Задания на Лабораторную Работу (практическое занятие) 1.

Двойственные задачи ЛП.
Графический способ решения.
Двойственные задачи ЛП.
Признак оптимальности в краткой форме.

Графический метод решения задачи ЛП. Основные этапы графического метода решения

1. Построить прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (5) знаков неравенства на знаки равенства.
2. Найти полуплоскости заданные неравенствами.
3. Найти область допустимых решений (ОДР).
4. Построить вектор $\overline{n} = \{ c_1, c_2\}$ нормальный к прямым $\mu(x)=c_1 x_1 + c_2 x_2$.
5. Построить линию уровня $h=c_1 x_1 + c_2 x_2$ проходящую через ОДР.
6. Передвинуть линию уровня в направлении вектора $\overline{n}$, в результате найти точку или установить неограниченность функции сверху или снизу.
7. Определить координаты точки, т.е. Оптимальное решение.

1. Решить графически задачу линейного программирования:

а) Максимизировать:

$\mu(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

$x = (x_1, x_2)$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

$4x_1 - 3x_2 \leq 4,$

$1.6\, x_1 + x_2 \leq 2,$

$2.5\, x_1 + 5x_2 \leq 5$

б) Минимизировать:

$\mu(x_1, x_2) = - x_1 - x_2$

$x = (x_1, x_2)$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

$3x_1 - 4x_2 \leq 6,$

$x_1 + 2x_2 \leq 8,$

$- 6\, x_1 + 8x_2 \leq 5$

в) Максимизировать:

$\mu(x_1, x_2) = 7x_1 + x_2$

$x = (x_1, x_2)$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

$x_1 + x_2 - 1 \geq 0,$

$3x_1 - x_2 - 1 \geq 0,$

$7x_1 - 3x_2 - 1 \geq 0,$

$- x_1 + 3x_2 - 1 \geq 0,$

Основная задача ЛП:

Задача I. заданы вещественные числа

$$a_{ij},\ b_i,\ c_j,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

$$I=\{\overline{1,m}\},\ J=\{\overline{1,n}\},\ I=I_1\cup I_2,\ I_1\cap I_2=\varnothing;\ J=J_1\cup J_2,\ J_1\cap J_2=\varnothing.$$

Требуется максимизировать линейную функцию

$$\mu(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

на множестве *n*-мерных векторов $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, (2)

удовлетворяющих условиям:

$$x_j\ge 0,\ j\in J_2; \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+b_i=0,\ i\in I_1; \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+b_i\ge 0,\ i\in I_2. \qquad (5)$$

Двойственная задача ЛП:

Задача I*. При исходных данных задачи I *минимизировать* линейную функцию

$$v(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (6)$$

на множестве *m*-мерных векторов $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, (7)

удовлетворяющих условиям

$$y_i \geq 0,\ i \in I_2; \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + c_j = 0,\ \ j \in J_1; \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + c_j \leq 0,\ \ j \in J_2. \qquad (10)$$

2. Записать двойственную задачу

а) Максимизировать:

$\mu(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

$3x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 + 20 \geq 0,$

$2x_1 + x_3 + x_4 - 6x_5 + 30 = 0,$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 15 = 0,$

б)

$$\mu(x) = 14x_1 + 18x_3 \to max$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad x_1, x_3 \geq 0$$

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \geq -52 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 90 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 85 \end{cases}$$

в)

$$\mu(x) = x_2 + x_4 \to max$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), \ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

г)

$$\mu(x) = x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 \to max$$

$$x = (x_1; x_2, x_3, x_4) \quad x_j \geq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$$

Следствие 1 ***Достаточный признак оптимальности в краткой форме.*** Для оптимальности допустимого вектора (2) в задаче I достаточно, чтобы в задаче I* нашелся допустимый вектор (7), удовлетворяющий условию

$$\mu(x) = \nu(y)$$

при этом допустимый вектор (7) является оптимальным в задаче I*.

3. Записать двойственную задачу и используя признак оптимальности (в краткой форме) найти оптимальные вектора *x* и *y*

Максимизировать
:

$\mu(x) = -3x_1 - 8x_2$

$x = (x_1, x_2)$

$x_2 \geq 0,$

$x_1 + 2x_2 + 1 = 0,$