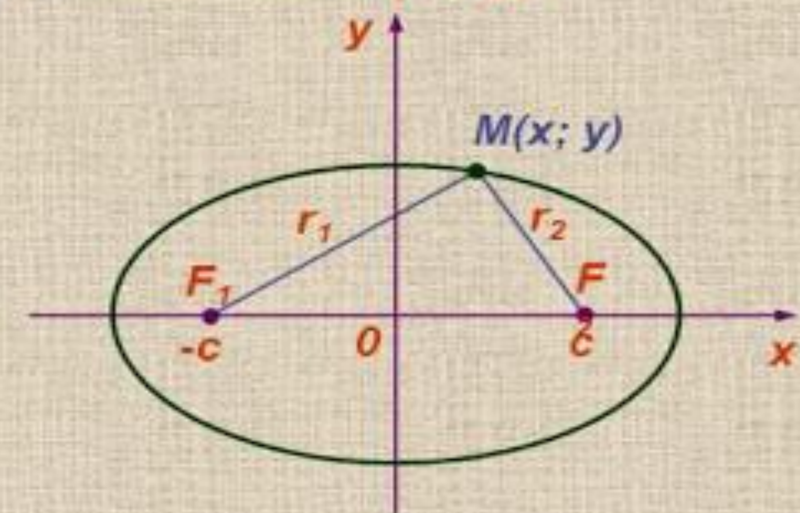
Кривые второго порядка.

Уравнение эллипса.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$.

Зададим систему координат и начало координат выберем в середине отрезка $[F_1F_2]$



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$F_1(-c;0); \quad F_2(c;0)$$

$$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Эллипс

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$(x+c)^2+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+\cancel{y^2} \quad \Rightarrow$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2+\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}-\cancel{x^2}-2xc-\cancel{c^2} \quad \Rightarrow$$

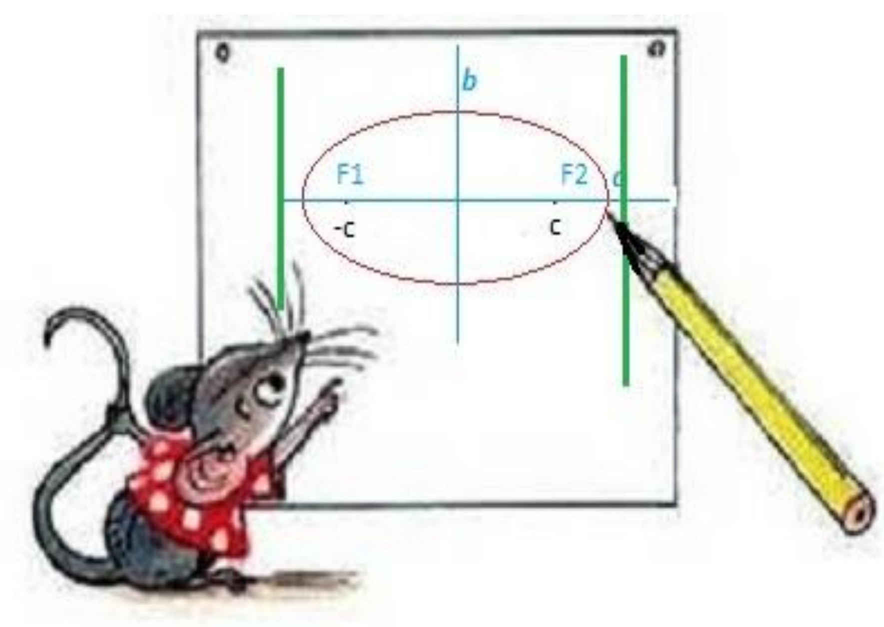
$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=(a^2-xc)^2 \quad :4 \quad \Rightarrow$$

$$a^2x^2-\cancel{2a^2xc}+a^2c^2+a^2y^2=a^4-\cancel{2a^2xc}+x^2c^2 \quad \Rightarrow$$

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \leftrightarrow x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$a^2-c^2=b^2 \leftrightarrow x^2(b^2)+a^2y^2=a^2(b^2)$ $\div$ на a^2b^2 получаем $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

Каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



a- большая полуось,

b-малая полуось,$a > b$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}$$

2с-расстояние между фокусами

Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{\mathrm{c}}{a}$

$$0 \le \varepsilon < 1$$

директрисы $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$

Примеры

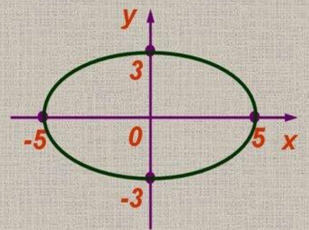
Пример

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат в точках $F_1(-4; 0)$ $F_2(4; 0)$, а эксцентриситет равен 0,8.

$$c = 4 \qquad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0.8 \Rightarrow a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{4}{0.8} = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \qquad b = 3$$

Каноническое уравнение эллипса: $\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$



СОСТАВИТЬ УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПСА, проходящего через $A(2;\sqrt{3})$ и $B(0;2)$

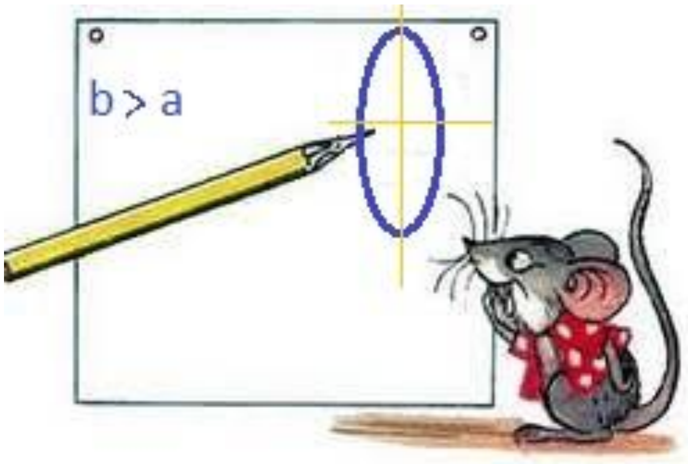
Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Точки A и B лежат на эллипсе, значит, их координаты должны удовлетворять уравнению эллипса

$\frac{2^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$ и $\frac{0^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1$. Решаем систему

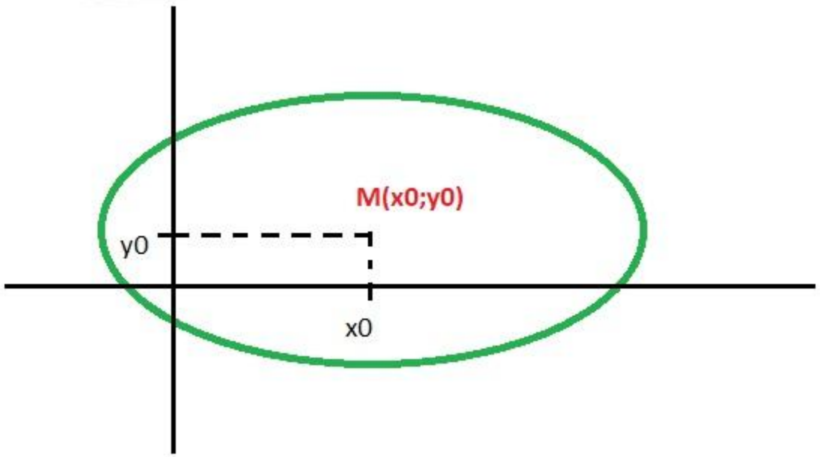
$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \\ 0 + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4b^2 + 3a^2 = a^2b^2 \\ b^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

A как мы запишем уравнение вот такого эллипса и его характеристики?



Уравнение эллипса в центром-НЕ в начале координат. Выделение полного квадрата.



$$\frac{(x-x0)^2}{a^2}+\frac{(y-y0)^2}{b^2}=1$$

- Пример.

$$x^2-2x+2y^2-4y-13=0$$

$$x^2-2x+1-1+2y^2-4y+2-2-13=0$$

$$x^2-2x+1+2y^2-4y+2=16$$

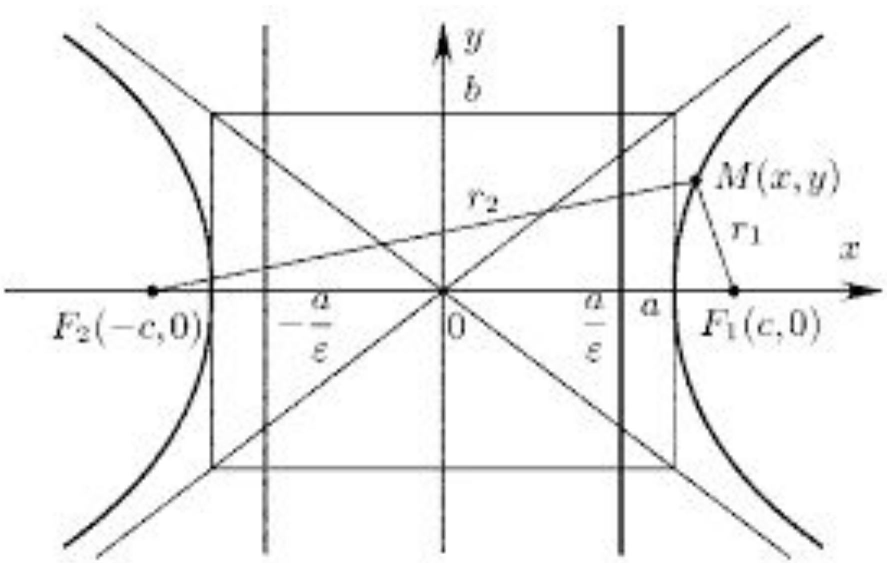
$$(x-1)^2+2(y-1)^2=16$$

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$$

a=4 b=$2\sqrt{2}$

центр эллипса (1;1)

Уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс.

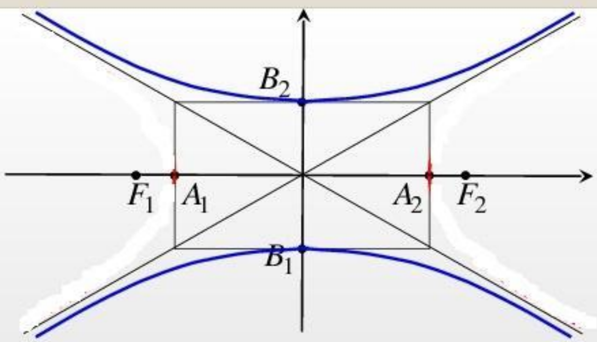


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Гипербола может быть определена как [геометрическое место точек](), абсолютная величина разности расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, постоянна.

$$r_1 - r_2 = \pm 2a$$

Другие варианты канонического уравнения гиперболы.



1) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – **гипербола, но фокусы лежат на оси** Oy, **ветви направлены вверх и вниз.**

2) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – **гипербола с центром, смещённым в точку** $(x_0;y_0)$.

Самостоятельно:

- Записать связь между a , b и c для гипербол , с фокусами на ОХ и ОУ.
- Записать выражение для эксцентриситета.
- Записать уравнения директрис и асимптот.

Каноническое уравнение параболы.

- **Параболой** называется множество всех точек плоскости, таких, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от точки, называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус. где число p, называемое параметром **параболы**, есть расстояние от фокуса до директрисы.

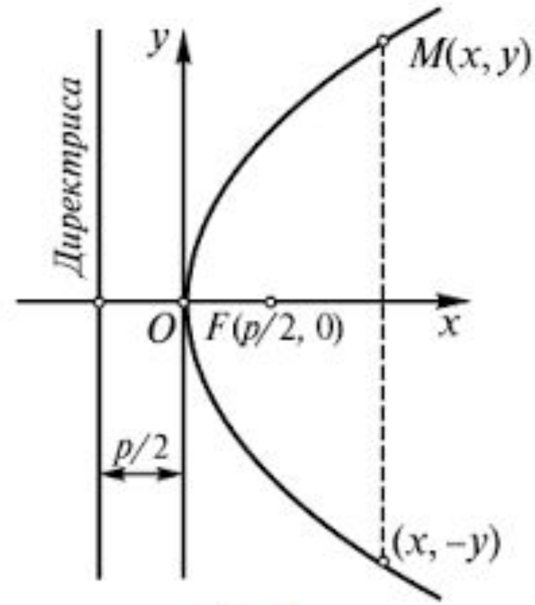


Рис.1

$$y^2 = 2px$$