

Кривые второго порядка.

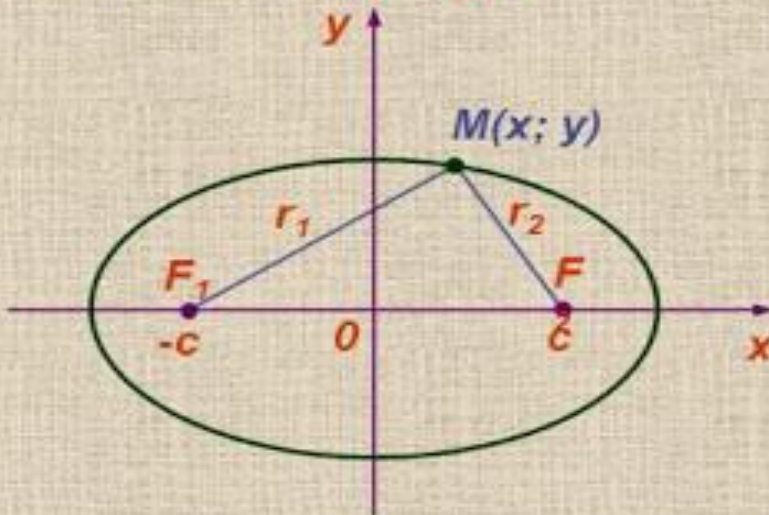


Уравнение эллипса.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$.

Зададим систему координат и начало координат выберем в середине отрезка $[F_1F_2]$



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Эллипс

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2} \Rightarrow$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} - \cancel{x^2} - 2xc - \cancel{c^2} \Rightarrow$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 - xc)^2 : 4 \Rightarrow$$

$$a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2xc} + x^2c^2 \Rightarrow$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$a^2 - c^2 = b^2 \Leftrightarrow x^2(b^2) + a^2y^2 = a^2(b^2) \div \text{на } a^2b^2 \text{ получаем } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a - большая полуось,
 b -малая полуось, $a > b$

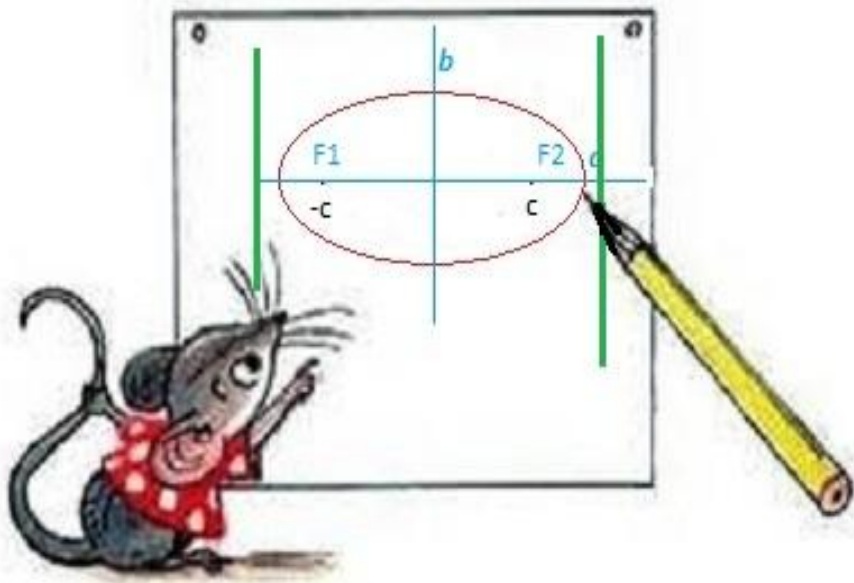
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$2c$ -расстояние между
фокусами

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$

$$0 \leq \varepsilon < 1$$

директрисы $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$



Примеры

Пример

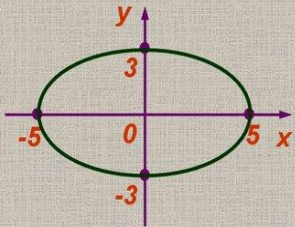
Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат в точках $F_1(-4; 0)$ $F_2(4; 0)$, а эксцентриситет равен $0,8$.

$$c = 4 \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0.8 \Rightarrow a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{4}{0.8} = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \quad b = 3$$

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



СОСТАВИТЬ УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПСА,
проходящего через $A(2; \sqrt{3})$ и $B(0; 2)$

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Точки А и В лежат на эллипсе, значит, их координаты должны удовлетворять уравнению эллипса.

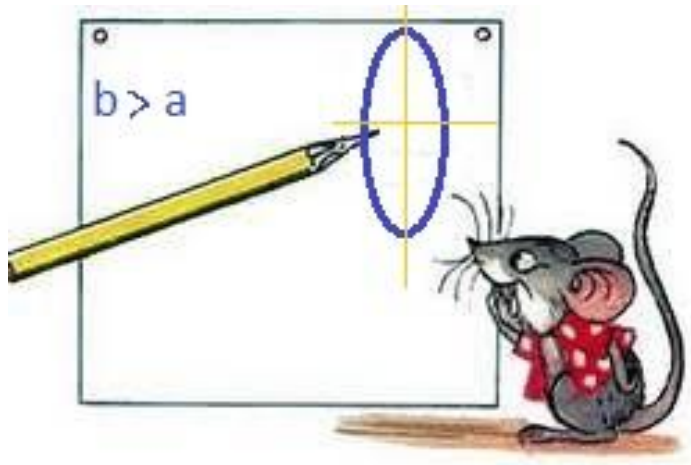
$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{0^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1$$

Решаем систему

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \\ 0 + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b^2 + 3a^2 = a^2b^2 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

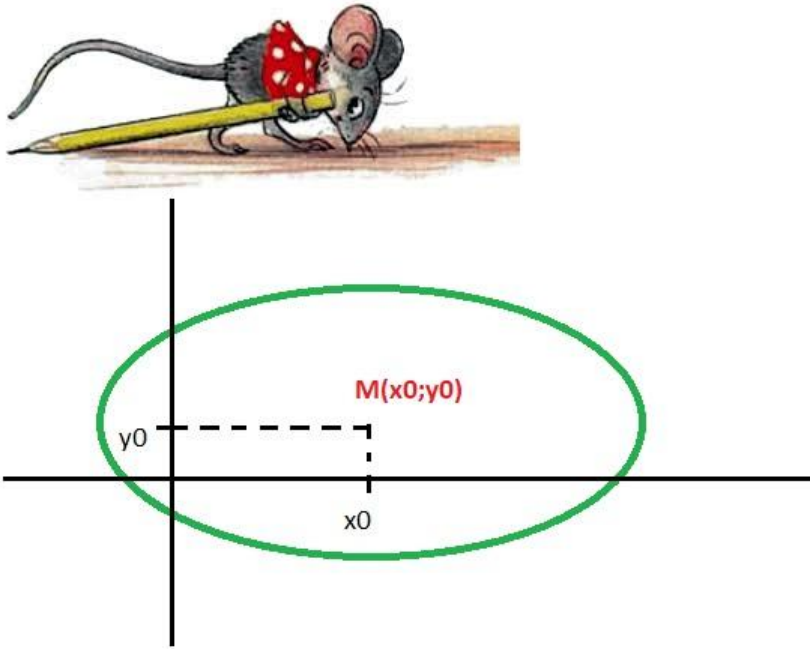
Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

А как мы запишем уравнение вот такого эллипса
и его характеристики?



Уравнение эллипса в центром-НЕ в начале координат.

Выделение полного квадрата.



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Пример.

$$x^2 - 2x + 2y^2 - 4y - 13 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + 2y^2 - 4y + 2 - 2 - 13 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + 2y^2 - 4y + 2 = 16$$

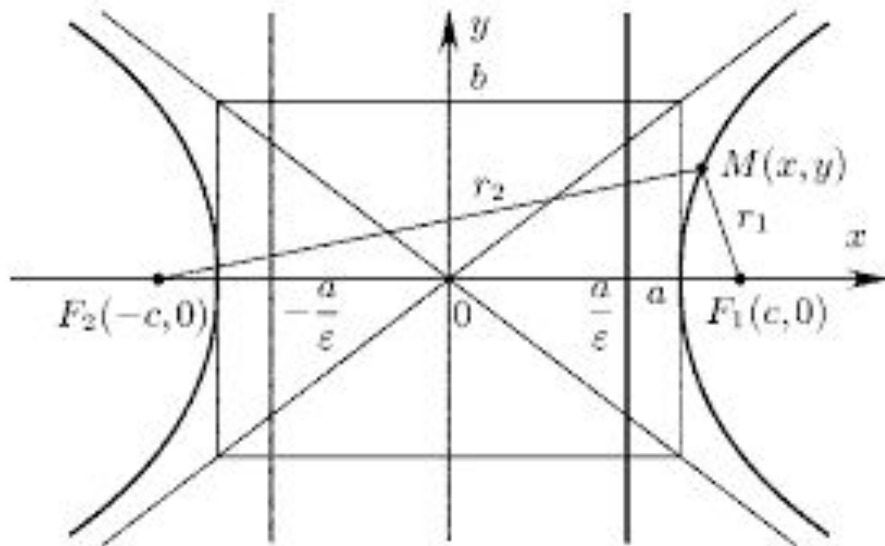
$$(x - 1)^2 + 2(y - 1)^2 = 16$$

$$\frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{8} = 1$$

$$a=4 \quad b=2\sqrt{2}$$

центр эллипса (1;1)

Уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс.

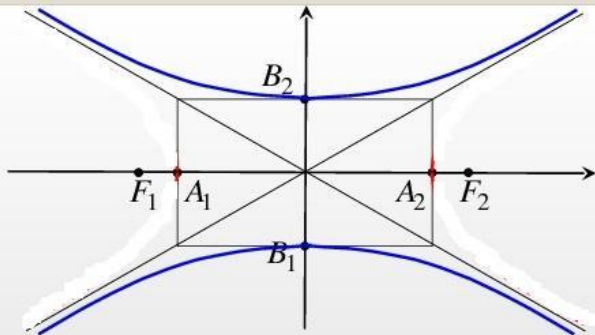


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Гипербола может быть определена как геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, постоянна.

$$r_1 - r_2 = \pm 2a$$

Другие варианты канонического уравнения гиперболы.



1) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гипербола, но фокусы лежат на оси Ox ,
ветви направлены вверх и вниз.

2) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ – гипербола с центром,
смещённым в точку $(x_0; y_0)$.

Самостоятельно:

- Записать связь между a , b и c для гипербол, c – фокусами на Ox и Oy .
- Записать выражение для эксцентриситета.
- Записать уравнения директрис и асимптот.

Каноническое уравнение параболы.

- **Параболой** называется множество всех точек плоскости, таких, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от точки, называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус. где число p , называемое параметром **параболы**, есть расстояние от фокуса до директрисы.

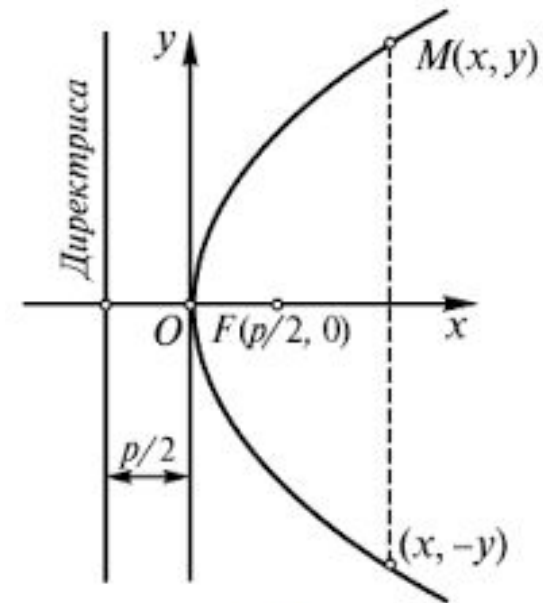


Рис.1

$$y^2 = 2px$$

