Семинар № 5

Система уравнений газовой динамики и разностные схемы для ее решения

к.ф.-м.н. Уткин Павел Сергеевич
e-mail: utkin@icad.org.ru, pavel_utk@mail.ru
(926) 2766560

Краткое содержание предыдущих семинаров

Семинар № 1 (07.02.14). Некоторые разностные схемы для решения линейного уравнения переноса.

Семинар № 2 (14.02.14). Построение схем для решения линейного уравнения переноса в пространстве неопределенных коэффициентов.

Семинар № 3 (21.02.14). Понятие монотонности разностных схем. Теорема Годунова.

Семинар № 4 (28.02.14). Обобщение на случай системы уравнений гиперболического типа.

Система уравнений газовой динамики

Дивергентная форма записи (в форме законов сохранения)

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Вектор консервативных переменных

Вектор потоков

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho U \\ E \end{bmatrix}, \ \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + p \\ (E + p)U \end{bmatrix},$$

$$E = \frac{\rho U^2}{2} + \rho e, \ e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

Полная энергия

Внутренняя энергия (уравнение состояния)

Анализ системы уравнений газовой динамики

[redacted]

Характеристическая форма

Матрица Якоби

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} - \lambda \mathbf{I}\right) = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = U + c \\ \lambda_2 = U \\ \lambda_3 = U - c \end{array}\right.$$

Скорость звука

$$c \triangleq \sqrt{p_\rho + \frac{p p_e}{\rho^2}}$$

Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001.

Гиперболическая система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + A\left(t, x, \mathbf{v}\right)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{f}\left(t, x, \mathbf{v}\right)$$

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^I,\ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^I,\ A \in \mathbb{R}^{I \times I}$$

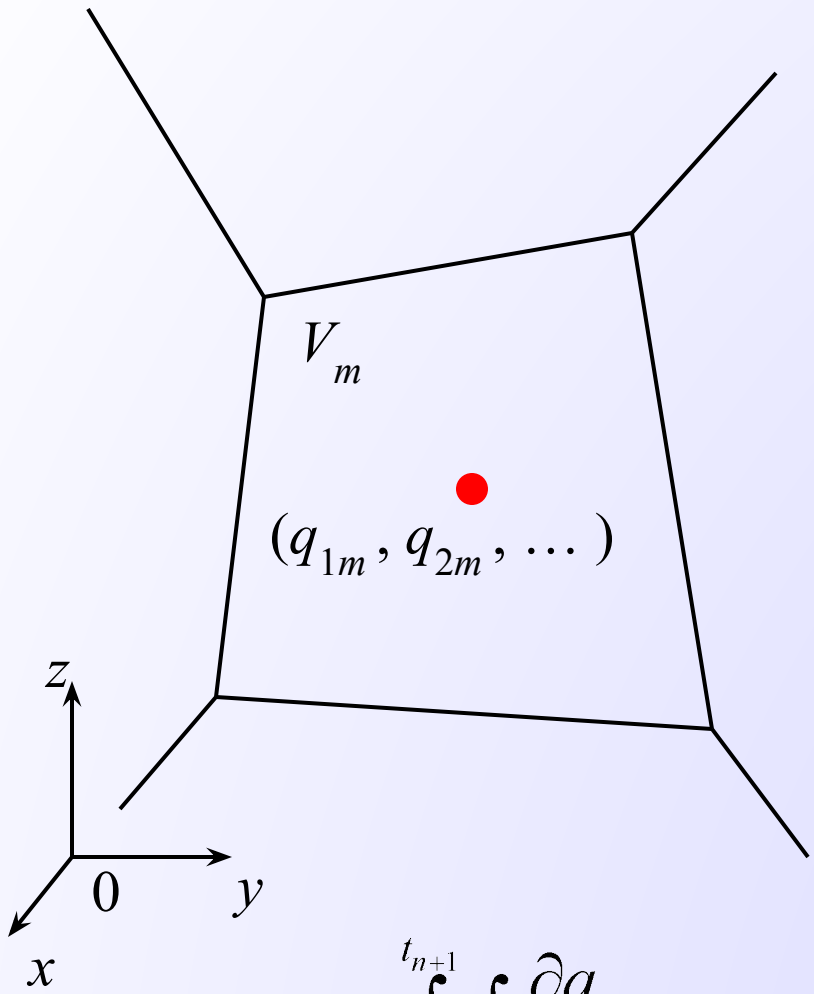
$$\det\left(A - \lambda E\right) = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, I}}$$

$$\vec{\omega}_i\left(A - \lambda_i E\right) = 0,\ \Omega = \left\{\vec{\omega}_1, \ldots, \vec{\omega}_I\right\}^T$$

$$\boxed{\det \Omega \neq 0}$$

- Наличие конечной скорости распространения бесконечно слабых возмущений
- Возможность существования разрывных решений даже для гладких начальных данных

Метод конечных объемов (1)



Для произвольной компоненты вектора консервативных переменных:

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} + \frac{\partial f_{m1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{m2}}{\partial y} + \frac{\partial f_{m3}}{\partial z} = 0$$

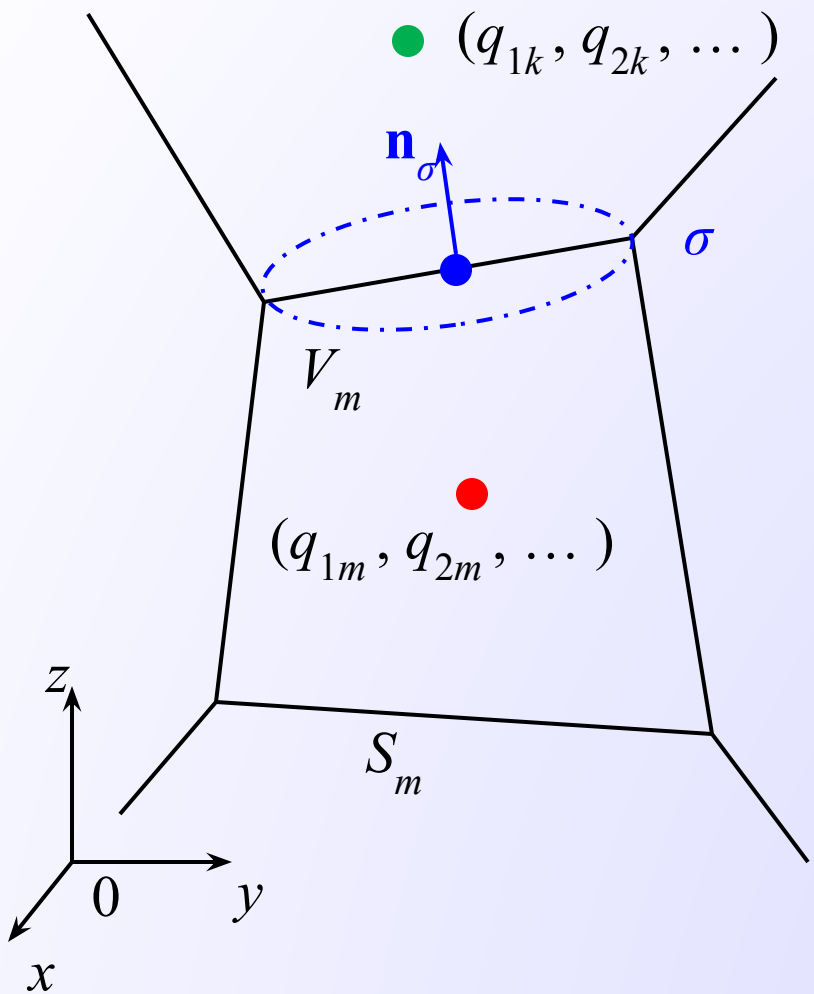
или

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} + div\left(\mathbf{f}_m\right) = 0$$

Проинтегрируем по объему ячейки расчетной сетки и по времени:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{V_m} \frac{\partial q_m}{\partial t} dt dV + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{V_m} div\left(\mathbf{f}_m\right) dt dV = 0$$

Метод конечных объемов (2)



Возьмем интеграл в первом выражении и применим теорему Остроградского-Гаусса к расчету интеграла во втором:

$$V_m\left(q_m^{n+1} - q_m^n\right) + \tau \int_{S_m} \left(\mathbf{f}_m, \mathbf{n}\right) dS = 0$$

Аппроксимируем поверхностный интеграл через сумму интегралов по граням ячейки:

$$\boxed{\frac{q_m^{n+1} - q_m^n}{\tau} + \frac{1}{V_m} \sum_\sigma F_\sigma S_\sigma = 0}$$

Основной вопрос – как определять численный поток?

$$\boxed{F_\sigma = F_\sigma\left(\mathbf{q}_m, \mathbf{q}_k\right)}$$

Постановка задачи о распаде произвольного разрыва

Задача Коши для системы уравнений газовой динамики с разрывом первого рода в начальных данных

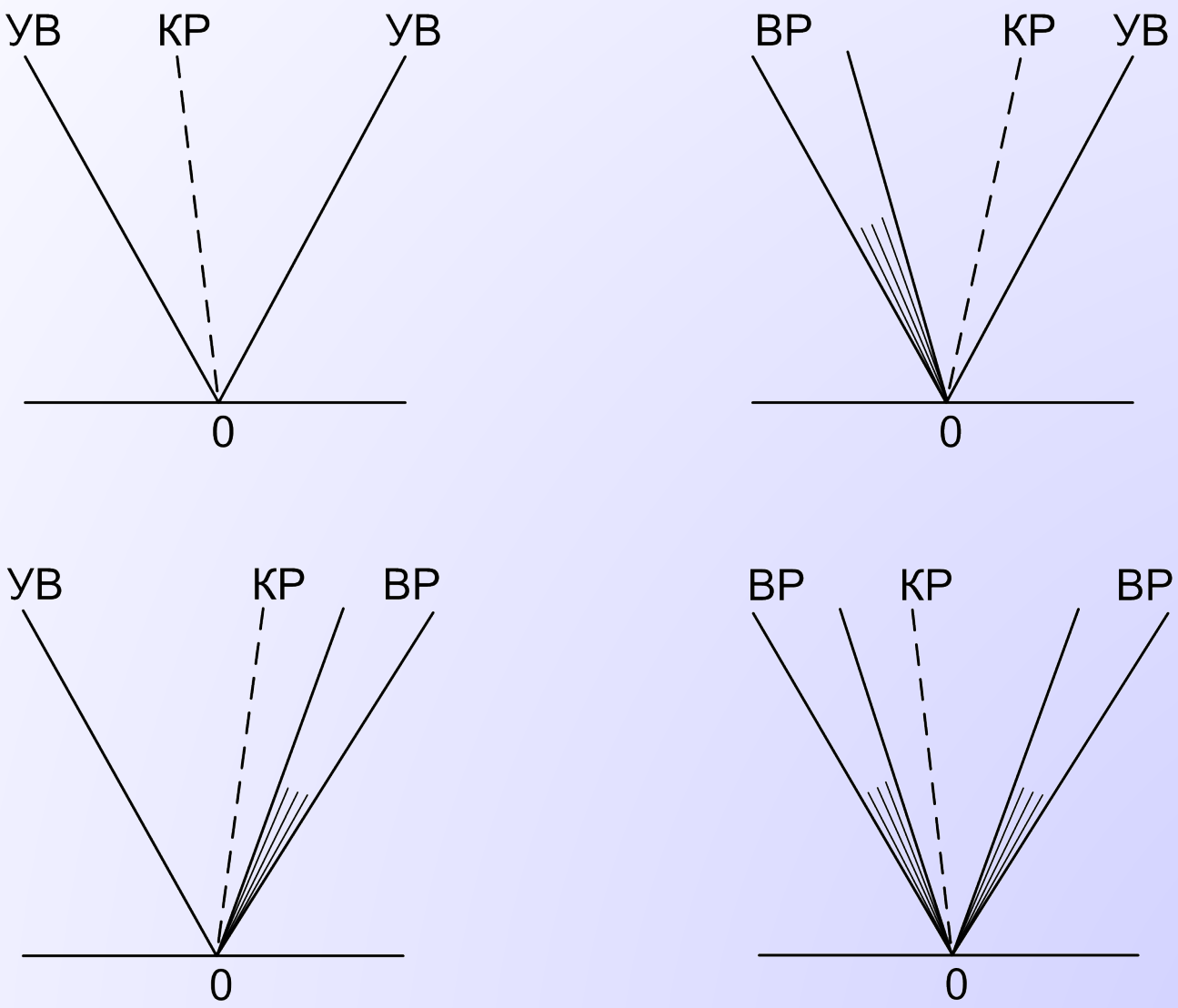
$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho U \\ E \end{bmatrix}, \ \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + p \\ (E + p)U \end{bmatrix},$$

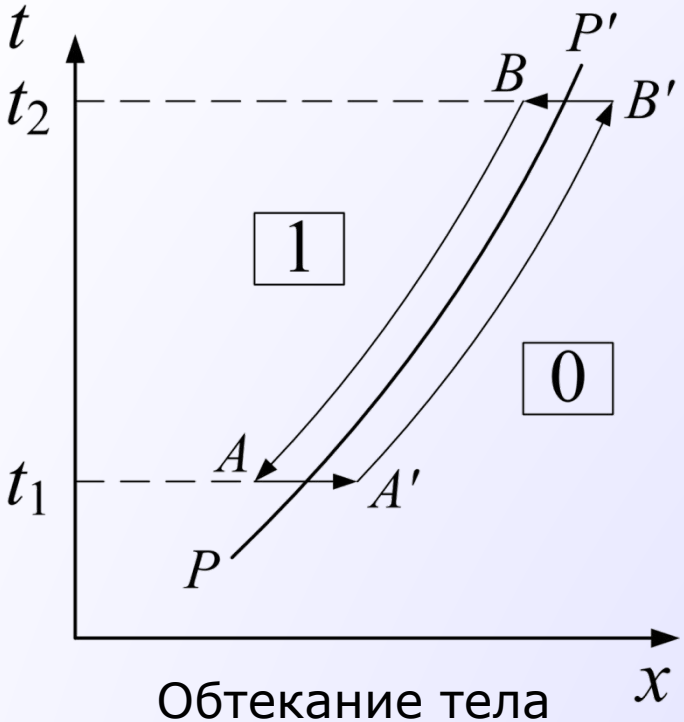
$$E = \frac{\rho U^2}{2} + \rho e, \ e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)},$$

$$\mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_R \ \text{при}\ x > 0, \\ \mathbf{q}_L \ \text{при}\ x < 0 \end{cases}$$

Возможные конфигурации решения



Соотношения на разрыве



Обтекание тела сверхзвуковым потоком

Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986.

Соотношения Ренкина – Гюгонио:

$$\rho_1(U_1 - D) = \rho_0(U_0 - D)$$

$$\rho_1(U_1 - D)^2 + p_1 = \rho_0(U_0 - D)^2 + p_0$$

$$\rho_1(U_1 - D)\left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{U_1^2}{2}\right) = \rho_0(U_0 - D)\left(e_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{U_0^2}{2}\right)$$

Разрывы

Ударные волны

$$U_1 \neq U_0$$

$$p_1 \neq p_0$$

$$\rho_1 \neq \rho_0$$

Контактные – нет потока массы вещества через разрыв

$$U_1 = U_0 = D$$

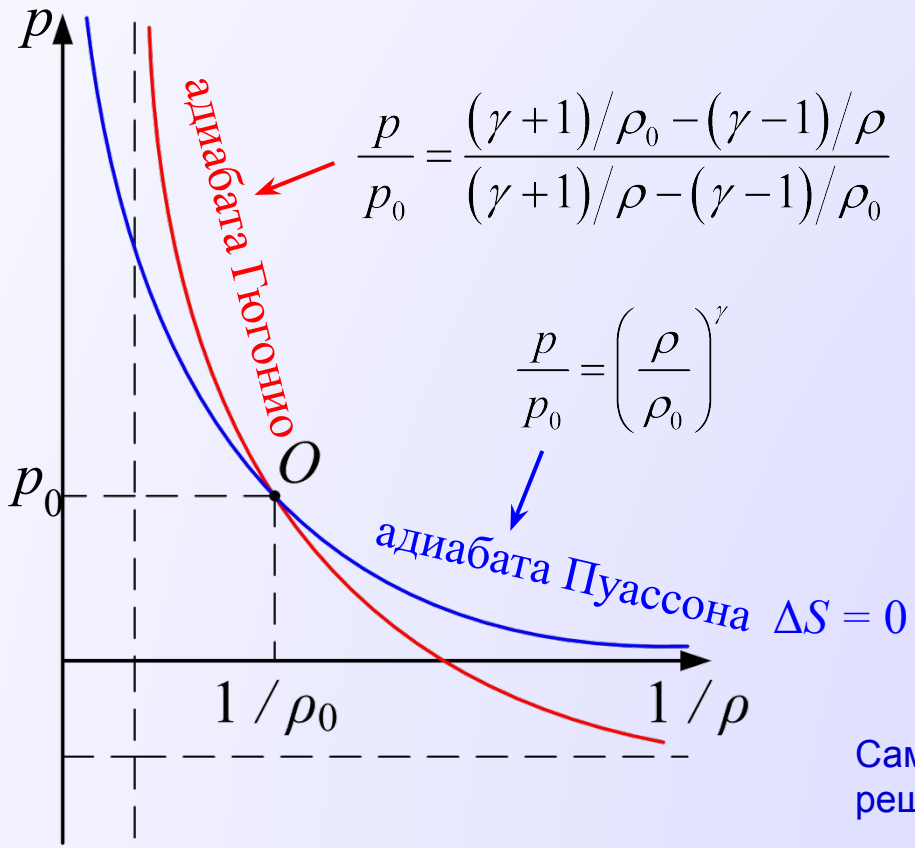
$$p_1 = p_0,\ \rho_1 \neq \rho_0$$

Элементарная теория ударных волн

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_1(U_1-D)=\rho_0(U_0-D)\\
&\rho_1(U_1-D)^2+p_1=\rho_0(U_0-D)^2+p_0\\
&\rho_1(U_1-D)\left(e_1+\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{U_1^2}{2}\right)=\rho_0(U_0-D)\left(e_0+\frac{p_0}{\rho_0}+\frac{U_0^2}{2}\right)
\end{aligned}\right\}\rightarrow e_1(p_1,\rho_1)-e_0(p_0,\rho_0)=\frac{1}{2}(p_1+p_0)\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_1}\right)$$

Адиабата Гюгонио

$$+\,e=\frac{p}{\rho(\gamma-1)}$$



$$\frac{p}{p_0}=\frac{(\gamma+1)/\rho_0-(\gamma-1)/\rho}{(\gamma+1)/\rho-(\gamma-1)/\rho_0}$$

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

- В ударной волне газ нельзя сжать больше, чем в $(\gamma+1)/(\gamma-1)$ раз.
- Ударная волна бесконечно малой интенсивности распространяется относительно газа со скоростью звука.
- Фронт ударной волны распространяется относительно фона со сверхзвуковой скоростью.
- Теорема Цемплена: не существует ударных волн разрежения.

Самарский А.А., Попов Ю.И. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992.

Соотношения для ударных волн и волн разрежения

[redacted]

«левая» УВ

«правая» УВ

[redacted]

«левая» ВР

«правая» ВР

Метод Ньютона для нахождения давления на контактном разрыве

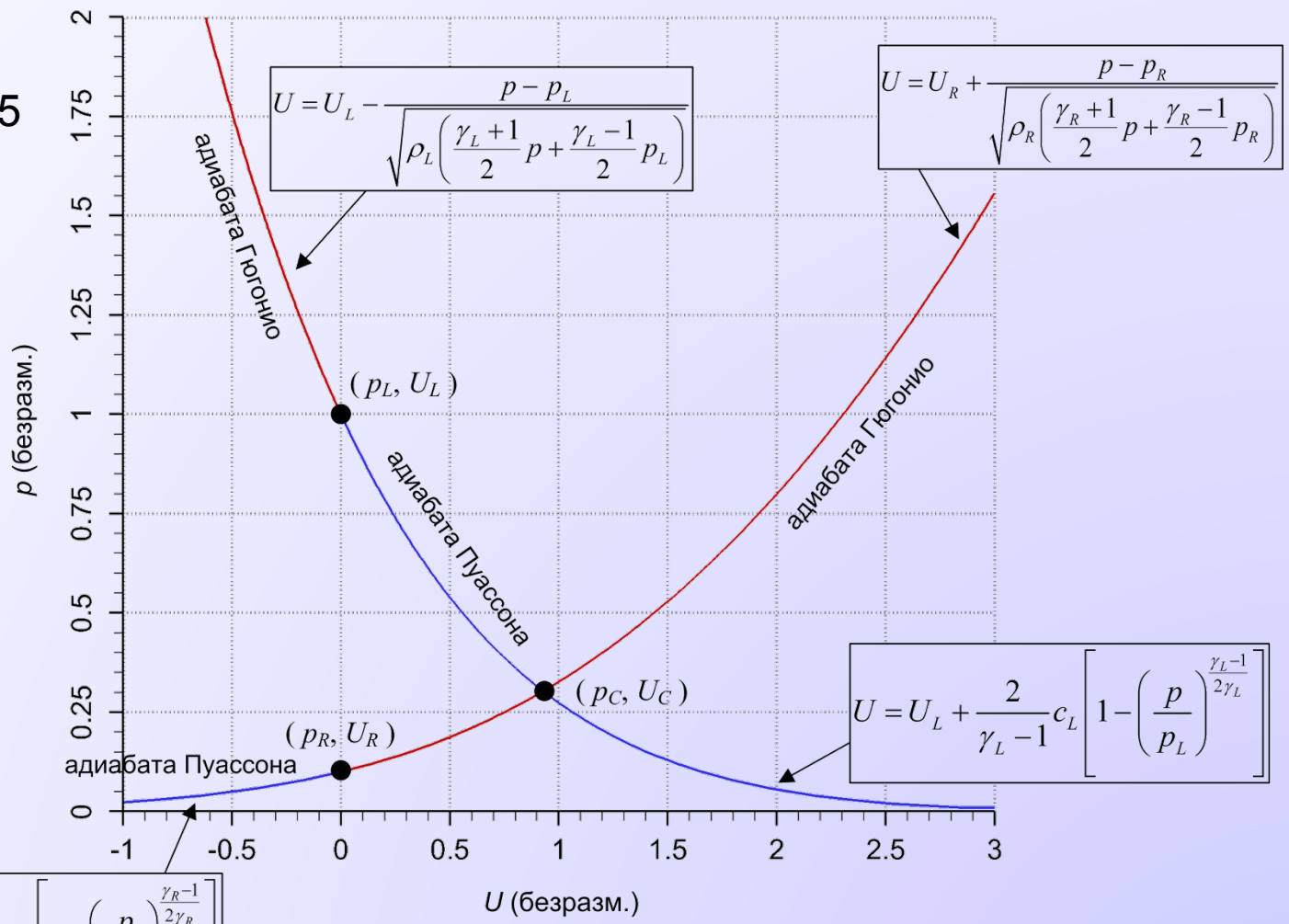
Система тестов

№	Описание	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R
1	"Тест Сода"	1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1
2	"Модифицированный тест Сода"	1.0	0.75	1.0	0.125	0.0	0.1
3	"Две волны разрежения"	1.0	-2.0	0.4	1.0	2.0	0.4
4	"Очень сильный градиент"	1.0	0.0	1000.0	1.0	0.0	0.01
5	"Три сильных разрыва вправо"	5.9992	19.598	460.89	5.992	-6.2	46.1

Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. – Springer, 1999.

Тест 1. Задача Сода. Анализ (p-v)-диаграммы.

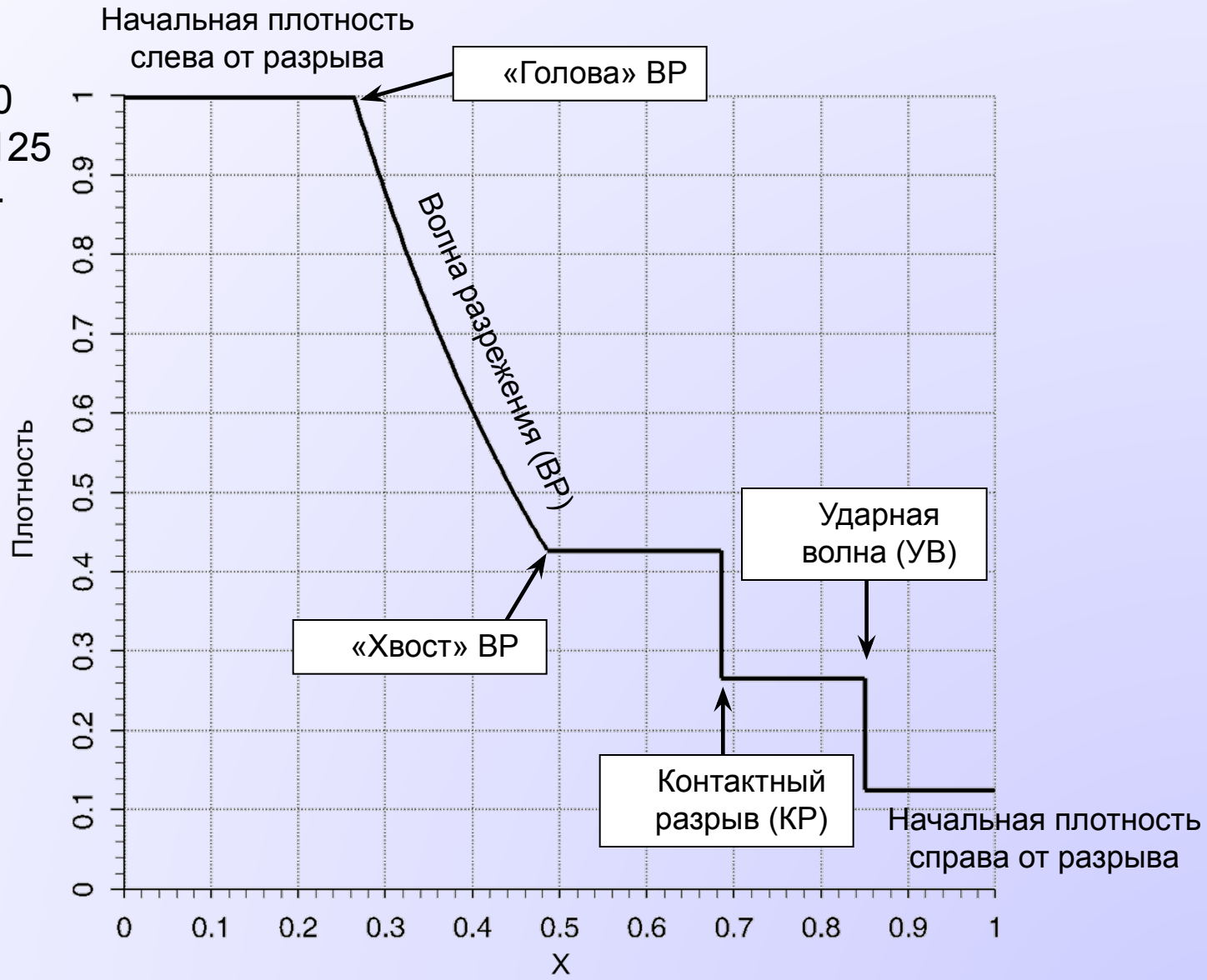
$p_L = 1.0$	$p_R = 0.1$
$U_L = 0.0$	$U_R = 0.0$
$\rho_L = 1.0$	$\rho_R = 0.125$
$\gamma_L = 1.4$	$\gamma_R = 1.4$



Тест 1. Задача Сода. Точное решение. Распределение плотности.

$p_L = 1.0$	$p_R = 0.1$
$U_L = 0.0$	$U_R = 0.0$
$\rho_L = 1.0$	$\rho_R = 0.125$
$\gamma_L = 1.4$	$\gamma_R = 1.4$

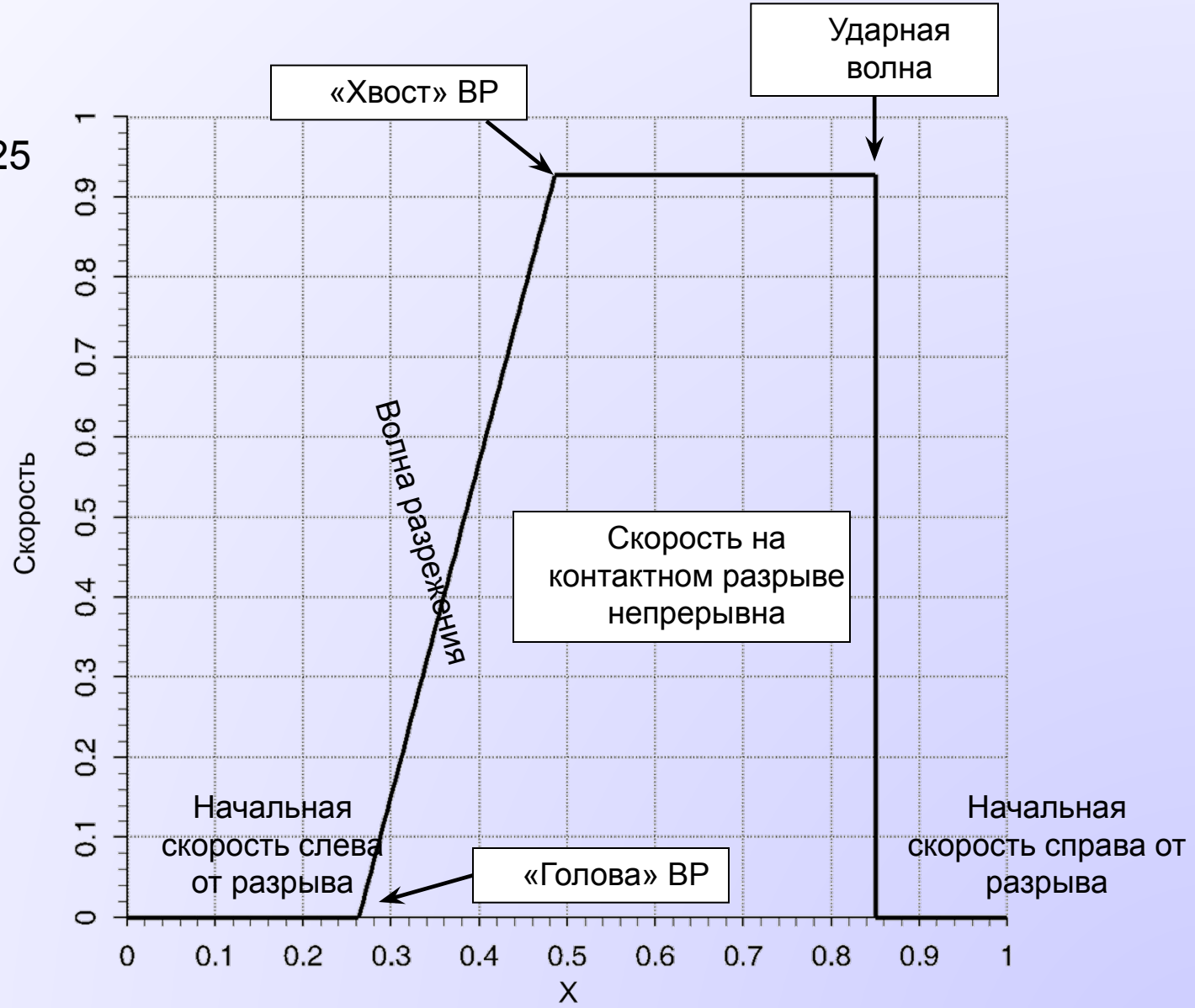
$x_0 = 0.5$
$t = 0.2$



Тест 1. Задача Сода. Точное решение. Распределение скорости.

$p_L = 1.0$	$p_R = 0.1$
$U_L = 0.0$	$U_R = 0.0$
$\rho_L = 1.0$	$\rho_R = 0.125$
$\gamma_L = 1.4$	$\gamma_R = 1.4$

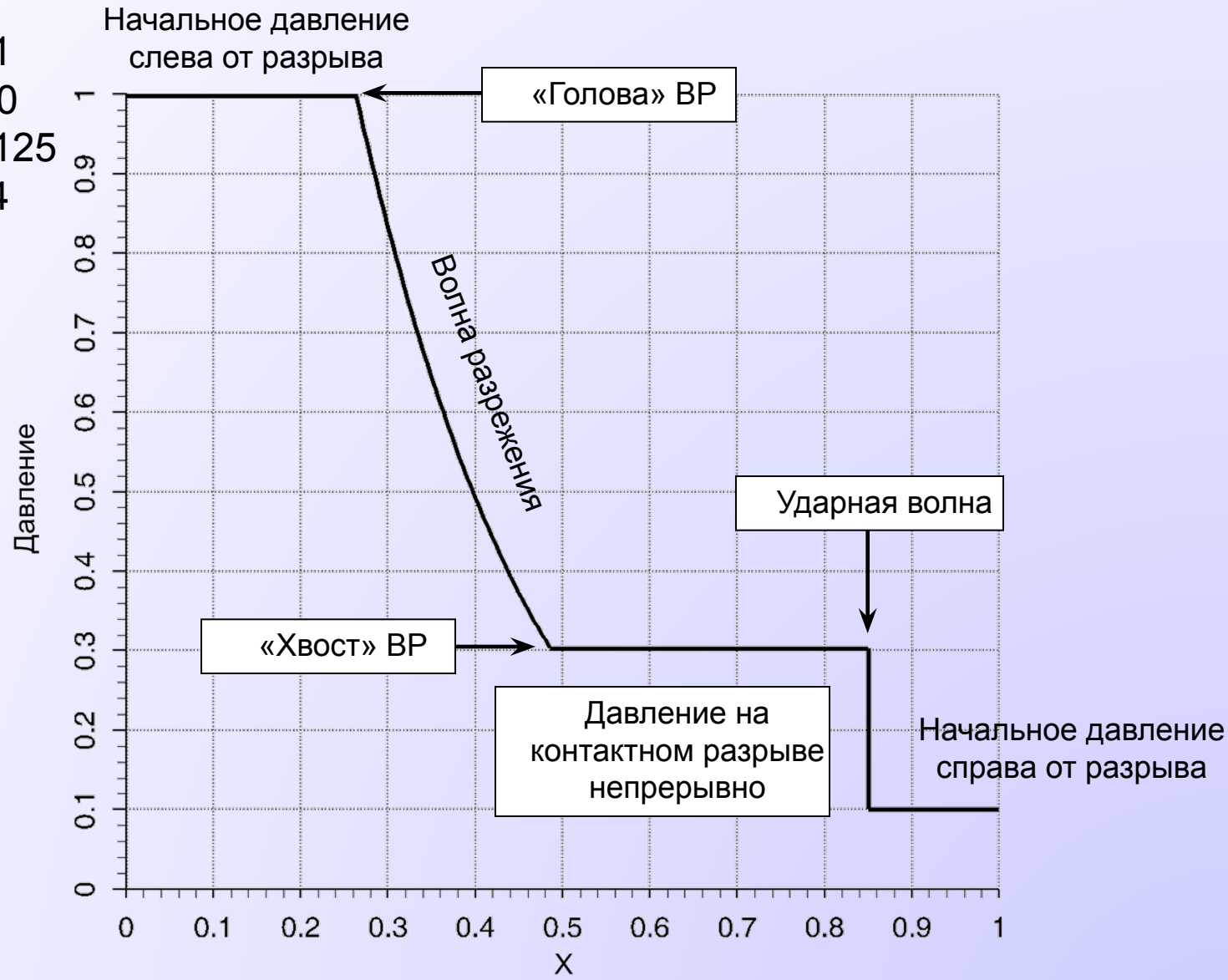
$x_0 = 0.5$
$t = 0.2$



Тест 1. Задача Сода. Точное решение. Распределение давления.

$p_L = 1.0$	$p_R = 0.1$
$U_L = 0.0$	$U_R = 0.0$
$\rho_L = 1.0$	$\rho_R = 0.125$
$\gamma_L = 1.4$	$\gamma_R = 1.4$

$x_0 = 0.5$
$t = 0.2$



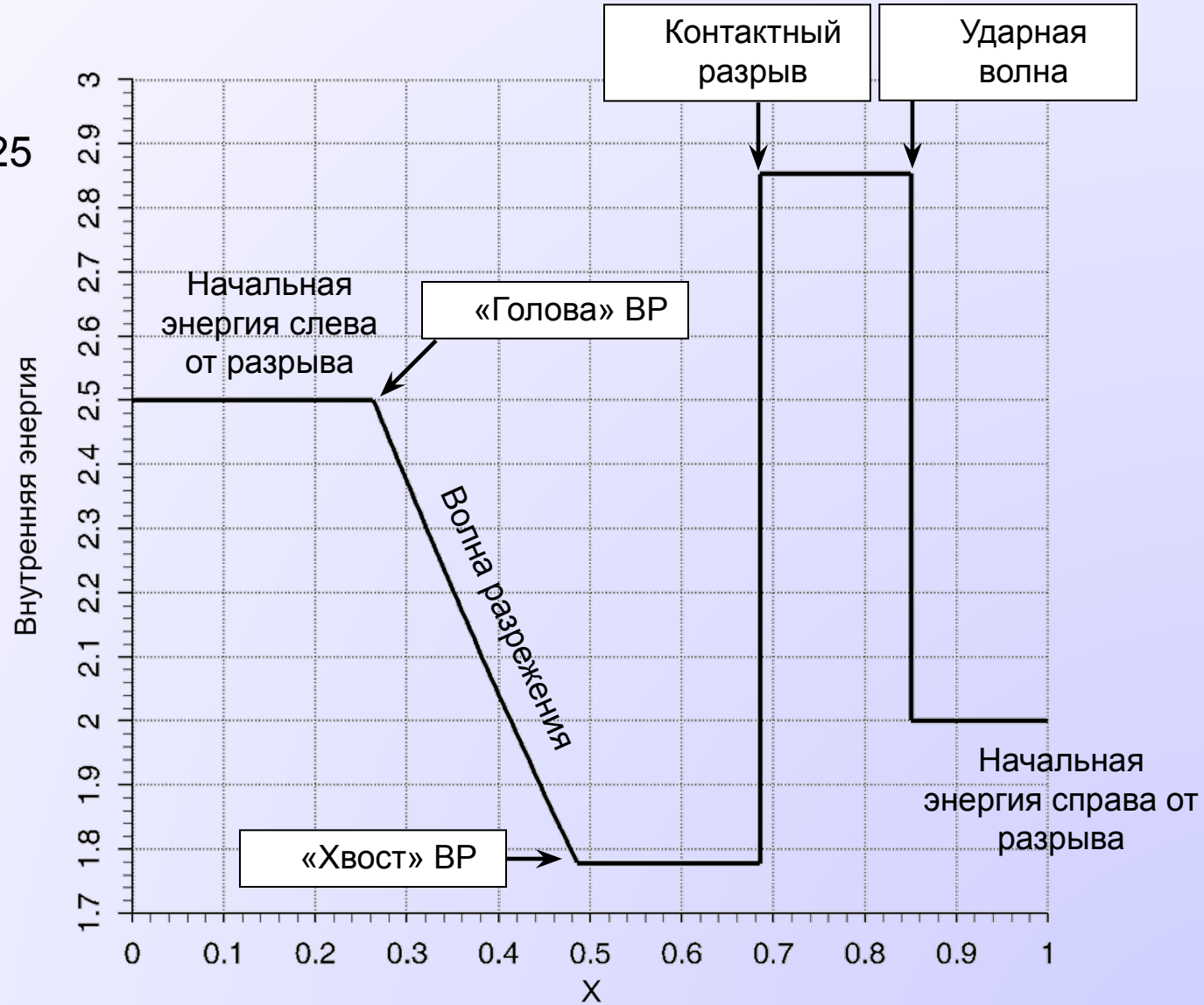
Тест 1. Задача Сода. Точное решение. Распределение внутренней энергии.

$p_L = 1.0$	$p_R = 0.1$
$U_L = 0.0$	$U_R = 0.0$
$\rho_L = 1.0$	$\rho_R = 0.125$
$\gamma_L = 1.4$	$\gamma_R = 1.4$

$x_0 = 0.5$

$t = 0.2$

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$



Алгоритм построения точного решения

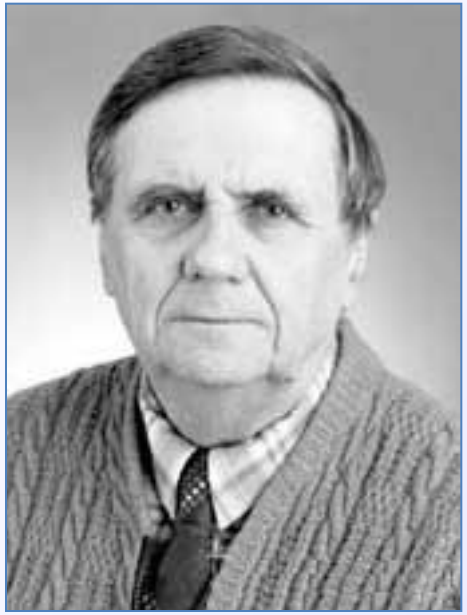
1. Определяем по (p-v)-диаграмме конфигурацию, возникающую при распаде.

Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992.

2. В результате решения нелинейного алгебраического уравнения методом Ньютона ищем давление на контактном разрыве.

3. Определяем оставшиеся параметры – скорости ударных волн и наклоны крайних характеристик, описывающих веер волны разрежения.

Годунов С.К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976.



Сергей Константинович Годунов
род. 1929 г., академик РАН

Тестирование схемы С. К. Годунова решения уравнений газовой динамики

Тест 1. Задача Сода. Метод Годунова. Распределение плотности.

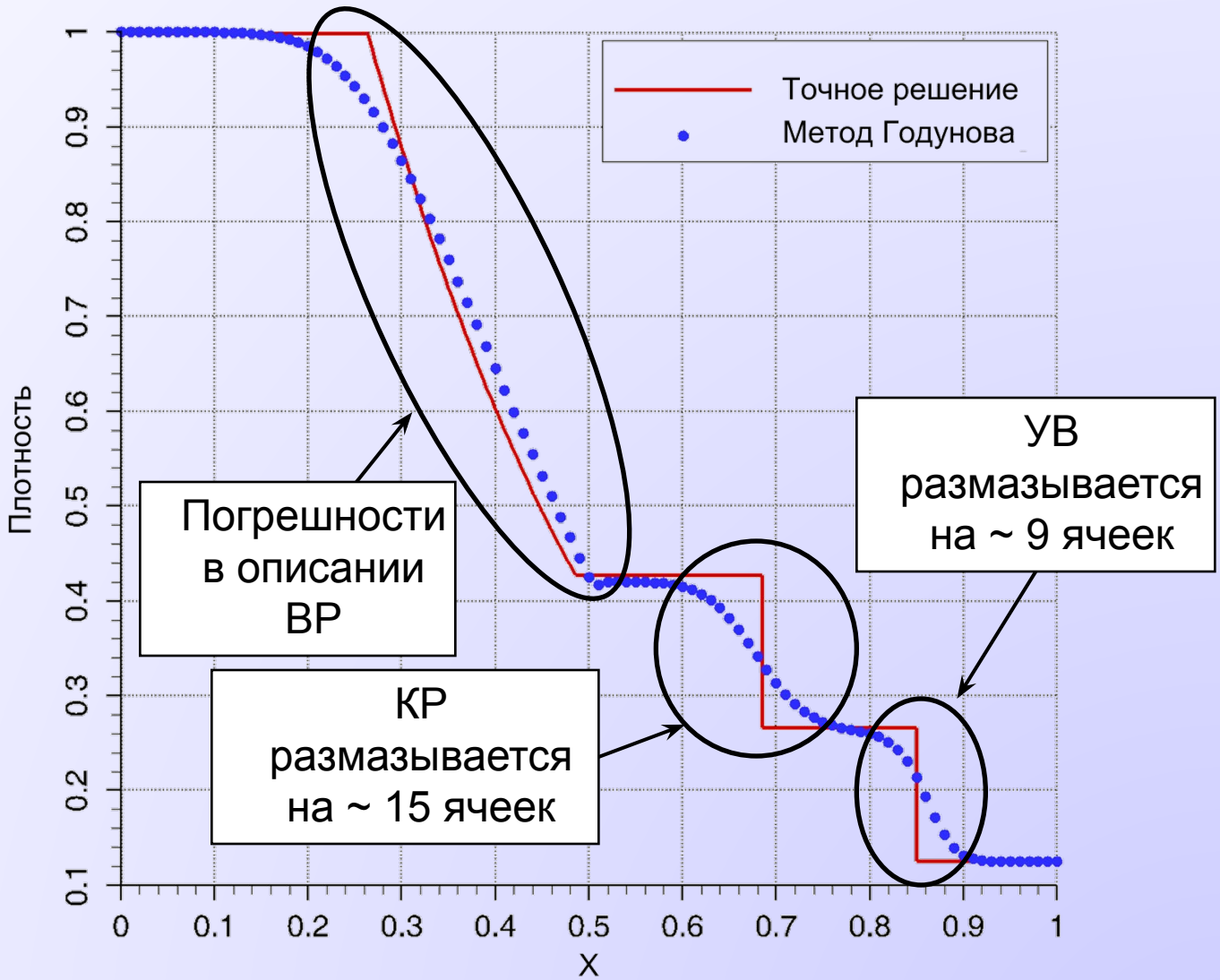
$p_L = 1.0$	$p_R = 0.1$
$U_L = 0.0$	$U_R = 0.0$
$\rho_L = 1.0$	$\rho_R = 0.125$
$\gamma_L = 1.4$	$\gamma_R = 1.4$

$x_0 = 0.5$
$t = 0.2$

$\Delta x = 0.01$
$\Delta t = 0.001$

Схема С.К. Годунова:

- 1-ый порядок аппроксимации
- Монотонность
- Физичность результатов (есть исключения)

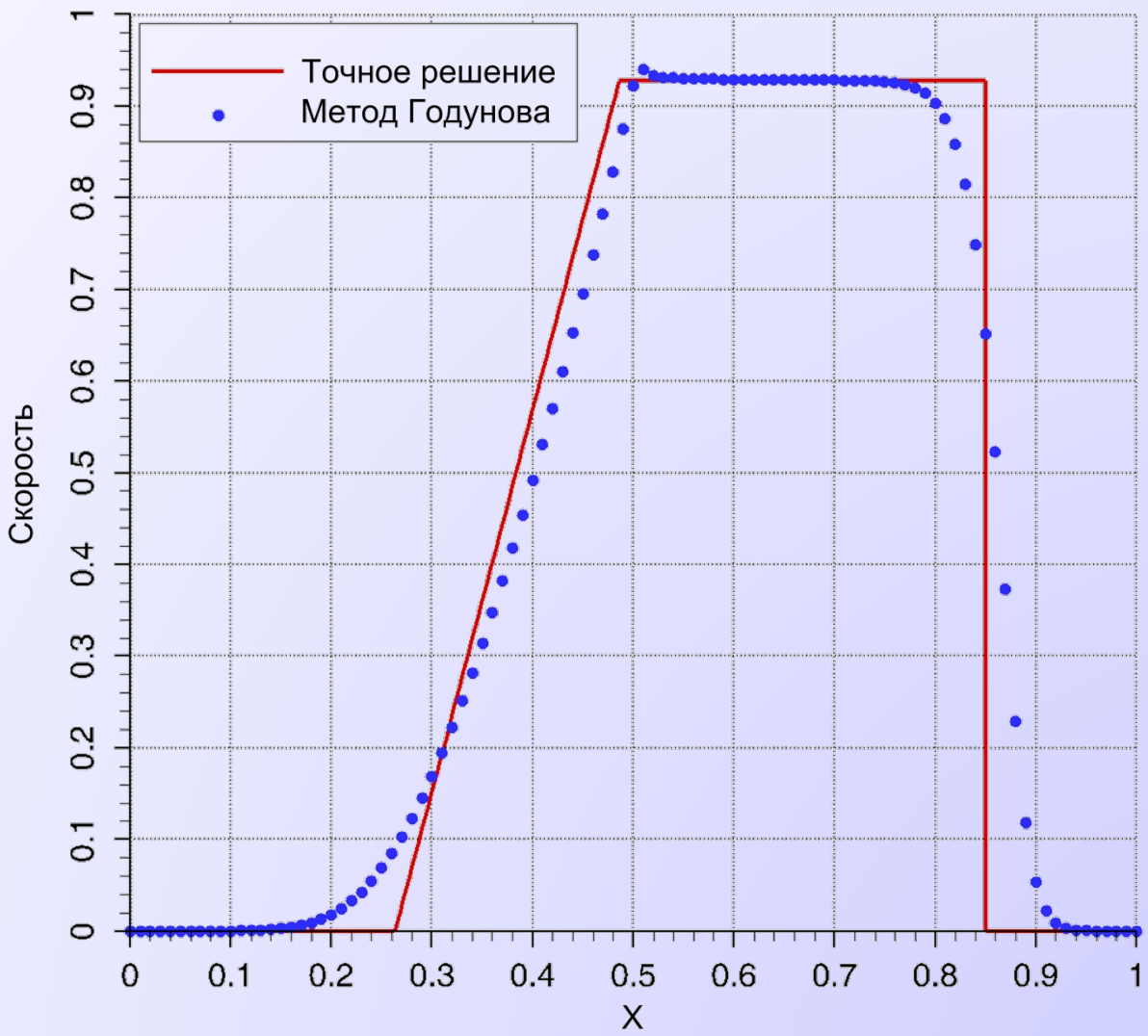


Тест 1. Задача Сода. Метод Годунова. Распределение скорости.

$p_L = 1.0$	$p_R = 0.1$
$U_L = 0.0$	$U_R = 0.0$
$\rho_L = 1.0$	$\rho_R = 0.125$
$\gamma_L = 1.4$	$\gamma_R = 1.4$

$x_0 = 0.5$
$t = 0.2$

$\Delta x = 0.01$
$\Delta t = 0.001$

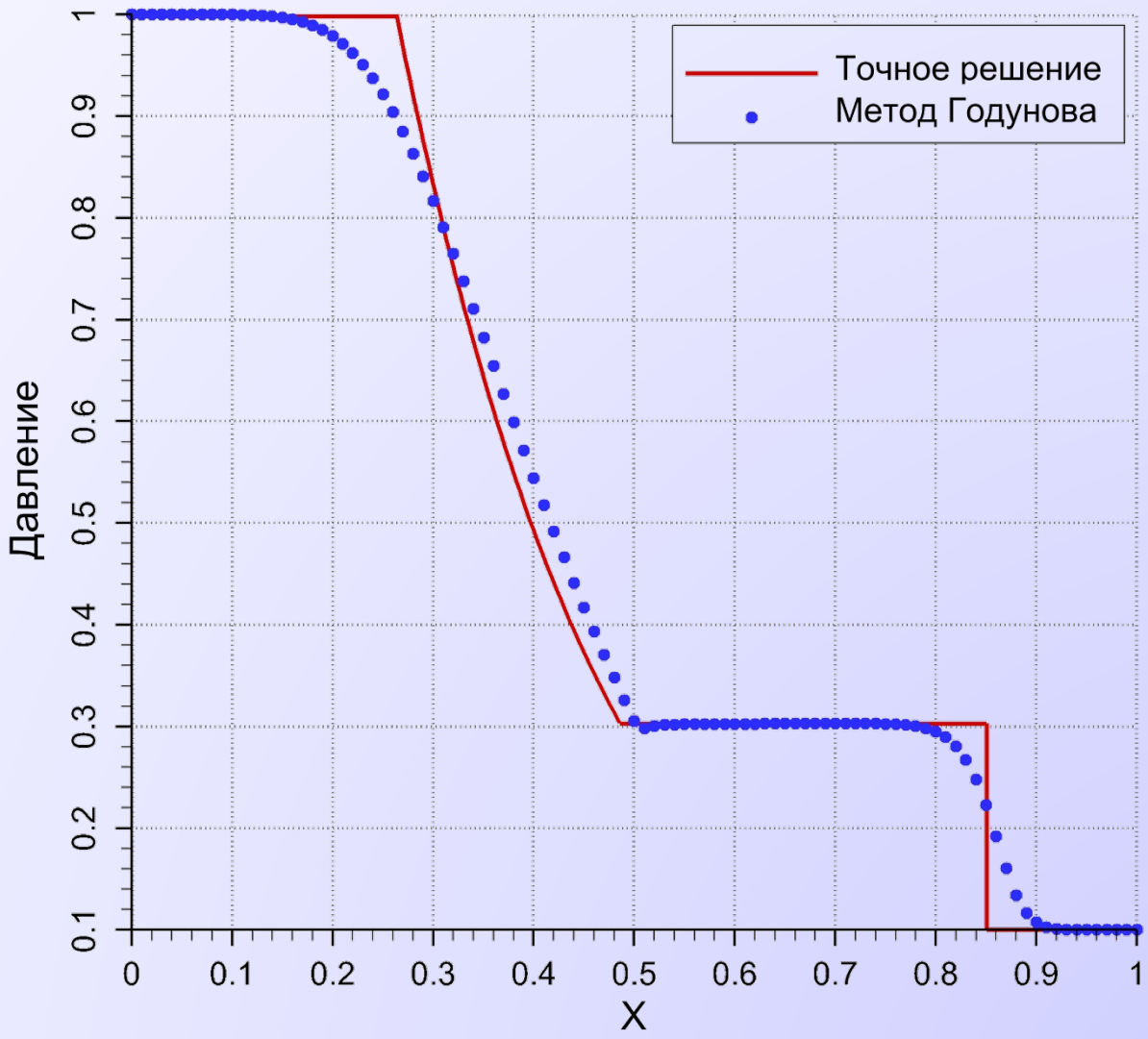


Тест 1. Задача Сода. Метод Годунова. Распределение давления.

$p_L = 1.0$	$p_R = 0.1$
$U_L = 0.0$	$U_R = 0.0$
$\rho_L = 1.0$	$\rho_R = 0.125$
$\gamma_L = 1.4$	$\gamma_R = 1.4$

$x_0 = 0.5$
$t = 0.2$

$\Delta x = 0.01$
$\Delta t = 0.001$



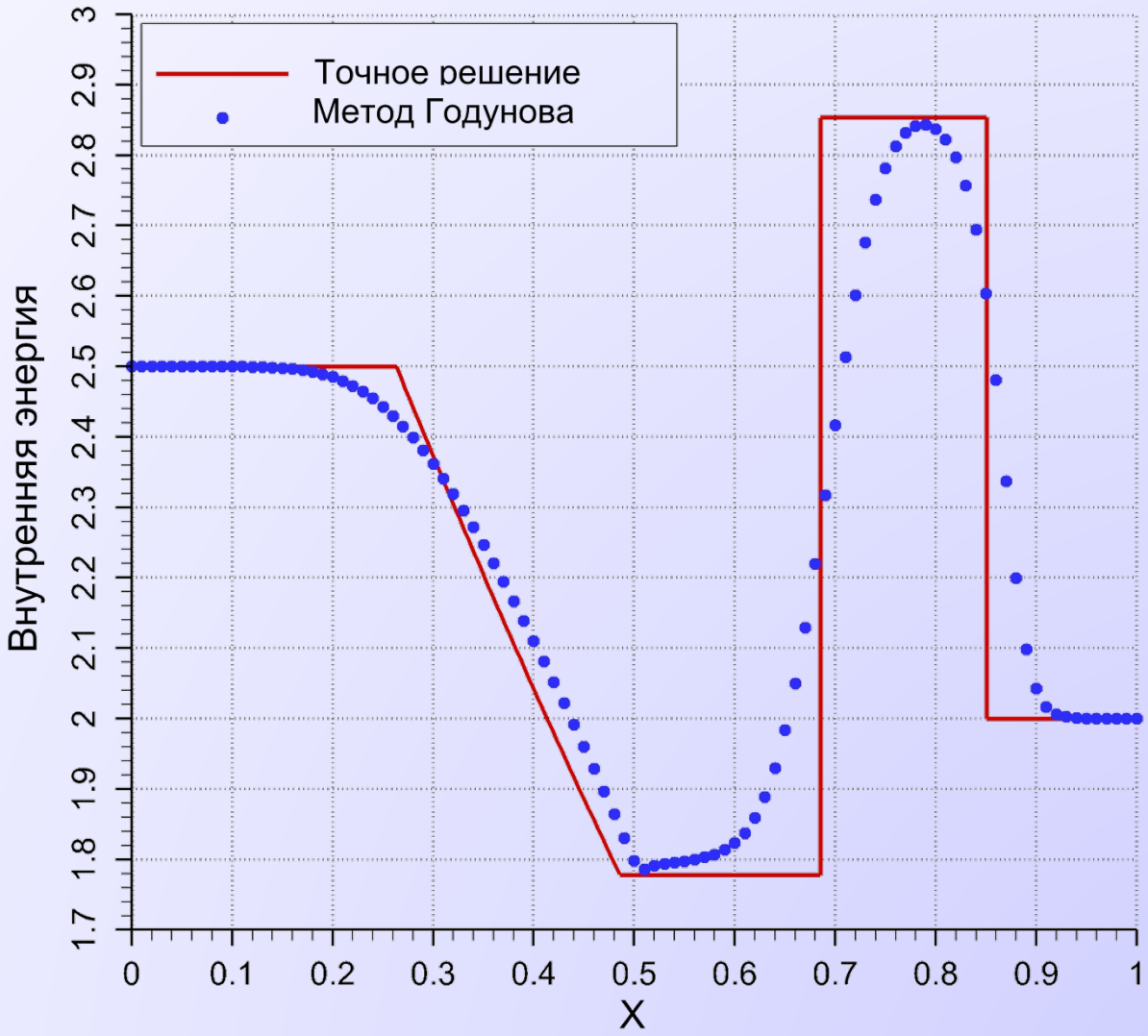
Тест 1. Задача Сода. Метод Годунова. Распределение внутренней энергии.

$p_L = 1.0$	$p_R = 0.1$
$U_L = 0.0$	$U_R = 0.0$
$\rho_L = 1.0$	$\rho_R = 0.125$
$\gamma_L = 1.4$	$\gamma_R = 1.4$

$x_0 = 0.5$
$t = 0.2$

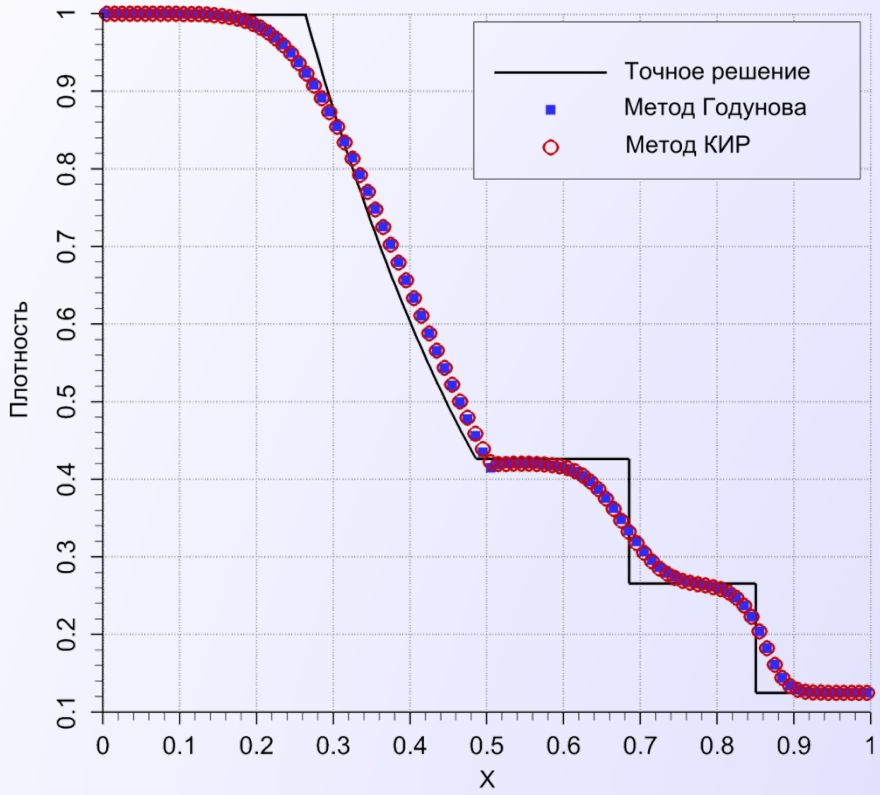
$\Delta x = 0.01$
$\Delta t = 0.001$

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

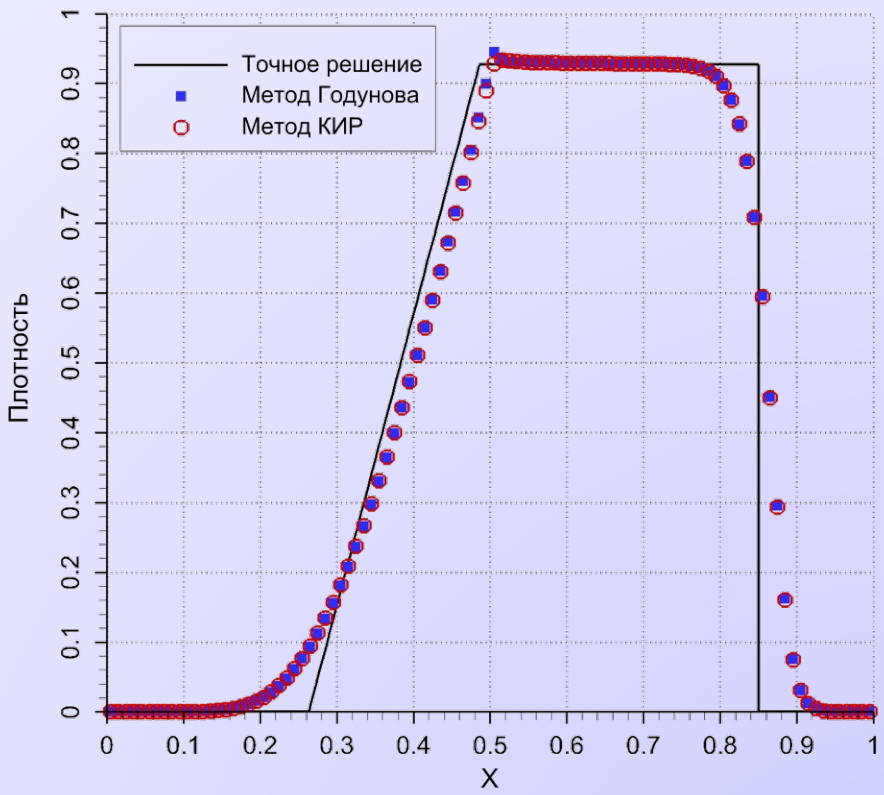


Тест 1. Задача Сода. Сравнение методов Годунова и КИР (1).

Распределение плотности

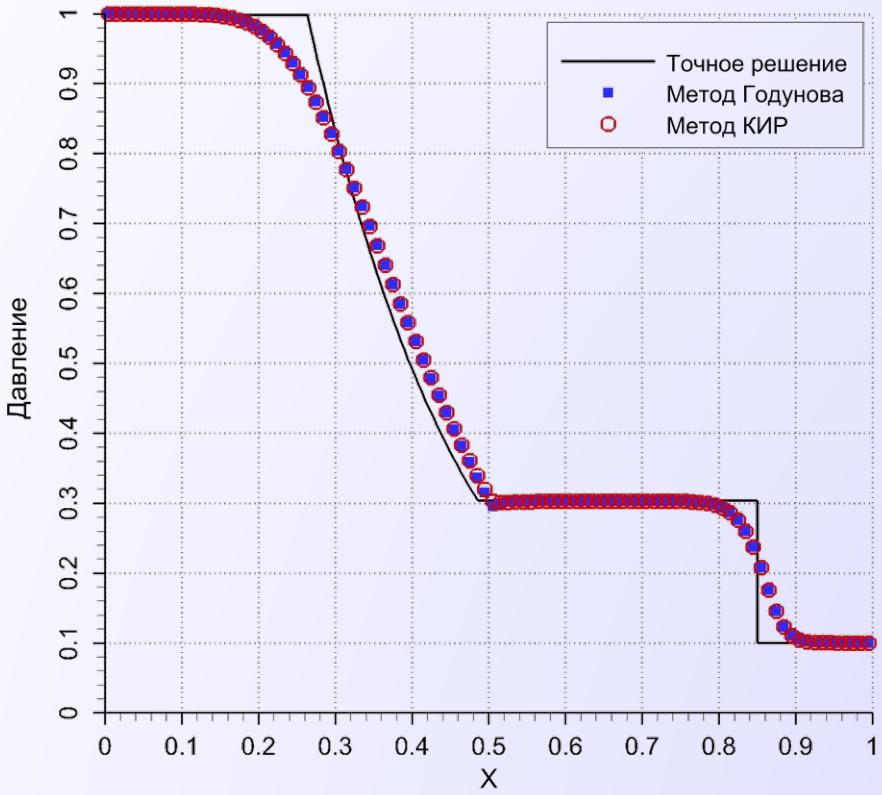


Распределение скорости

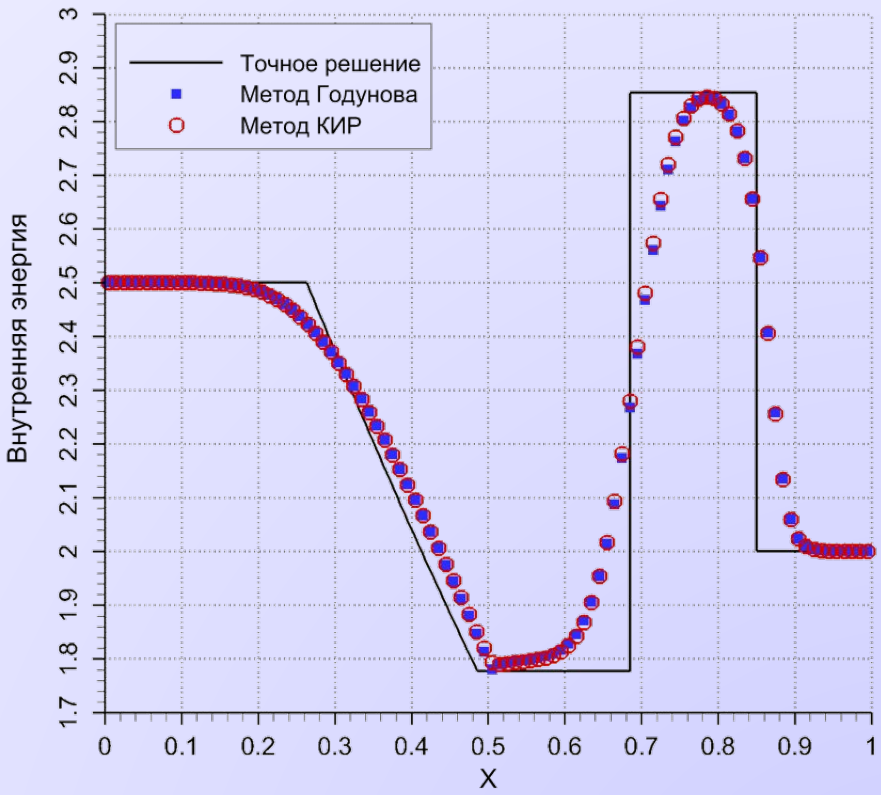


Тест 1. Задача Сода. Сравнение методов Годунова и КИР (2).

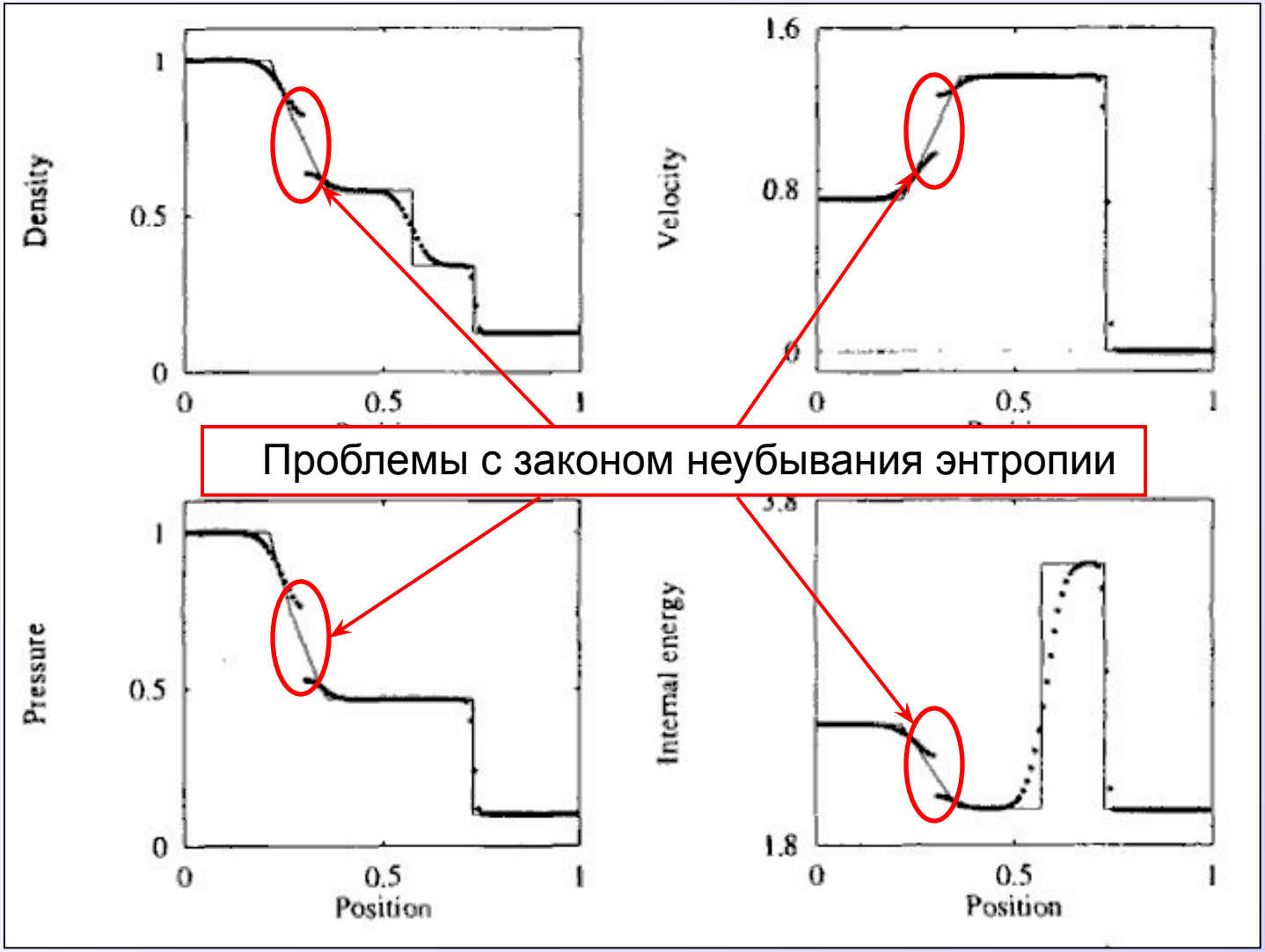
Распределение давления



Распределение внутренней энергии

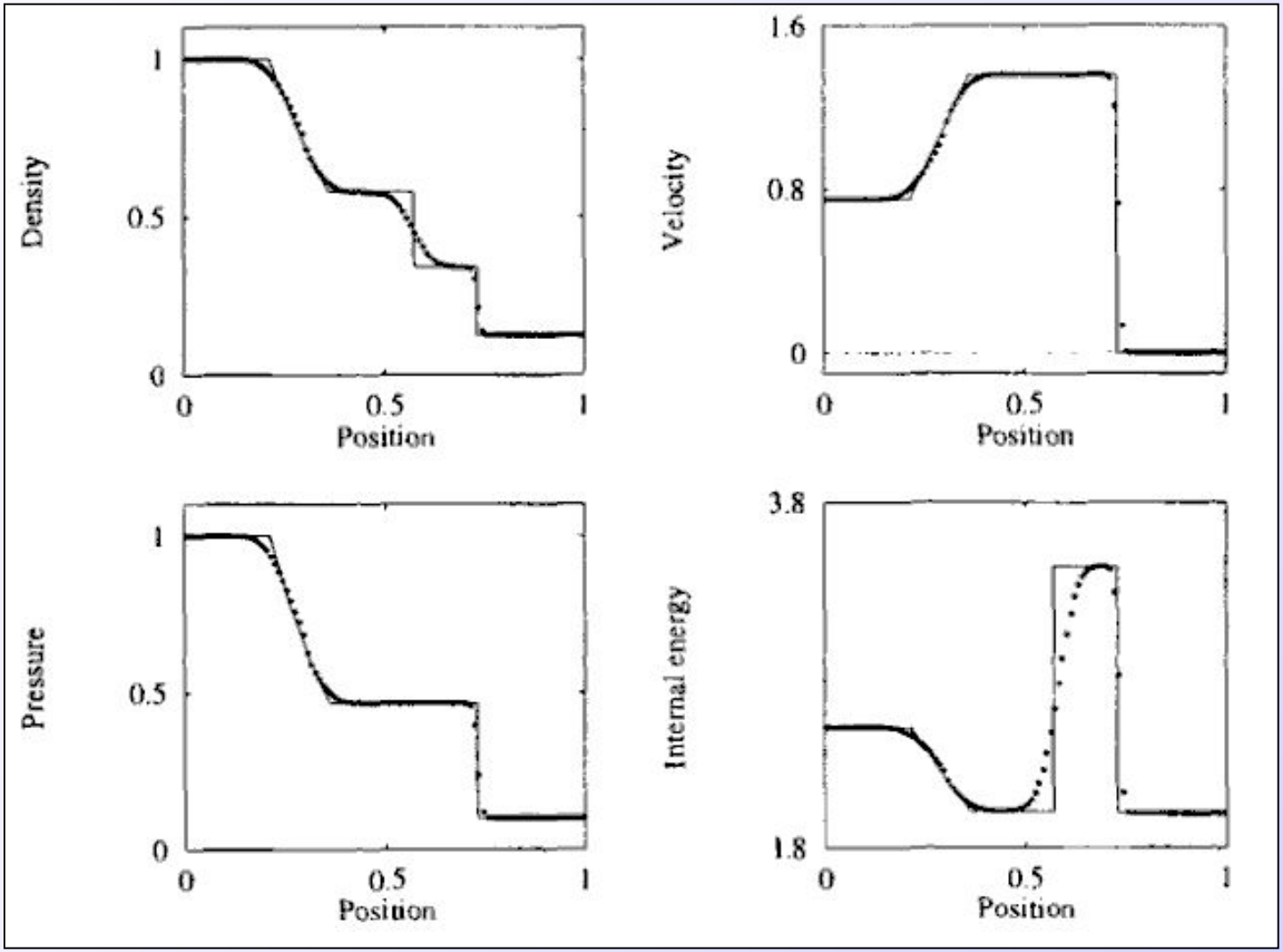


Тест 2. Метод Роу (Roe).



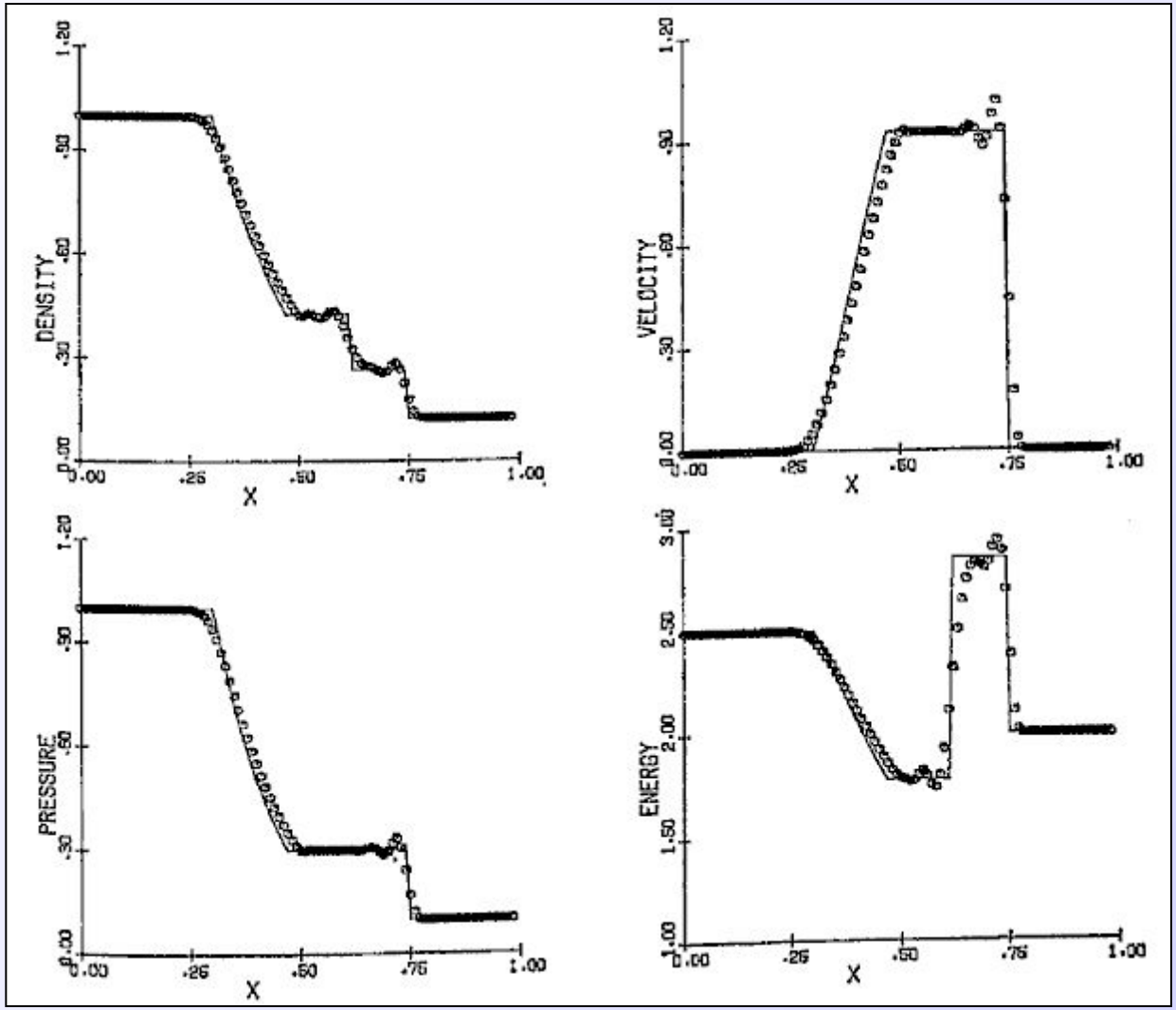
Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. – Springer, 1999.

Тест 2. Метод Роу с энтропийной коррекцией.



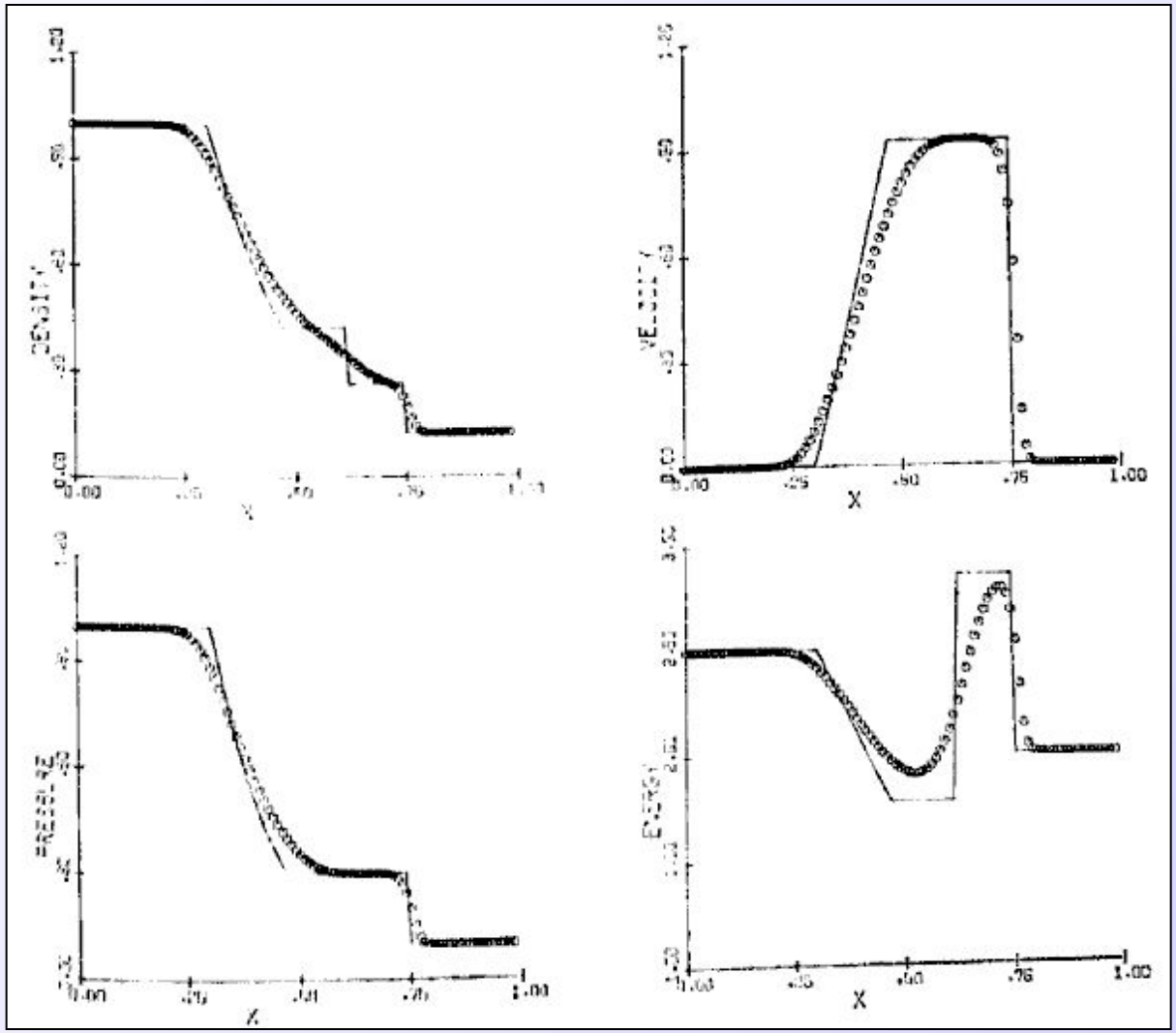
Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. – Springer, 1999.

Тест 1. Метод Лакса-Вендроффа.



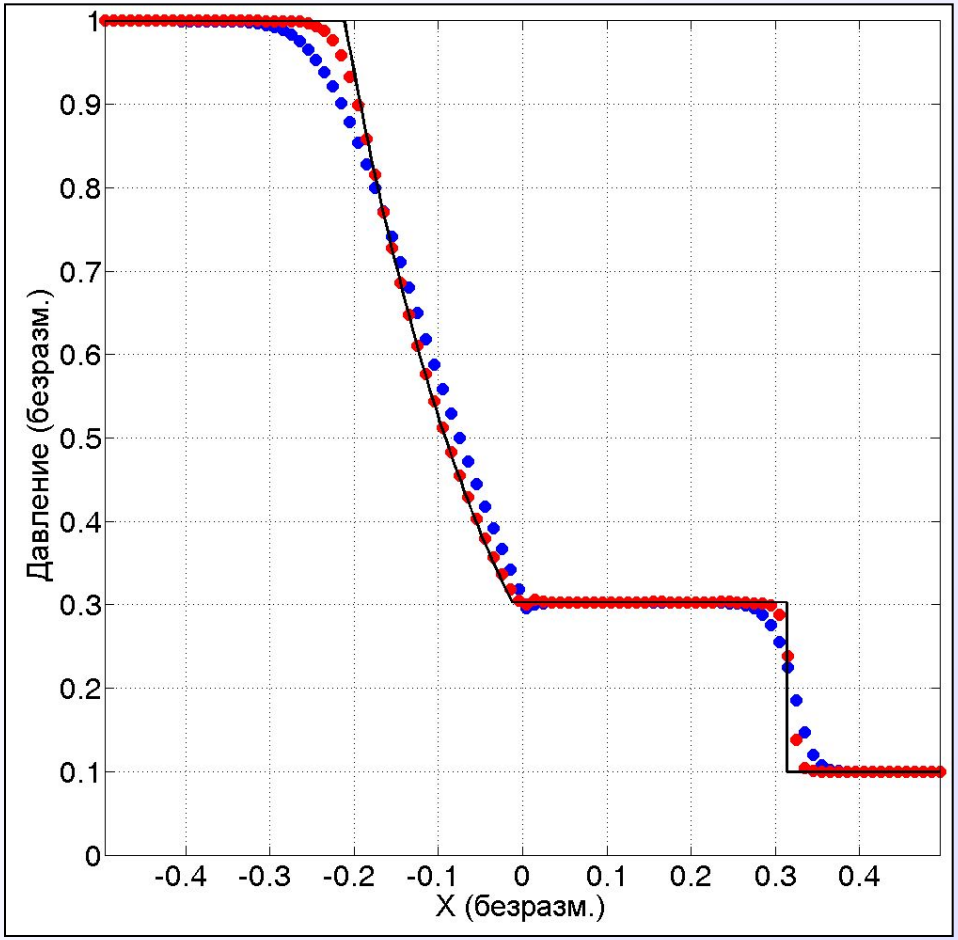
Sod G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. – 1978. – V. 27. – P. 1 – 31.

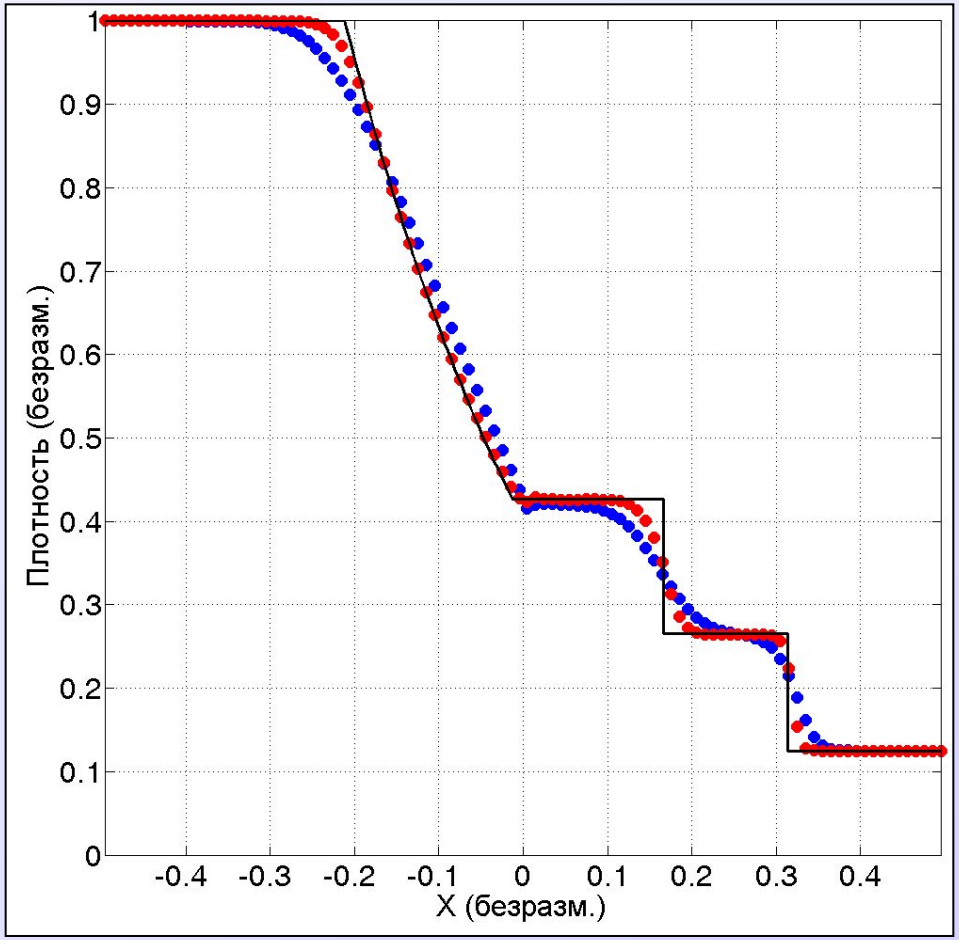
Тест 1. Метод Русанова.



Sod G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. – 1978. – V. 27. – P. 1 – 31.

Монотонные схемы повышенного порядка аппроксимации





- метод Годунова 1-го порядка аппроксимации
- метод Годунова повышенного порядка аппроксимации
- точное решение