ЗАДАЧИ

§ 3. Формула полной вероятности

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A), \qquad (*)$$

где $P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$.

Равенство (*) называют *формулой полной вероятности.*

89. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение. Обозначим через A событие — извлечен белый шар. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: B_1 — белых шаров нет, B_2 — один белый шар, B_3 — два белых шара.

Поскольку всего имеется три гипотезы, причем по условию они равновероятны, и сумма вероятностей гипотез равна единице (так как они образуют полную группу событий), то вероятность каждой из гипотез равна 1/3, т. е. $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне не было белых шаров, $P_{B_1}(A) = 1/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне был один белый шар, $P_{B_2}(A) = 2/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне было два белых шара $P_{B_3}(A) = 3/3 = 1$.

Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар, находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1 = 2/3.$$

§ 4. Формула Бейеса

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

97. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй — 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Обозначим через A событие — деталь отличного качества. Можно сделать два предположения (гипотезы): B_1 — деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй) $P(B_1) = 2/3$; B_2 — деталь произведена вторым автоматом, причем $P(B_2) = 1/3$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, $P_{B_1}(A) = 0{,}6$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, $P_{B_2}(A) = 0{,}84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 2/3 \cdot 0{,}6 + 1/3 \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Бейеса равна

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}.$$

§ 1. Формула Бернулли

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события* A. В § 1—4 этой главы рассматриваются независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события одинакова.

Формула Бернулли. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, — находят соответственно по формулам:

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1);$$
$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$$
$$P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n);$$
$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k).$$

110. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех

или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение. Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность выигрыша $p=1/2$; следовательно, вероятность проигрыша q также равна 1/2. Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, то применима формула Бернулли.

Найдем вероятность того, что две партии из четырех будут выиграны:

$$P_4(2)=C_4^2p^2q^2=4\cdot 3/(1\cdot 2)\cdot(1/2)^2\cdot(1/2)^2=6/16.$$

Найдем вероятность того, что будут выиграны три партии из шести:

$$P_6(3)=C_6^3p^3q^3=6\cdot 5\cdot 4/(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1/2)^3\cdot(1/2)^3=5/16.$$

Так как $P_4(2)>P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

166. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение. Дискретная случайная величина X (число отказавших элементов в одном опыте) имеет следующие возможные значения: $x_1=0$ (ни один из элементов устройства не отказал), $x_2=1$ (отказал один элемент), $x_3=2$ (отказали два элемента) и $x_4=3$ (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что, по условию, $n=3$, $p=0,1$ (следовательно, $q=1-0,1=0,9$), получим:

$$P_3(0)=q^3=0,9^3=0,729; \quad P_3(1)=C_3^1pq^2=3\cdot 0,1\cdot 0,9^2=0,243;$$
$$P_3(2)=C_3^2p^2q=3\cdot 0,1^2\cdot 0,9=0,027; \quad P_3(3)=p^3=0,1^3=0,001.$$

Контроль: $0,729+0,243+0,027+0,001=1$.

Напишем искомый биномиальный закон распределения X:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

188. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	-4	6	10
p	$0,2$	$0,3$	$0,5$

;

б)

X	$0,21$	$0,54$	$0,61$
p	$0,1$	$0,5$	$0,4$

.

Решение. а) Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности:

$$M(X) = -4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 = 6.$$

210. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Дисперсию можно вычислить исходя из ее определения, однако мы воспользуемся формулой

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2,$$

которая быстрее ведет к цели.

Найдем математическое ожидание X:

$$M(X)=-5\cdot 0,4+2\cdot 0,3+3\cdot 0,1+4\cdot 0,2=-0,3.$$

Напишем закон распределения X^2:

X^2	25	4	9	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=25\cdot 0,4+4\cdot 0,3+9\cdot 0,1+16\cdot 0,2=15,3.$$

Найдем искомую дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=15,3-(-0,3)^2=15,21.$$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{15,21}=3,9.$$

Пример 1.3: В детском саду измерили массу тела 10 детей 5 лет. Полученные данные образуют простой статистический ряд: 24 22 23 28 24 23 25 27 25 25. Ранжированный ряд имеет вид: 22 23 23 24 24 25 25 25 27 28. Подсчитав частоты каждого значения, можно посторoить безинтервальный вариационный ряд:

X	22	23	24	25	27	28
m	1	2	2	3	1	1

Пример 7. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 по 6:

$$n = C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Определим число исходов, благоприятствующих событию. Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных C_7^4 способами, при этом остальные две детали должны быть нестандартными. Две нестандартные детали можно взять из трех нестандартных C_3^2 способами. Следовательно, по правилу произведения, число благоприятных исходов равно $m = C_7^4 \cdot C_3^2 = \frac{7!3!}{4!3!2!} = 105$. Искомая вероятность будет равна

$$P = \frac{105}{210} = 0,5.$$

Пример. В круг вписан правильный треугольник. В круге наугад ставят точку. Какова вероятность, что она попадет в треугольник?

Решение. Событие A: точка, поставленная наугад в круг, попадает в треугольник. Пусть радиус круга равен R. Тогда площадь круга равна $S_{\text{круга}} = \pi R^2$, площадь правильного треугольника, вписанного в этот круг, равна $S_{\Delta} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Тогда по определению геометрической вероятности имеем $P(A) = \dfrac{S_{\Delta}}{S_{круга}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Пример 1. В ящике 5 белых и 10 черных шаров. Из ящика последовательно вынимают 2 шара; первый шар в ящик не возвращают. Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется белым, а второй – черным.

Решение. Пусть событие A – вынут первым белый шар, событие B – вторым вынут черный шар. Из следствия имеем:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{5}{15}\cdot\frac{10}{14}=\frac{5}{21}\approx 0{,}238.$$

Пример 2. В урне лежат 3 белых, 3 черных, 3 желтых шара. Найти вероятность события A – три вынутых шара будут одного цвета.

Решение. $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$, A_i – вынули i – шар.

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{28}.$$