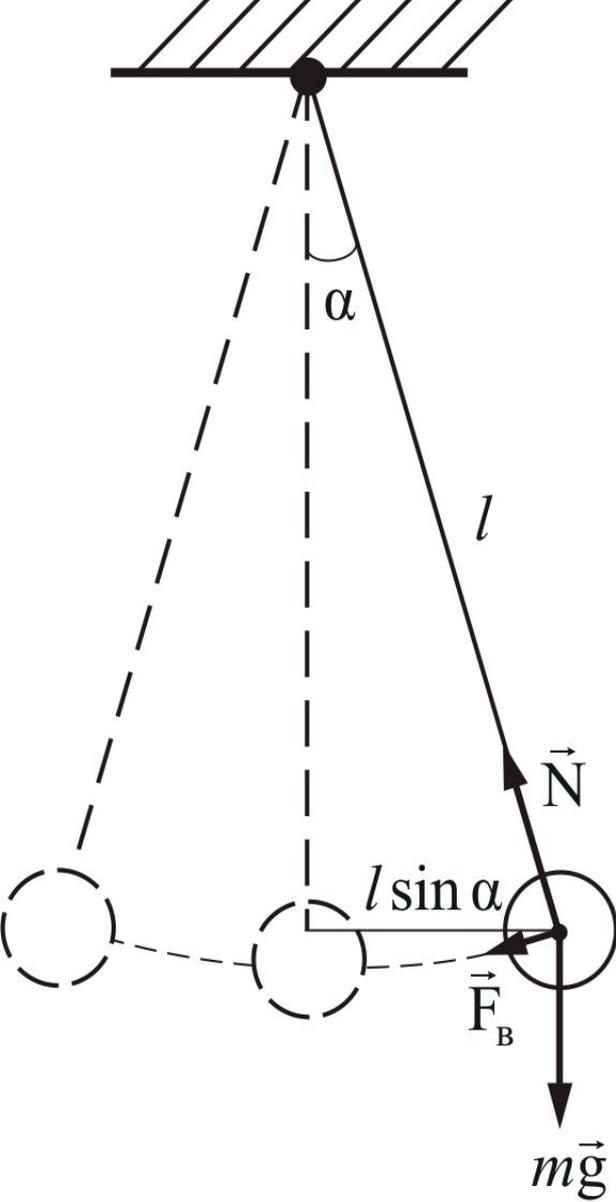
$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

циклическая частота ω

период T

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



2 Математическим маятником — называется идеализированная система, состоящая из невесомой, нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (шарик на длинной тонкой нити).

- При отклонении маятника от вертикали, возникает **вращающий момент** $M = -mgl \sin \alpha$

- Уравнение динамики вращательного движения для маятника: $M = J\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$$

-угловое ускорение

Момент инерции маятника $J = ml^2$

Тогда $ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha$, или $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0$

$\sin \alpha \approx \alpha$. Обозначим : $\frac{g}{l} = \omega^2$

Уравнение движения маятника $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0$

- Это уравнение динамики гармонических колебаний.

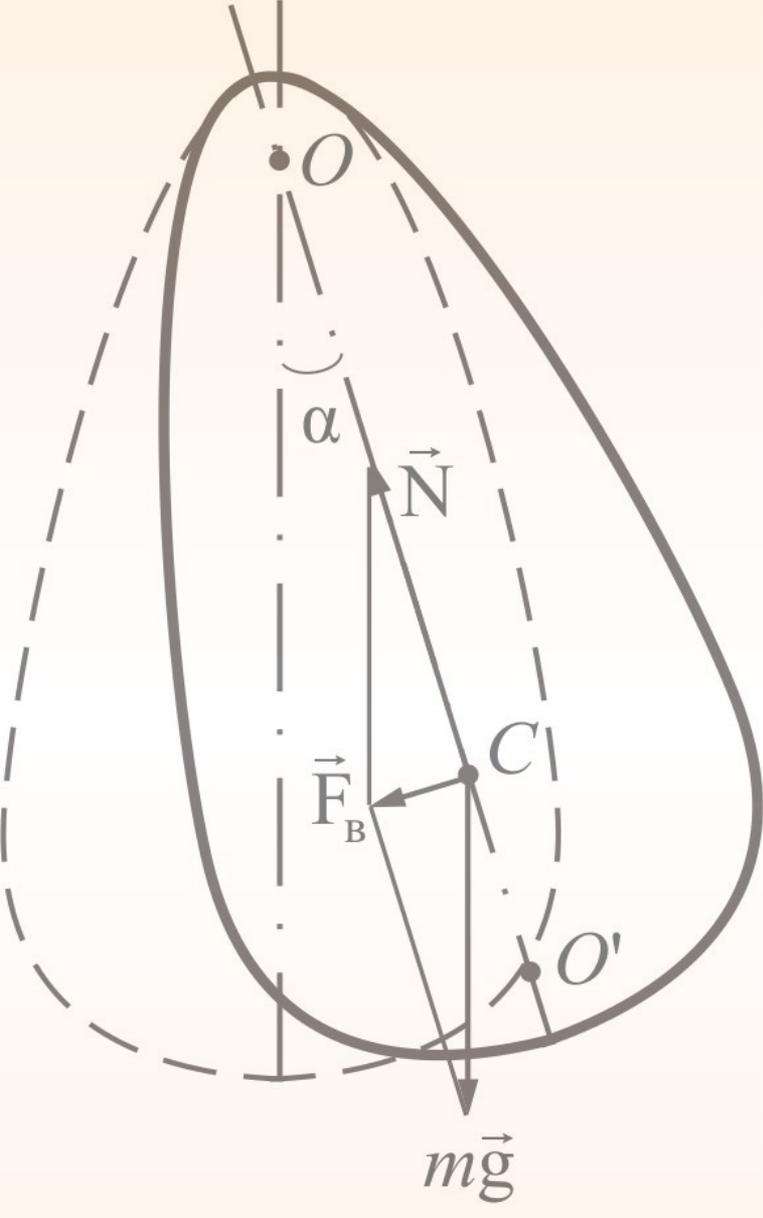
Решение уравнения имеет вид:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

T – зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения.



3 Физический маятник – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса O , не совпадающую с центром масс C

Вращающий момент маятника:

$$M = -mgl \sin \alpha$$

l – расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника $O-C$.

Обозначим:

J – момент инерции маятника относительно точки подвеса O .

$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ угловое ускорение, тогда

$$\sin \alpha = \alpha$$

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha$$

Уравнение динамики вращательного движения

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0$$

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

$$l_{\text{и.д.}} = \frac{J}{ml}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{и.д.}}}{g}}$$

$l_{\text{пр.}}$ – **приведенная** длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

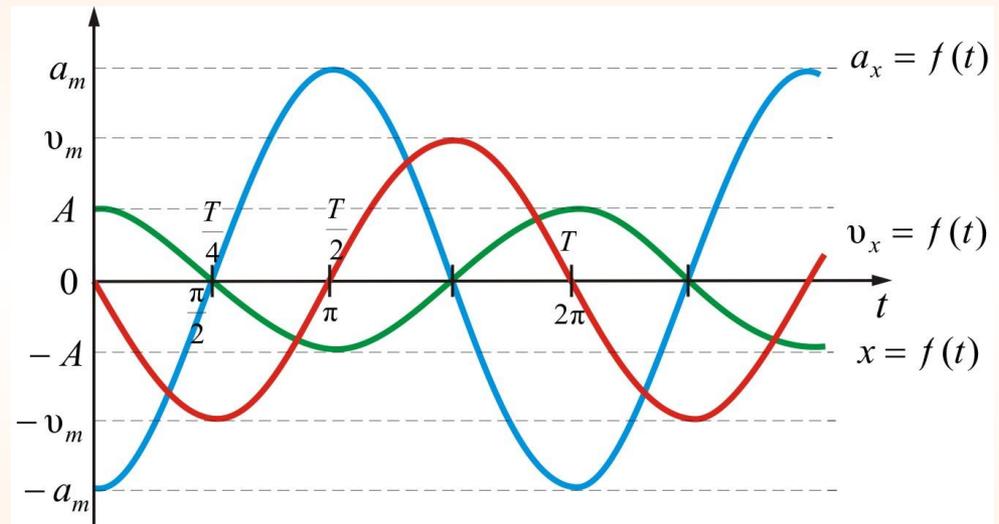
Способы представления гармонических колебаний

Гармонические колебания можно представить несколькими способами:

• **аналитический:**

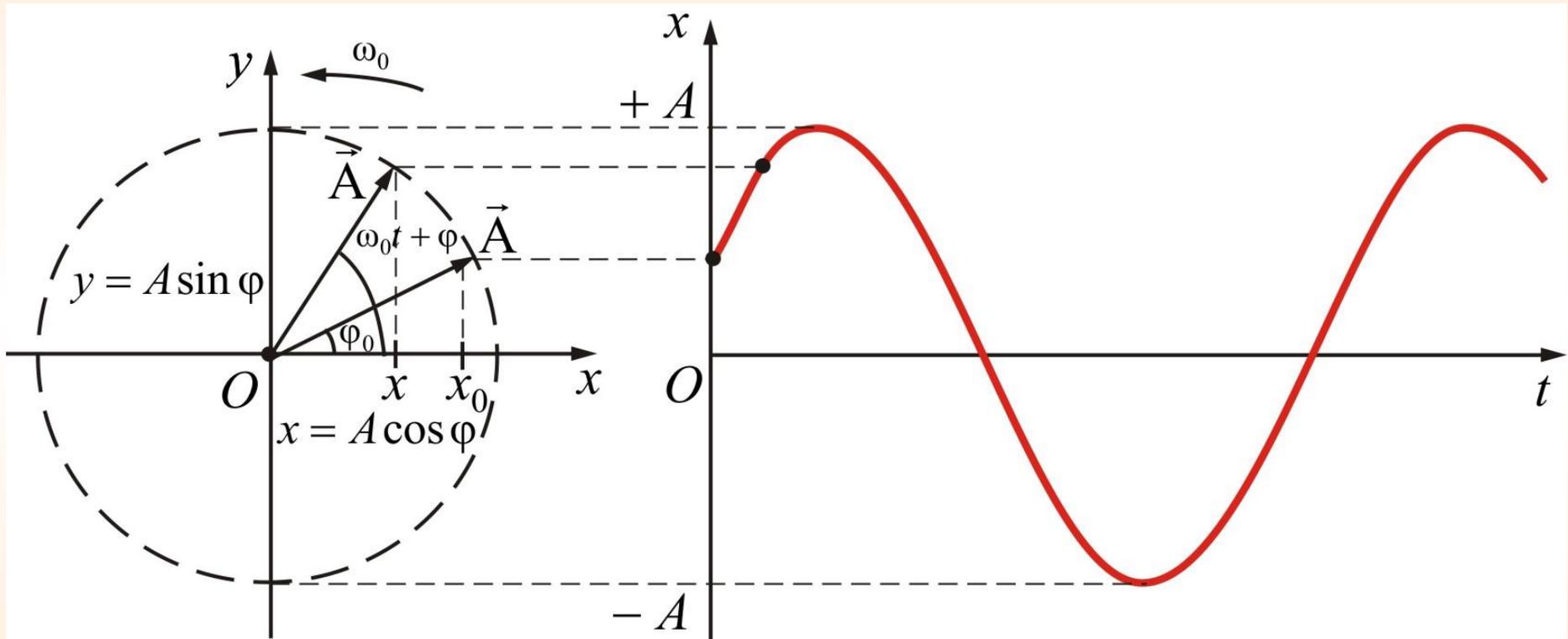
$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

• **графический;**



• **геометрический,** с помощью вектора амплитуды (метод векторных диаграмм).

Геометрический способ, с помощью вектора амплитуды (*метод векторных диаграмм*).



$$x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

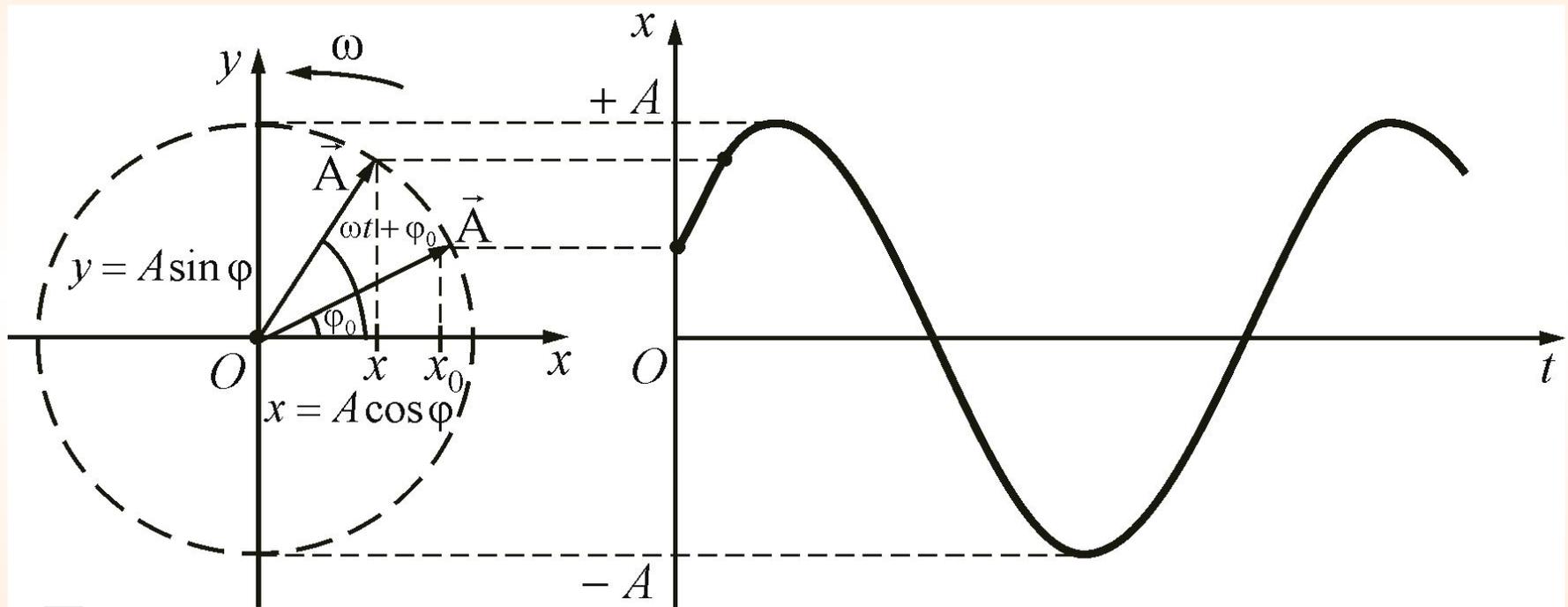
$$x_0 = A \cos \phi_0$$

Ox – опорная прямая

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$x_0 = A \cos \phi_0$$

Вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание.

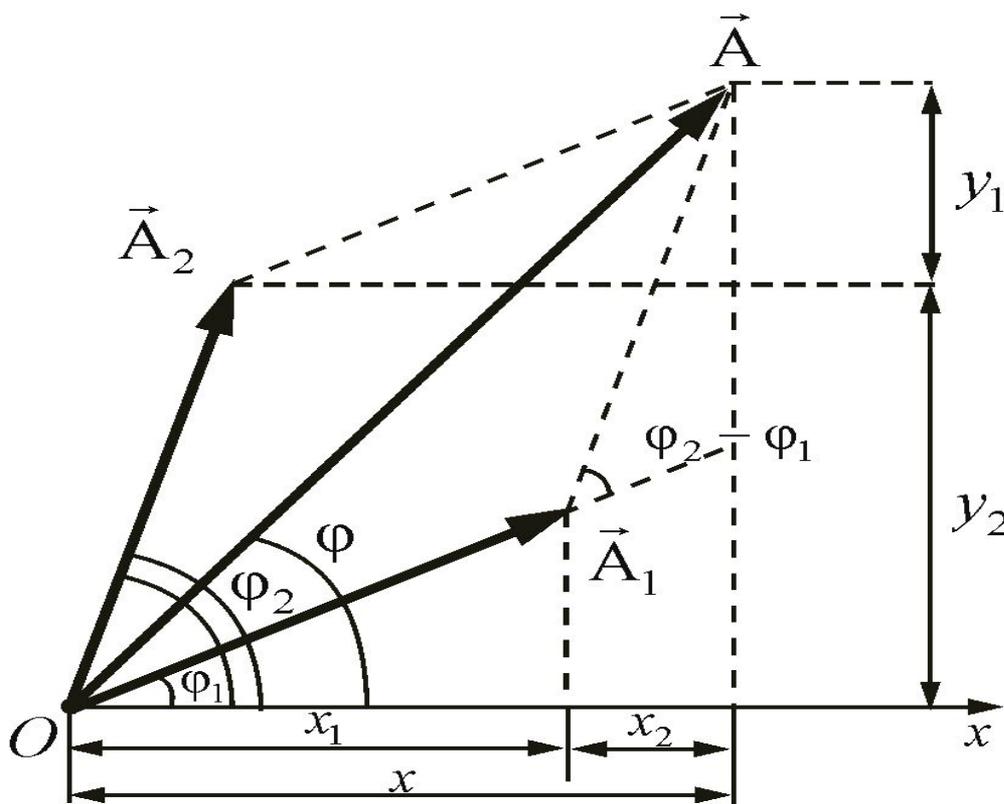


Проекция кругового движения на ось y , также совершает гармоническое колебание

$$y = A \sin(\omega t + \phi)$$

Пусть точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$



Такие два колебания называются когерентными, их разность фаз не зависит от времени:

$$\phi_2 - \phi_1 = \text{const}$$

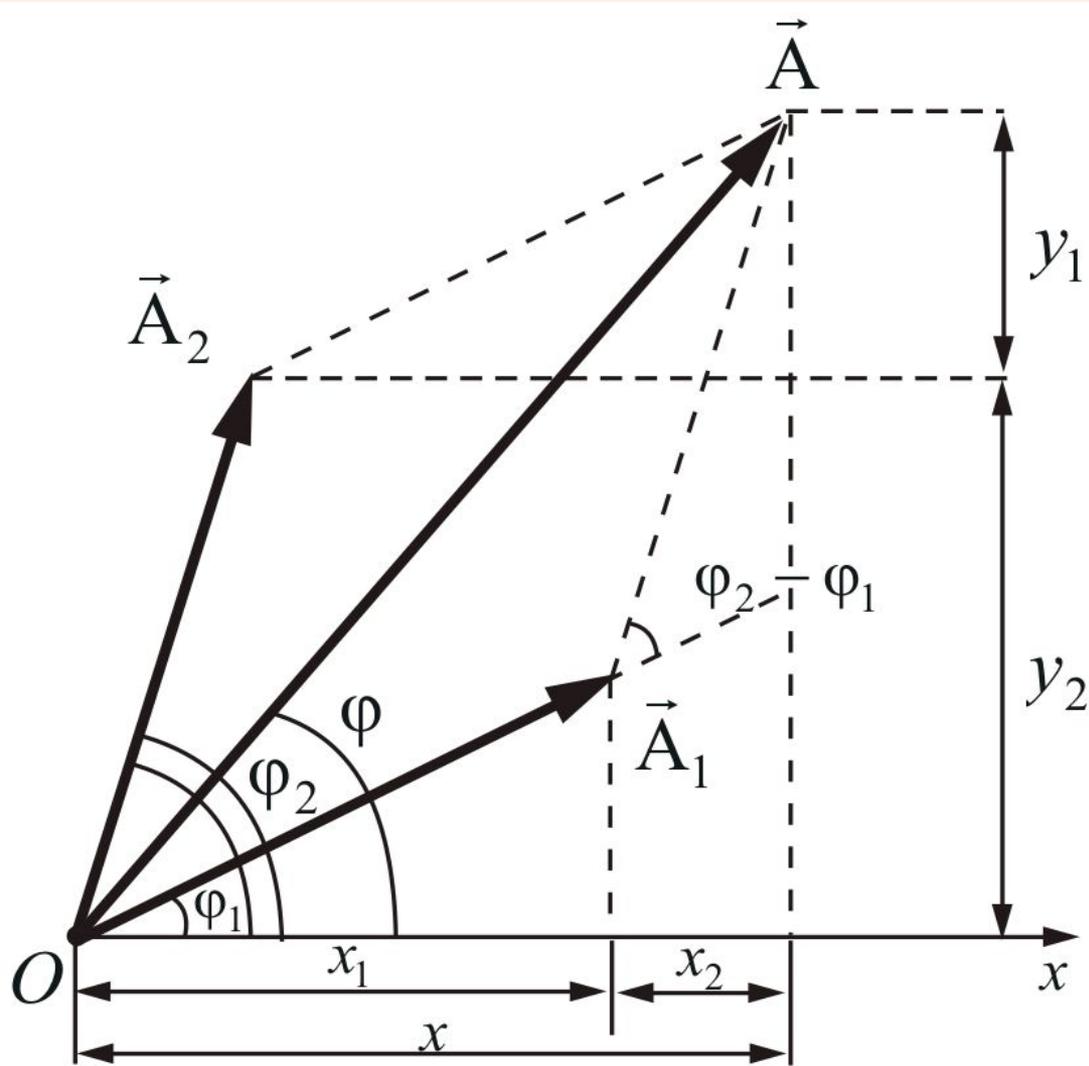
$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

A_1 – амплитуда 1-го колебания
 ϕ_1 – фаза 1-го колебания.

Ox – опорная прямая

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$



Результирующее колебание, тоже гармоническое, с частотой ω :

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

По правилу сложения векторов найдем суммарную амплитуду, результирующего колебания:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

Начальная фаза определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

Амплитуда **A** результирующего колебания зависит от разности начальных фаз

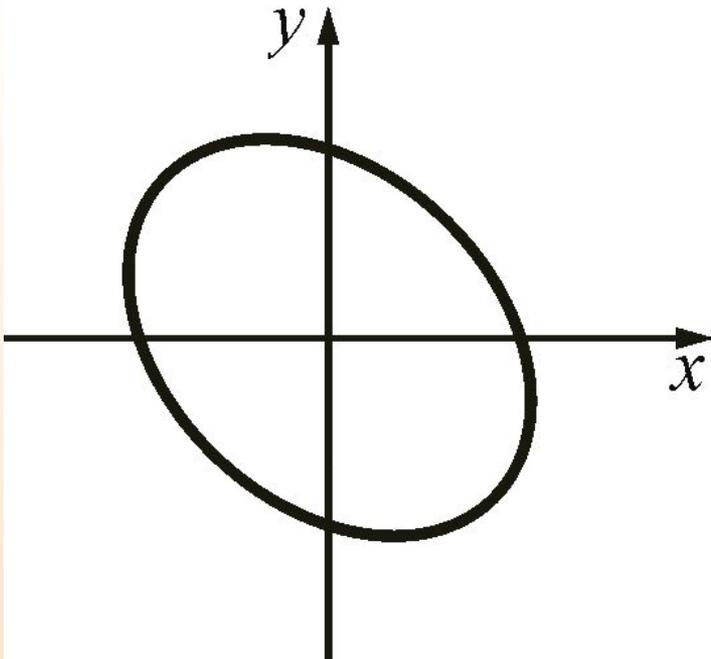
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) \quad y = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\phi_2 - \phi_1) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1)$$



В результате получили уравнение эллипса с произвольно расположенными осями

Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний уменьшается.

Сила трения (или сопротивления)

$$\vec{F}_{\text{отт}} = -r\vec{v}$$

где r – коэффициент сопротивления,
 \vec{v} – скорость движения

Второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси x

$$ma_x = -kx - r v_x$$

где kx – возвращающая сила, $r v_x$ – сила трения.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Введем обозначения $\frac{r}{2m} = \beta$ $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Решение уравнения имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)$$

Найдем частоту колебаний ω . ($\omega \neq \omega_0$)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \beta \leq \omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \beta = \frac{r}{2m} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

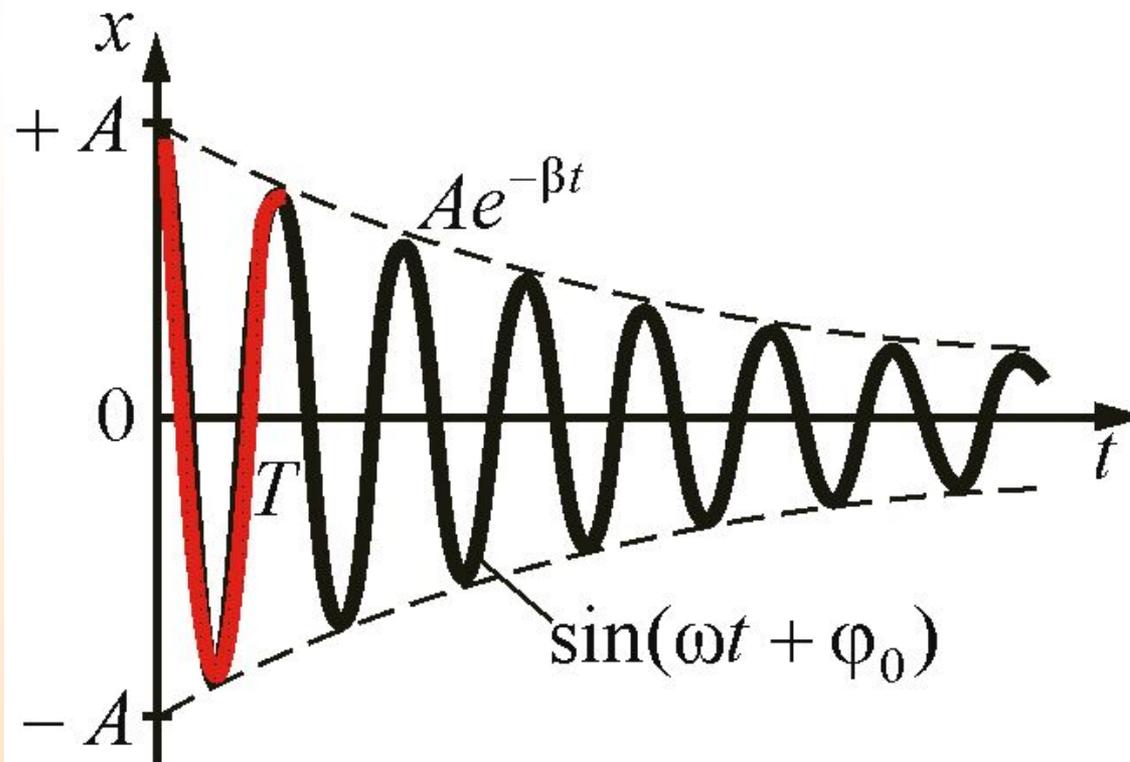
Условный период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

где β – коэффициент затухания



Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T .

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

$$\chi = \beta T$$

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1, \quad \beta\tau = 1;$$

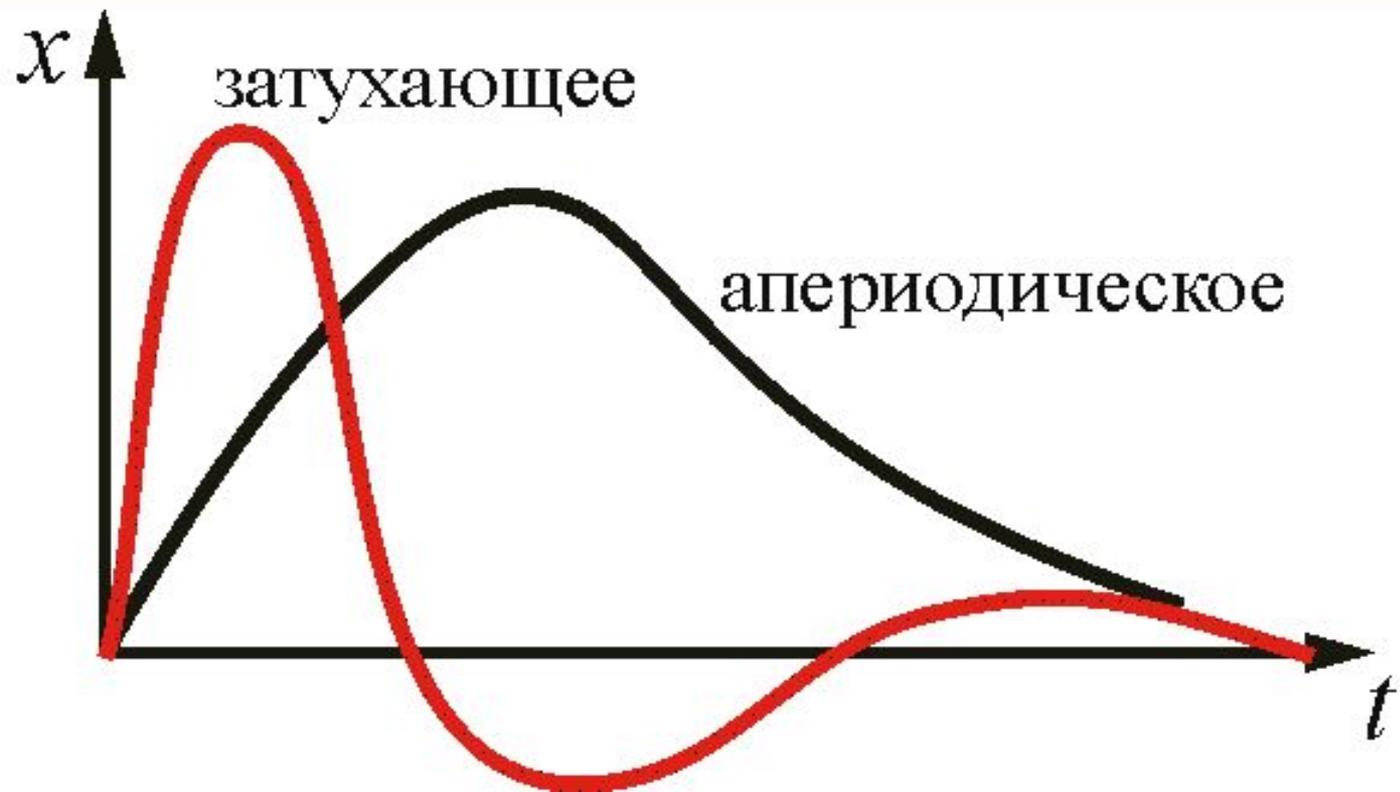
$$\beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, *коэффициент затухания* β – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого *амплитуда уменьшается в e раз*, τ – *время релаксации*.

Когда сопротивление становится равным критическому

$$r = r_{\text{кр}}, \quad \beta = \omega_0,$$

то круговая частота обращается в нуль, $\omega = 0$ $T \rightarrow \infty$
колебания прекращаются. Такой процесс называется
апериодическим:



$$r = r_{\text{êđ}}$$

$$\beta = \omega_0$$

$$\omega = 0$$

$$T \rightarrow \infty$$

Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую кроме *упругой силы* ($-kx$) и *сил сопротивления* ($-rv$) действует добавочная *периодическая сила* F – *вынуждающая сила*:

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x$$

– *основное уравнение колебательного процесса*, при вынужденных колебаниях

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_x$$

$$F_x = F_0 \cos \omega t.$$

Уравнение установившихся вынужденных колебаний

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

Задача найти амплитуду A и разность фаз ϕ между смещением вынужденных колебаний и вынуждающей силой.

Введем обозначения:

$$A_1 = \omega^2 \text{ — амплитуда ускорения;}$$

$$A_2 = 2\beta\omega \text{ — амплитуда скорости;}$$

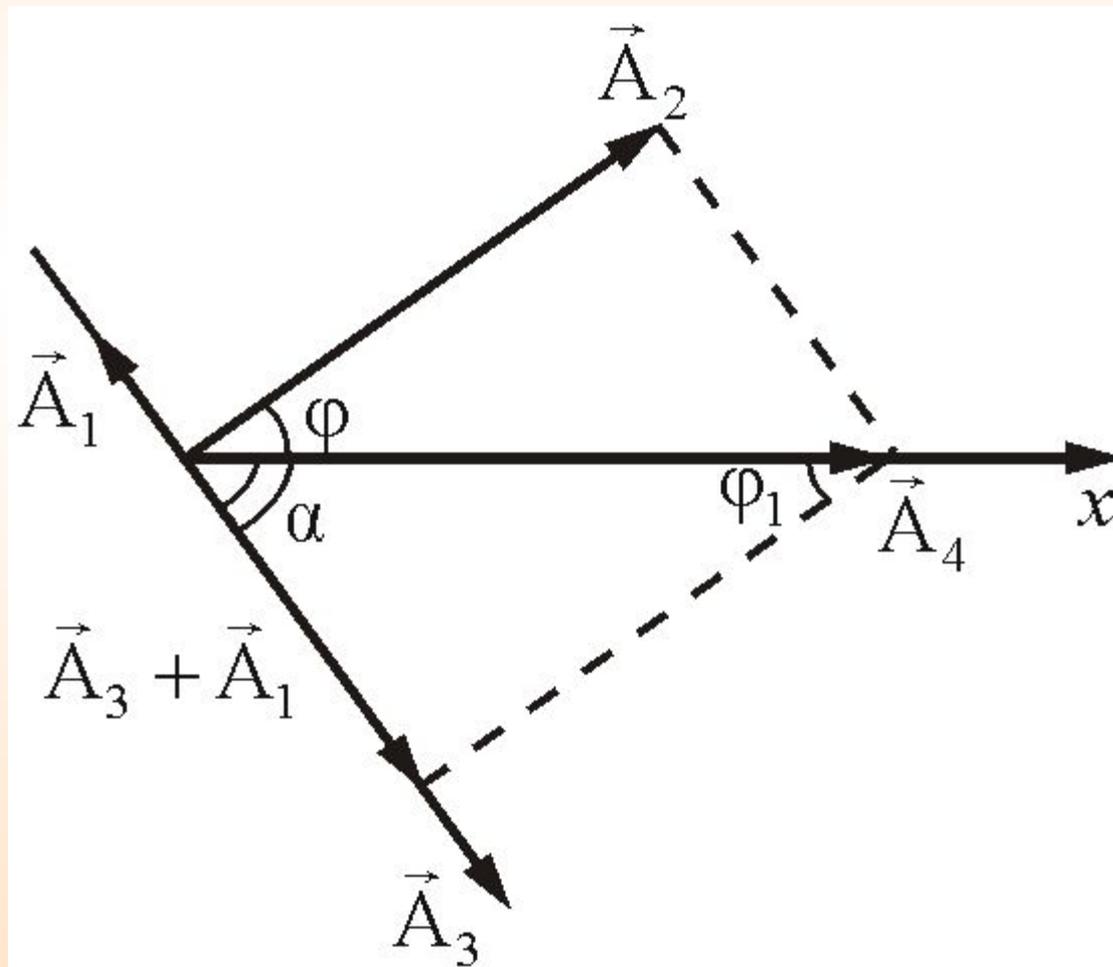
$$A_3 = \omega_0^2 \text{ — амплитуда смещения;}$$

$$A_4 = F_0 / mA \text{ — амплитуда вынуждающей силы}$$

Вектор амплитуды силы найдем по правилу сложения векторов:

$$\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$$

$$A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2$$



$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

1) $\omega = 0$ (частота вынуждающей силы равна нулю)

$$x = F_0 / m\omega_0^2$$

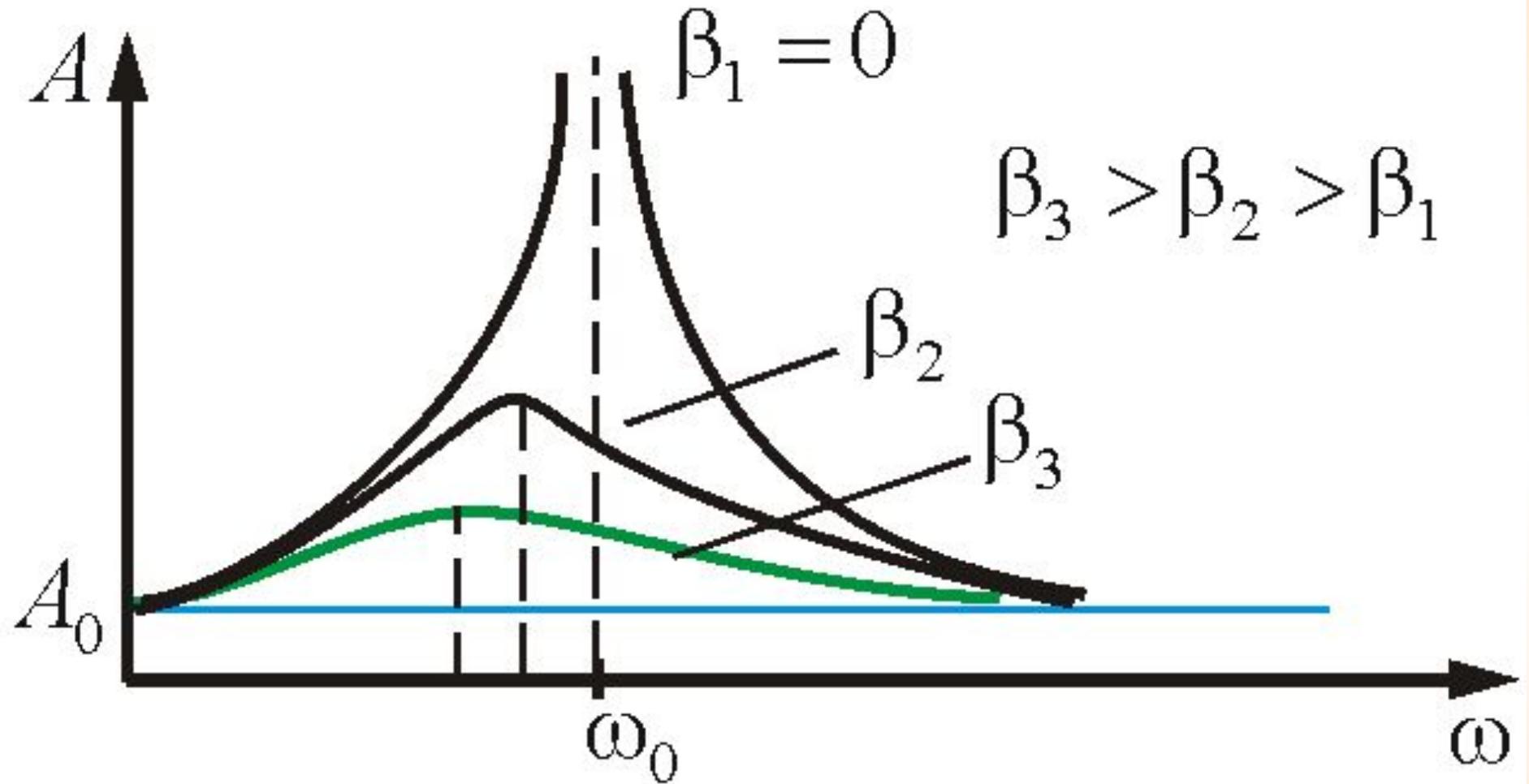
– статическая амплитуда, колебания не совершаются.

2) $\beta = 0$ (затухания нет). С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$), амплитуда растет и при $\omega = \omega_0$, амплитуда резко возрастает ($A \rightarrow \infty$). Это явление называется

– *резонанс*. При дальнейшем увеличении ($\omega > \omega_0$) амплитуда опять уменьшается.

3) $\beta \neq 0$. $\omega_{\text{д\`а\`с}} \equiv \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ **резонансная частота**

$\omega = \omega_0$ $\dot{A} \rightarrow \infty$ - явление резонанса



$$\omega_{\text{дв}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

— резонансная частота

$$\omega_{\text{д\`а\`с}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

– резонансная частота.

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к $\omega_{\text{д\`а\`с}}$ называется резонансом.

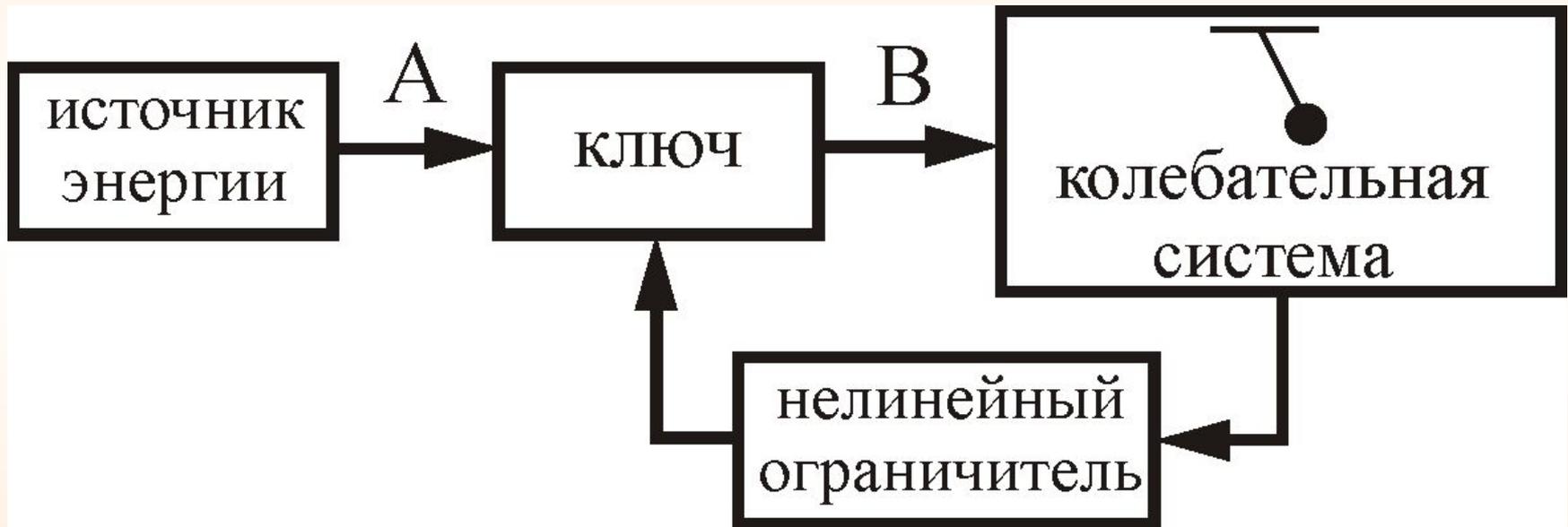
С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при

$$\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

Автоколебания

Классическим примером *автоколебательной системы* служат *механические часы* с маятником и гирями.

Принцип работы всех автоколебательных систем



Периодическим поступлением энергии в колебательную систему от источника энергии по каналу АВ управляет сама колебательная система посредством обратной связи.