

## **Задания на Лабораторную Работу (практическое занятие) 1.**

**Двойственные задачи ЛП.**

**Графический способ решения.**

**Двойственные задачи ЛП.**

**Признак оптимальности в краткой форме.**

# Графический метод решения задачи ЛП.

## Основные этапы графического метода решения

1. Построить прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (5) знаков неравенства на знаки равенства.
2. Найти полуплоскости заданные неравенствами.
3. Найти область допустимых решений (ОДР).
4. Построить вектор  $\bar{n} = \{c_1, c_2\}$  нормальный к прямой  $\mu(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ .
5. Построить линию уровня  $h = c_1 x_1 + c_2 x_2$  проходящую через ОДР.
6. Передвинуть линию уровня в направлении вектора  $\bar{n}$ , в результате найти точку  
или установить неограниченность функции сверху или снизу.
7. Определить координаты точки, т.е. Оптимальное решение.

1. Решить графически задачу линейного программирования:

а) Максимизировать:

$$\mu(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 4,$$

$$1.6x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$2.5x_1 + 5x_2 \leq 5$$

б) Минимизировать:

$$\mu(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$3x_1 - 4x_2 \leq 6,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$

$$-6x_1 + 8x_2 \leq 5$$

в) Максимизировать:

$$\mu(x_1, x_2) = 7x_1 + x_2$$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 - 1 \geq 0,$$

$$3x_1 - x_2 - 1 \geq 0,$$

$$7x_1 - 3x_2 - 1 \geq 0,$$

$$-x_1 + 3x_2 - 1 \geq 0,$$

## Основная задача ЛП:

Задача I. заданы вещественные числа

$$a_{ij}, b_i, c_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

$$I = \{\overline{1, m}\}, J = \{\overline{1, n}\}, I = I_1 \cup I_2, I_1 \cap I_2 = \emptyset; J = J_1 \cup J_2, J_1 \cap J_2 = \emptyset.$$

Требуется максимизировать линейную функцию

$$\mu(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

$$\text{на множестве } n\text{-мерных векторов } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2)$$

удовлетворяющих условиям:

$$x_j \geq 0, j \in J_2; \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i = 0, i \in I_1; \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \geq 0, i \in I_2. \quad (5)$$

## Двойственная задача ЛП:

**Задача I\***. При исходных данных задачи I минимизировать линейную функцию

$$v(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (6)$$

на множестве  $m$ -мерных векторов  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , (7)

удовлетворяющих условиям

$$y_i \geq 0, \quad i \in I_2; \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i + c_j = 0, \quad j \in J_1; \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i + c_j \leq 0, \quad j \in J_2. \quad | \quad (10)$$

## 2. Записать двойственную задачу

а) Максимизировать:

$$\mu(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 + 20 \geq 0,$$

$$2x_1 + x_3 + x_4 - 6x_5 + 30 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 15 =$$

0,

б)

$$\mu(x) = 14x_1 + 18x_3 \rightarrow \max$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad x_1, x_3 \geq 0$$

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \geq -52 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 90 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 85 \end{cases}$$

в)

$$\mu(x) = x_2 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

г)

$$\mu(x) = x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad x_j \geq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$$

Следстви

**е<sup>1</sup> Достаточный признак оптимальности в краткой форме.** Для оптимальности допустимого вектора (2) в задаче I достаточно, чтобы в задаче I\* нашелся допустимый вектор (7), удовлетворяющий условию

$$\mu(x) = v(y)$$

при этом допустимый вектор (7) является оптимальным в задаче I\*.



3. Записать двойственную задачу и используя признак оптимальности (в краткой форме) найти оптимальные вектора  $x$  и  $y$

Максимизировать

:

$$\mu(x) = -3x_1 - 8x_2$$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$x_2 \geq 0,$$

$$x_1 + 2x_2 + 1 = 0,$$