

Семинар № 5

Система уравнений газовой динамики и разностные схемы для ее решения

к.ф.-м.н. Уткин Павел Сергеевич
e-mail: utkin@icad.org.ru, pavel_utk@mail.ru
(926) 2766560

Краткое содержание предыдущих семинаров

Семинар № 1 (07.02.14). Некоторые разностные схемы для решения линейного уравнения переноса.

Семинар № 2 (14.02.14). Построение схем для решения линейного уравнения переноса в пространстве неопределенных коэффициентов.

Семинар № 3 (21.02.14). Понятие монотонности разностных схем. Теорема Годунова.

Семинар № 4 (28.02.14). Обобщение на случай системы уравнений гиперболического типа.

Система уравнений газовой динамики

Дивергентная форма записи (в форме законов сохранения)

Вектор
консервативных
переменных

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{0}$$

Вектор
потоков

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho U \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + p \\ (E + p)U \end{bmatrix},$$

$$E = \frac{\rho U^2}{2} + \rho e, \quad e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

Полная
энергия

Внутренняя энергия
(уравнение состояния)

Анализ системы уравнений газовой динамики

Матрица
Якоби

Характеристическая
форма

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} - \lambda \mathbf{I}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = U + c \\ \lambda_2 = U \\ \lambda_3 = U - c \end{cases}$$

Скорость звука

$$c \triangleq \sqrt{p_\rho + \frac{pp_e}{\rho^2}}$$

Куликовский А.Г., Погорелов Н.В.,
Семенов А.Ю. Математические вопросы
численного решения гиперболических
систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001.

Гиперболическая система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + A(t, x, \mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{f}(t, x, \mathbf{v})$$

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^I, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^I, A \in \mathbb{R}^{I \times I}$$

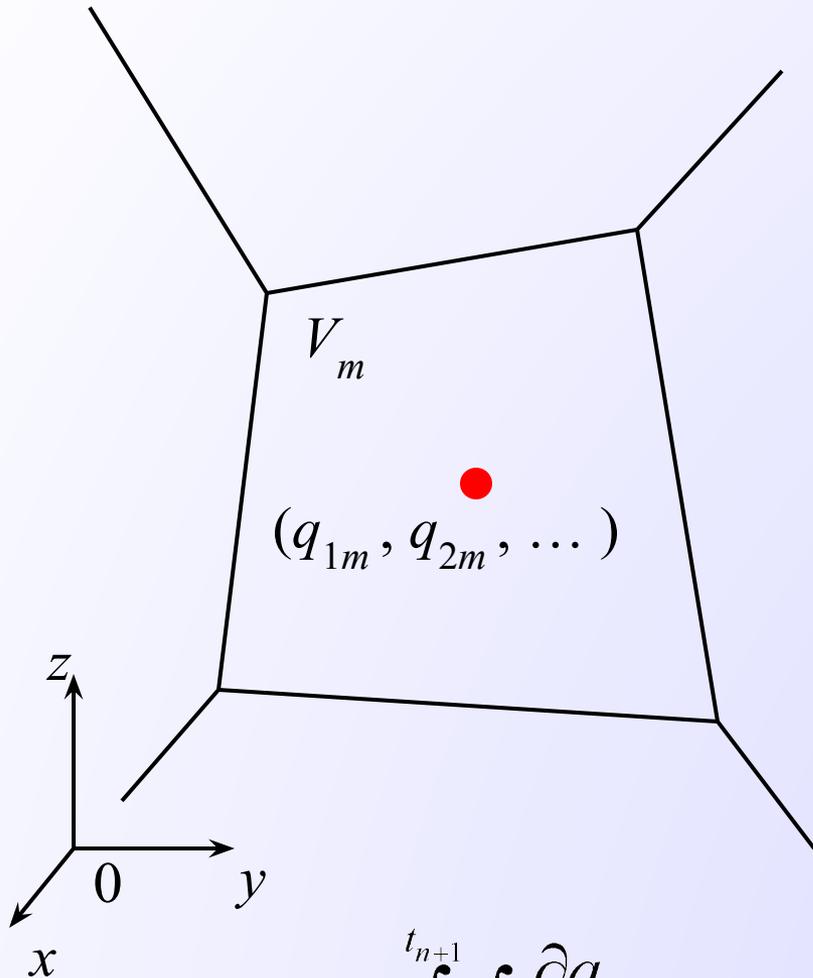
$$\det(A - \lambda E) = 0 \rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, I}$$

$$\vec{\omega}_i (A - \lambda_i E) = 0, \Omega = \{\vec{\omega}_1, \dots, \vec{\omega}_I\}^T$$

$$\det \Omega \neq 0$$

- Наличие конечной скорости распространения бесконечно слабых возмущений
- Возможность существования разрывных решений даже для гладких начальных данных

Метод конечных объемов (1)



Для произвольной компоненты вектора консервативных переменных:

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} + \frac{\partial f_{m1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{m2}}{\partial y} + \frac{\partial f_{m3}}{\partial z} = 0$$

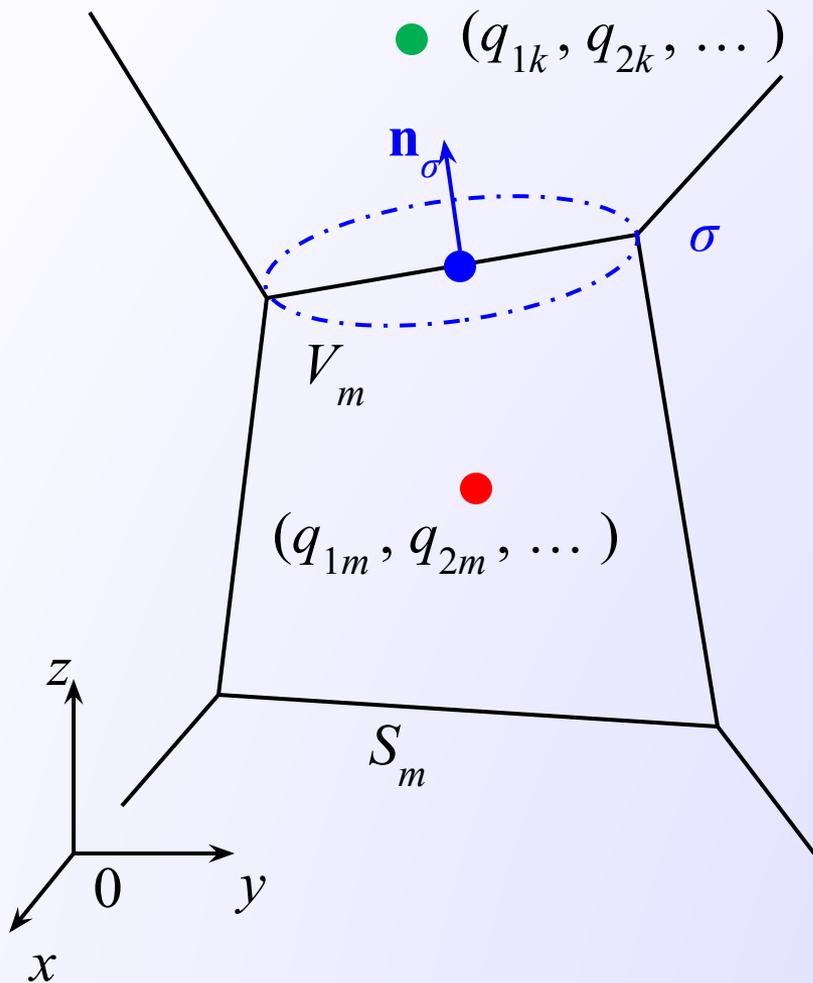
или

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{f}_m) = 0$$

Проинтегрируем по объему ячейки расчетной сетки и по времени:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{V_m} \frac{\partial q_m}{\partial t} dt dV + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{V_m} \text{div}(\mathbf{f}_m) dt dV = 0$$

Метод конечных объемов (2)



Возьмем интеграл в первом выражении и применим теорему Остроградского-Гаусса к расчету интеграла во втором:

$$V_m (q_m^{n+1} - q_m^n) + \tau \int_{S_m} (\mathbf{f}_m, \mathbf{n}) dS = 0$$

Аппроксимируем поверхностный интеграл через сумму интегралов по граням ячейки:

$$\frac{q_m^{n+1} - q_m^n}{\tau} + \frac{1}{V_m} \sum_{\sigma} F_{\sigma} S_{\sigma} = 0$$

Основной вопрос – как определять численный поток?

$$F_{\sigma} = F_{\sigma}(\mathbf{q}_m, \mathbf{q}_k)$$

Постановка задачи о распаде произвольного разрыва

Задача Коши для системы уравнений газовой динамики с разрывом первого рода в начальных данных

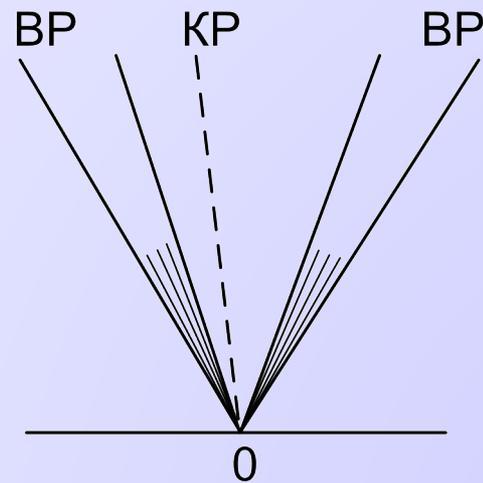
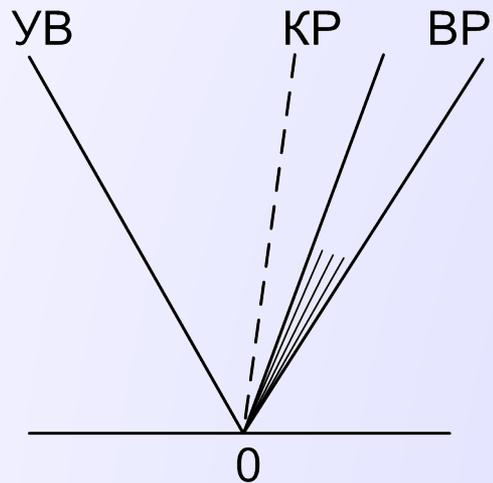
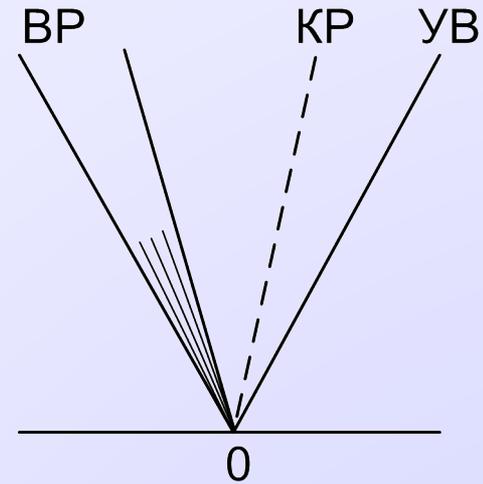
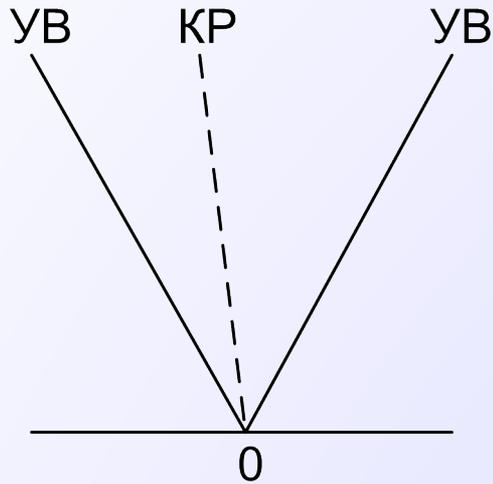
$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho U \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + p \\ (E + p)U \end{bmatrix},$$

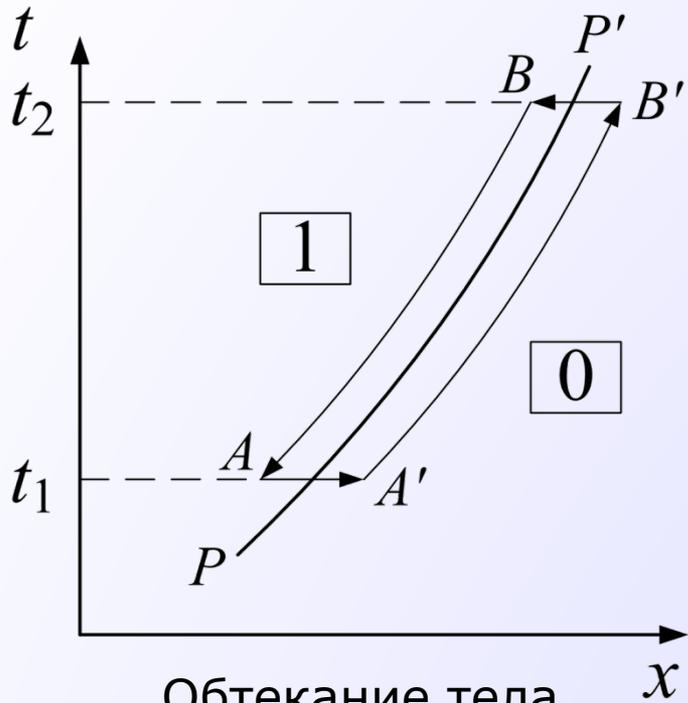
$$E = \frac{\rho U^2}{2} + \rho e, \quad e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)},$$

$$\mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_R & \text{при } x > 0, \\ \mathbf{q}_L & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Возможные конфигурации решения



Соотношения на разрыве



Соотношения Ренкина – Гюгонио:

$$\rho_1(U_1 - D) = \rho_0(U_0 - D)$$

$$\rho_1(U_1 - D)^2 + p_1 = \rho_0(U_0 - D)^2 + p_0$$

$$\rho_1(U_1 - D) \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{U_1^2}{2} \right) = \rho_0(U_0 - D) \left(e_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{U_0^2}{2} \right)$$

Разрывы

Ударные волны

$$U_1 \neq U_0$$

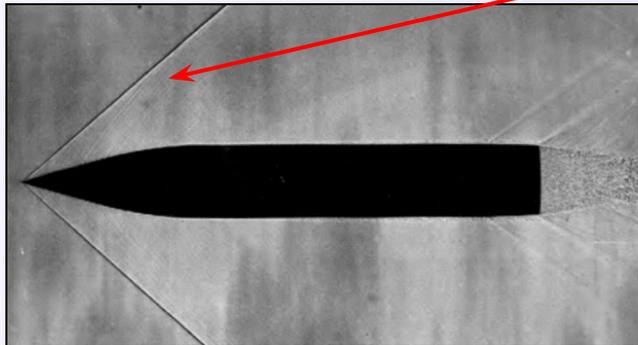
$$p_1 \neq p_0$$

$$\rho_1 \neq \rho_0$$

Контактные – нет
потока массы
вещества через
разрыв

$$U_1 = U_0 = D$$

$$p_1 = p_0, \rho_1 \neq \rho_0$$

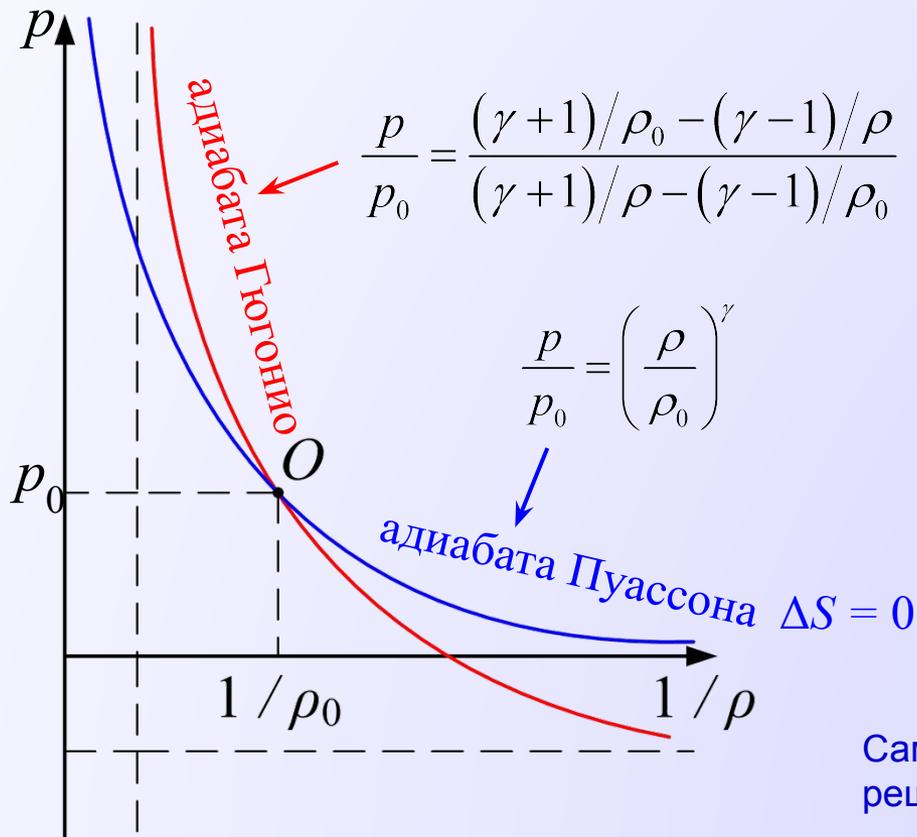


Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986.

Элементарная теория ударных волн

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(U_1 - D) &= \rho_0(U_0 - D) \\ \rho_1(U_1 - D)^2 + p_1 &= \rho_0(U_0 - D)^2 + p_0 \\ \rho_1(U_1 - D) \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{U_1^2}{2} \right) &= \rho_0(U_0 - D) \left(e_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{U_0^2}{2} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow e_1(p_1, \rho_1) - e_0(p_0, \rho_0) = \frac{1}{2}(p_1 + p_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) + e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

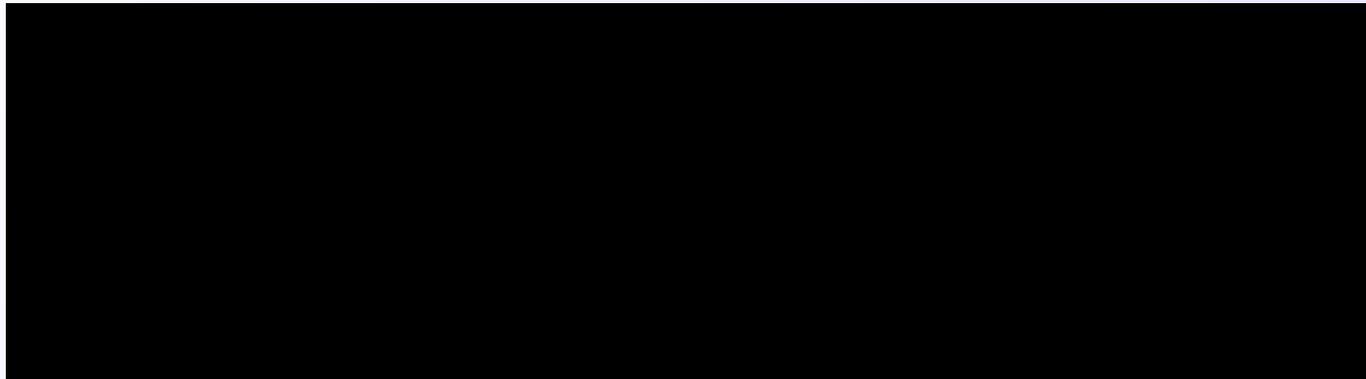
Адиабата Гюгонио



- В ударной волне газ нельзя сжать больше, чем в $(\gamma + 1) / (\gamma - 1)$ раз.
- Ударная волна бесконечно малой интенсивности распространяется относительно газа со скоростью звука.
- Фронт ударной волны распространяется относительно фона со сверхзвуковой скоростью.
- Теорема Цемплена: не существует ударных волн разрежения.

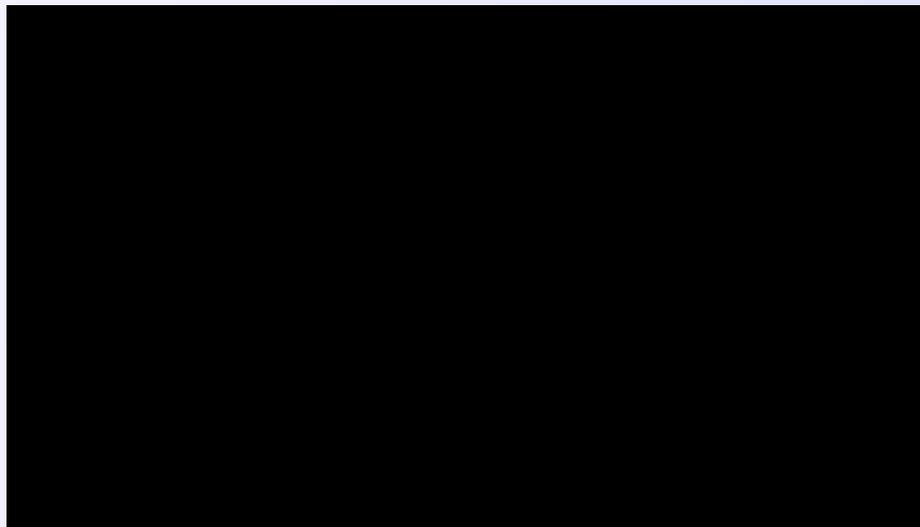
Самарский А.А., Попов Ю.И. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992.

Соотношения для ударных волн и волн разрежения



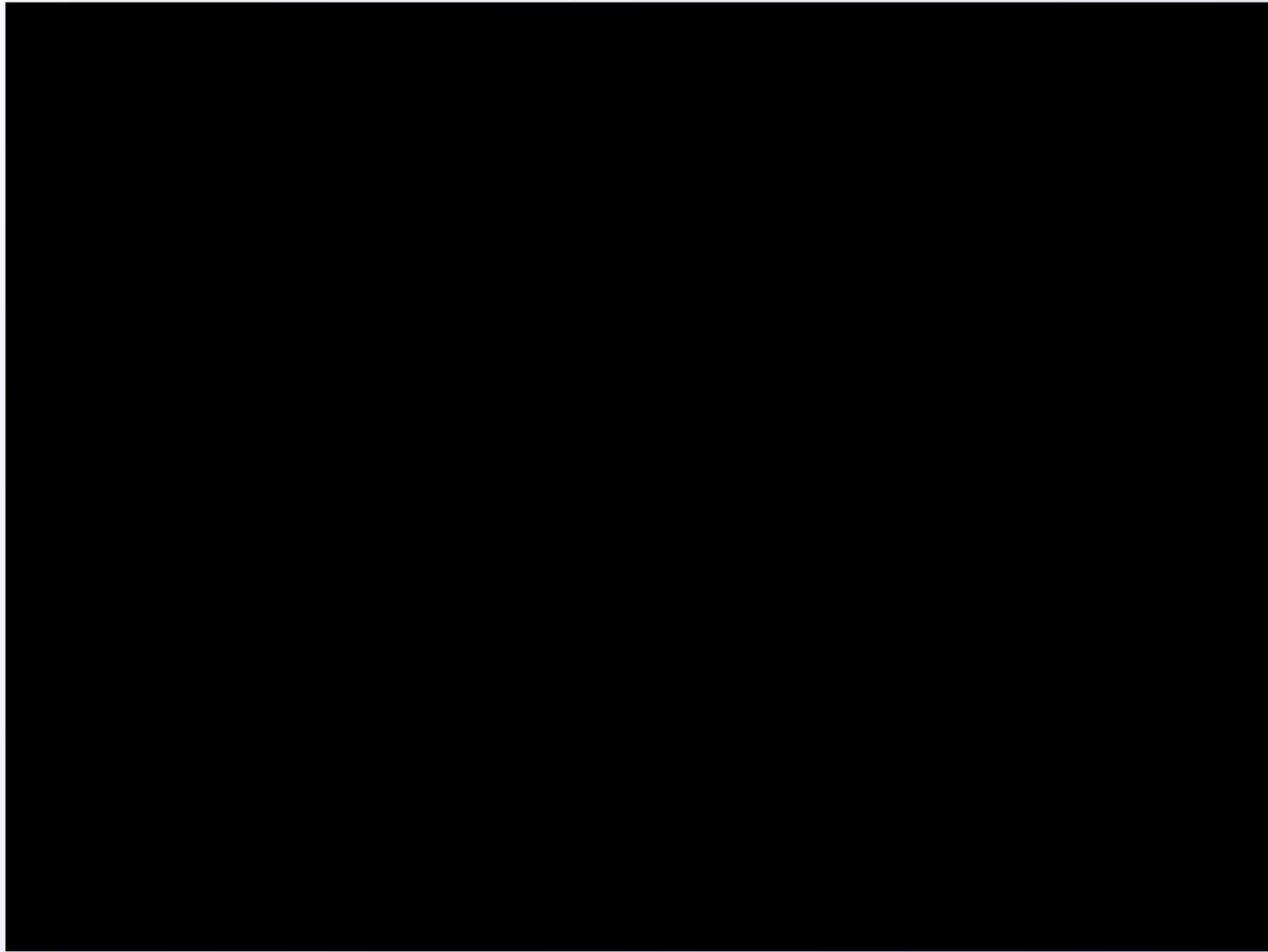
«левая» УВ

«правая» УВ



«левая» ВР

«правая» ВР



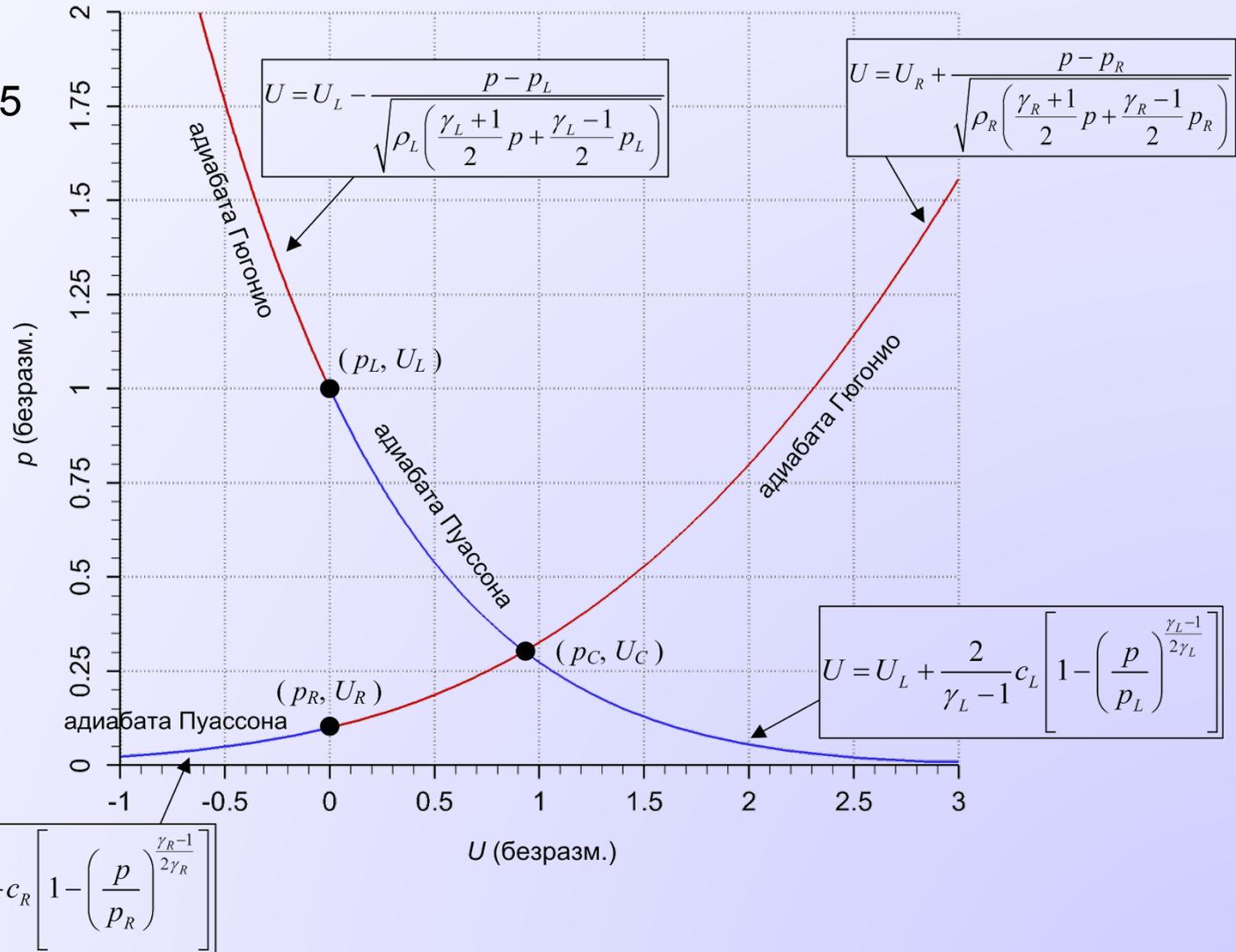
Система тестов

№	Описание	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R
1	"Тест Сода"	1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1
2	"Модифицированный тест Сода"	1.0	0.75	1.0	0.125	0.0	0.1
3	"Две волны разрежения"	1.0	-2.0	0.4	1.0	2.0	0.4
4	"Очень сильный градиент"	1.0	0.0	1000.0	1.0	0.0	0.01
5	"Три сильных разрыва вправо"	5.9992	19.598	460.89	5.992	-6.2	46.1

Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. – Springer, 1999.

Тест 1. Задача Сода. Анализ (p-v)-диаграммы.

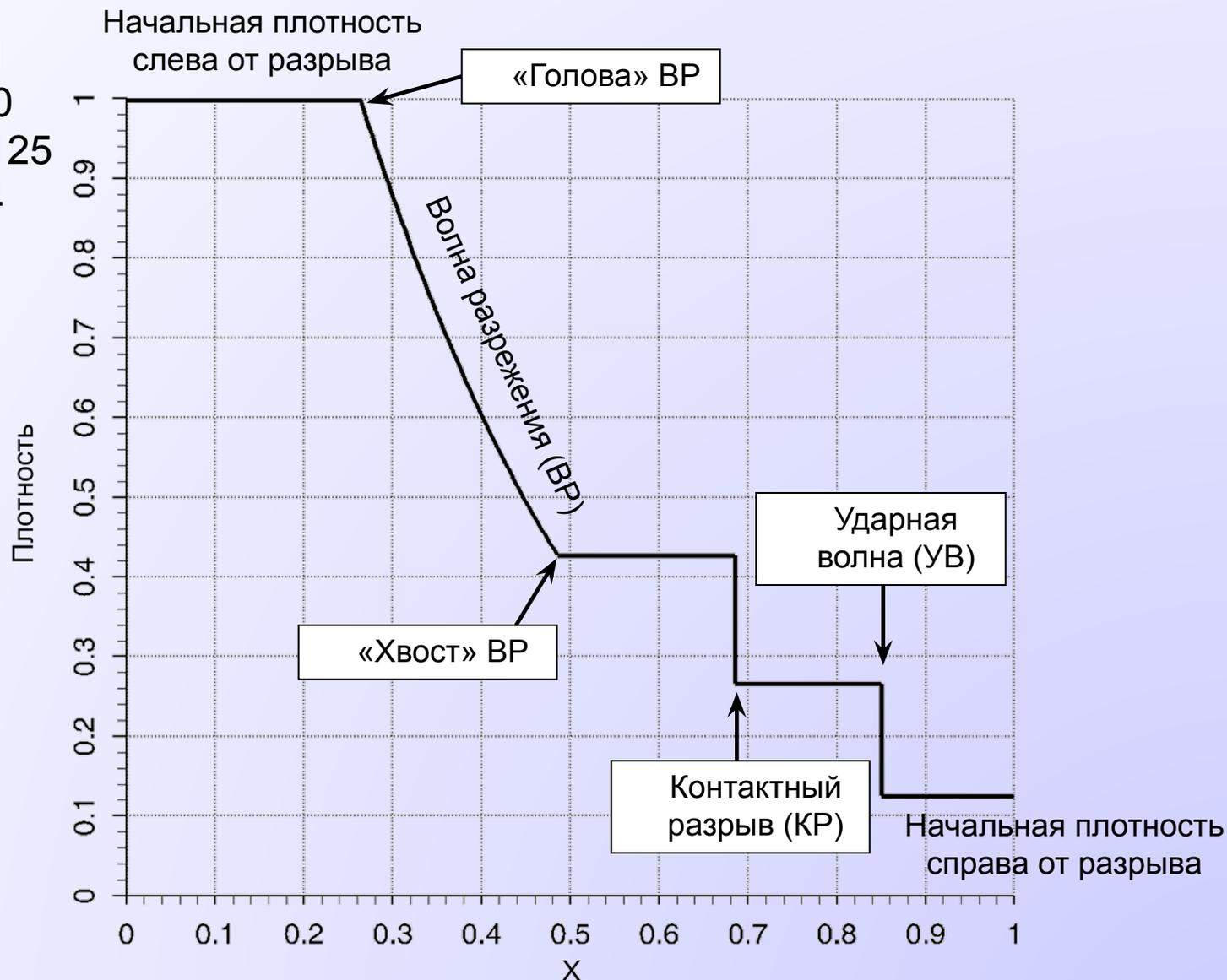
$$\left. \begin{array}{l} \rho_L = 1.0 \\ U_L = 0.0 \\ \rho_L = 1.0 \\ \gamma_L = 1.4 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \rho_R = 0.1 \\ U_R = 0.0 \\ \rho_R = 0.125 \\ \gamma_R = 1.4 \end{array} \right.$$



Тест 1. Задача Сода. Точное решение. Распределение плотности.

$$\begin{array}{l|l} \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.1 \\ U_L = 0.0 & U_R = 0.0 \\ \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.125 \\ Y_L = 1.4 & Y_R = 1.4 \end{array}$$

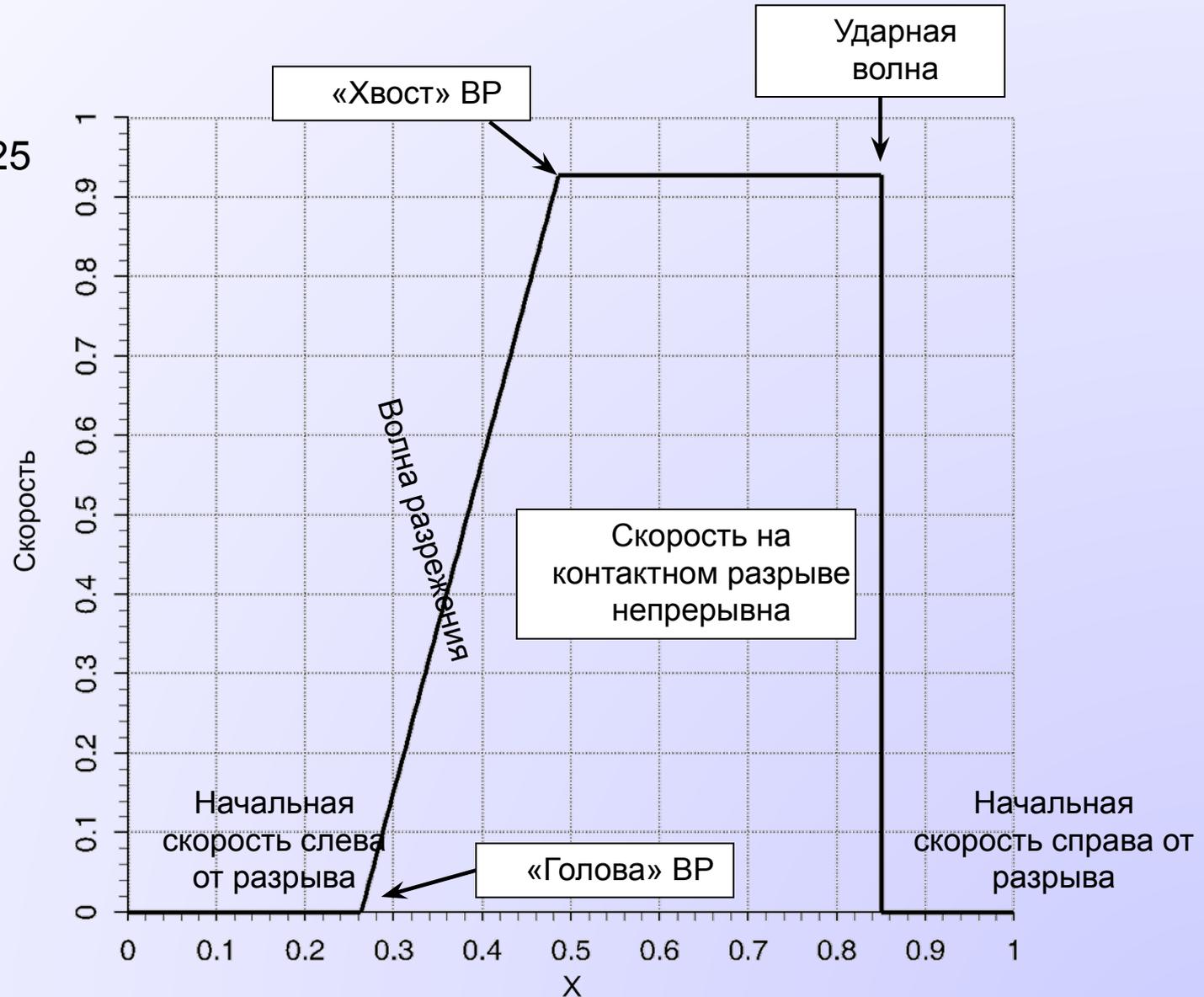
$x_0 = 0.5$
 $t = 0.2$



Тест 1. Задача Сода. Точное решение. Распределение скорости.

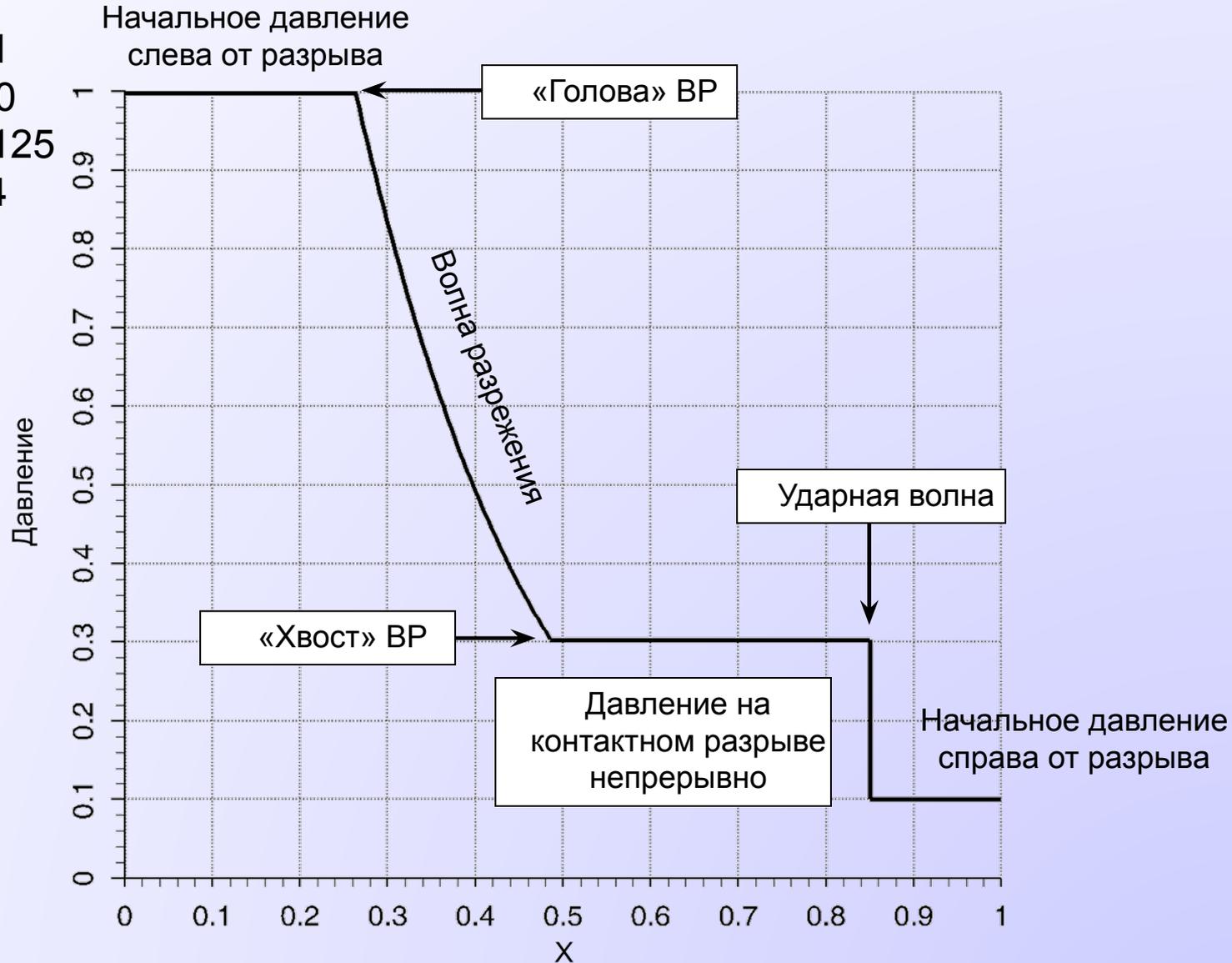
$$\begin{array}{l|l} \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.1 \\ U_L = 0.0 & U_R = 0.0 \\ \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.125 \\ \gamma_L = 1.4 & \gamma_R = 1.4 \end{array}$$

$x_0 = 0.5$
 $t = 0.2$



Тест 1. Задача Сода. Точное решение. Распределение давления.

$$\begin{array}{l|l} \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.1 \\ U_L = 0.0 & U_R = 0.0 \\ \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.125 \\ \gamma_L = 1.4 & \gamma_R = 1.4 \\ \hline x_0 = 0.5 \\ t = 0.2 \end{array}$$

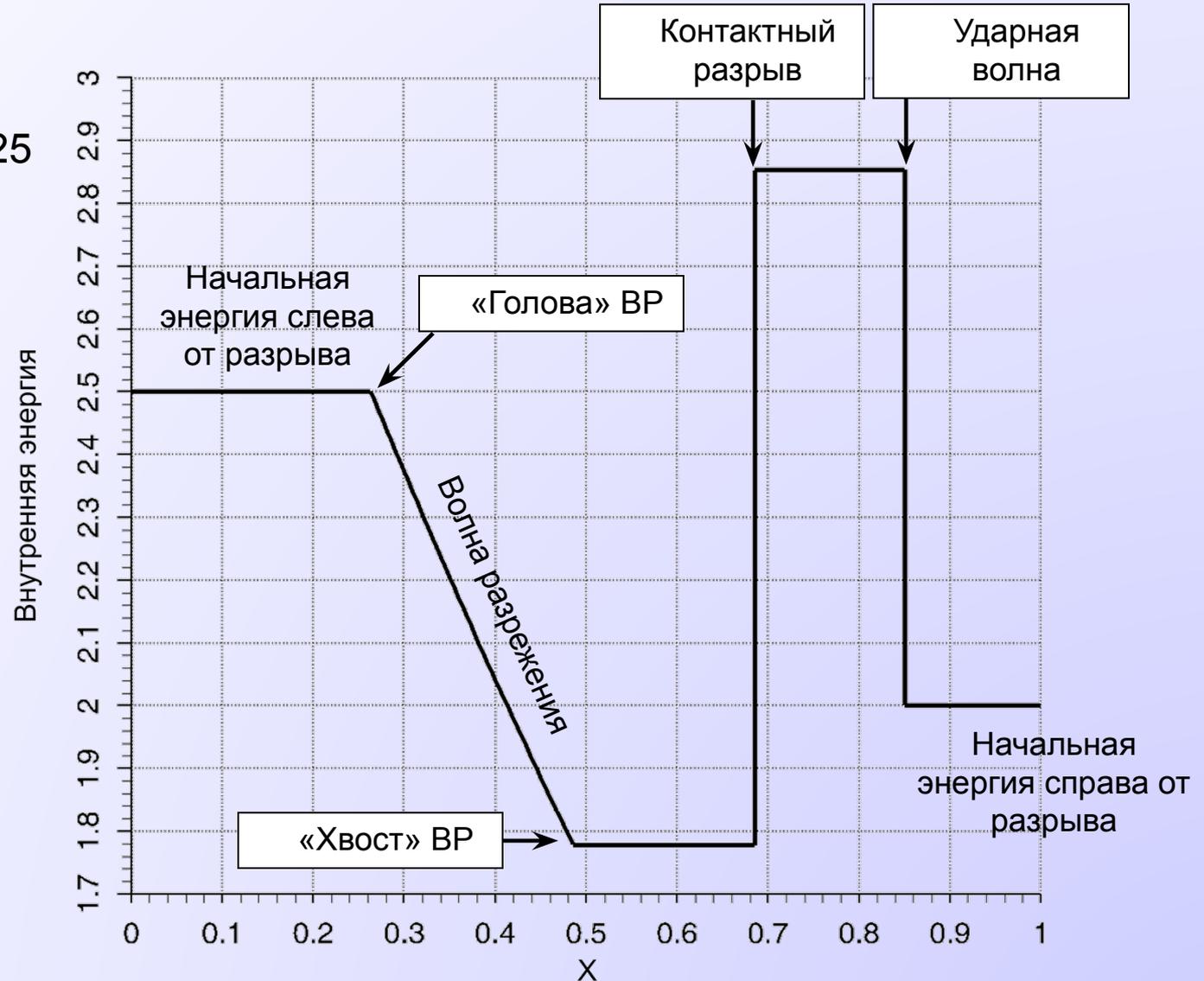


Тест 1. Задача Сода. Точное решение. Распределение внутренней энергии.

$$\left. \begin{array}{l} \rho_L = 1.0 \\ U_L = 0.0 \\ \rho_L = 1.0 \\ \gamma_L = 1.4 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \rho_R = 0.1 \\ U_R = 0.0 \\ \rho_R = 0.125 \\ \gamma_R = 1.4 \end{array} \right.$$

$$x_0 = 0.5 \\ t = 0.2$$

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$



Алгоритм построения точного решения

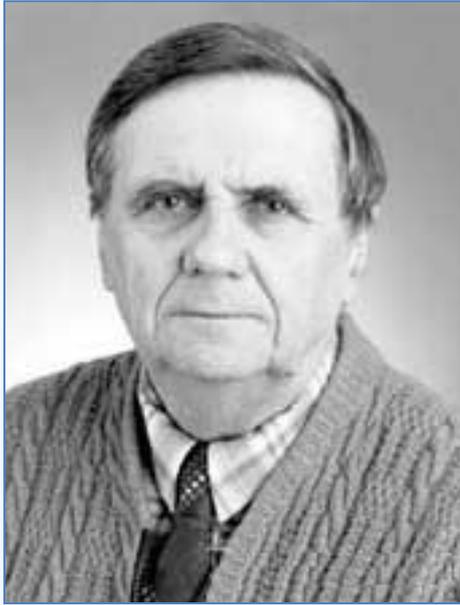
1. Определяем по $(p-v)$ -диаграмме конфигурацию, возникающую при распаде.

Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992.

2. В результате решения нелинейного алгебраического уравнения методом Ньютона ищем давление на контактном разрыве.

3. Определяем оставшиеся параметры – скорости ударных волн и наклоны крайних характеристик, описывающих веер волны разрежения.

Годунов С.К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976.



Сергей
Константинович
Годунов
род. 1929 г.,
академик РАН

Тестирование схемы С. К. Годунова решения уравнений газовой динамики

Тест 1. Задача Сода. Метод Годунова. Распределение плотности.

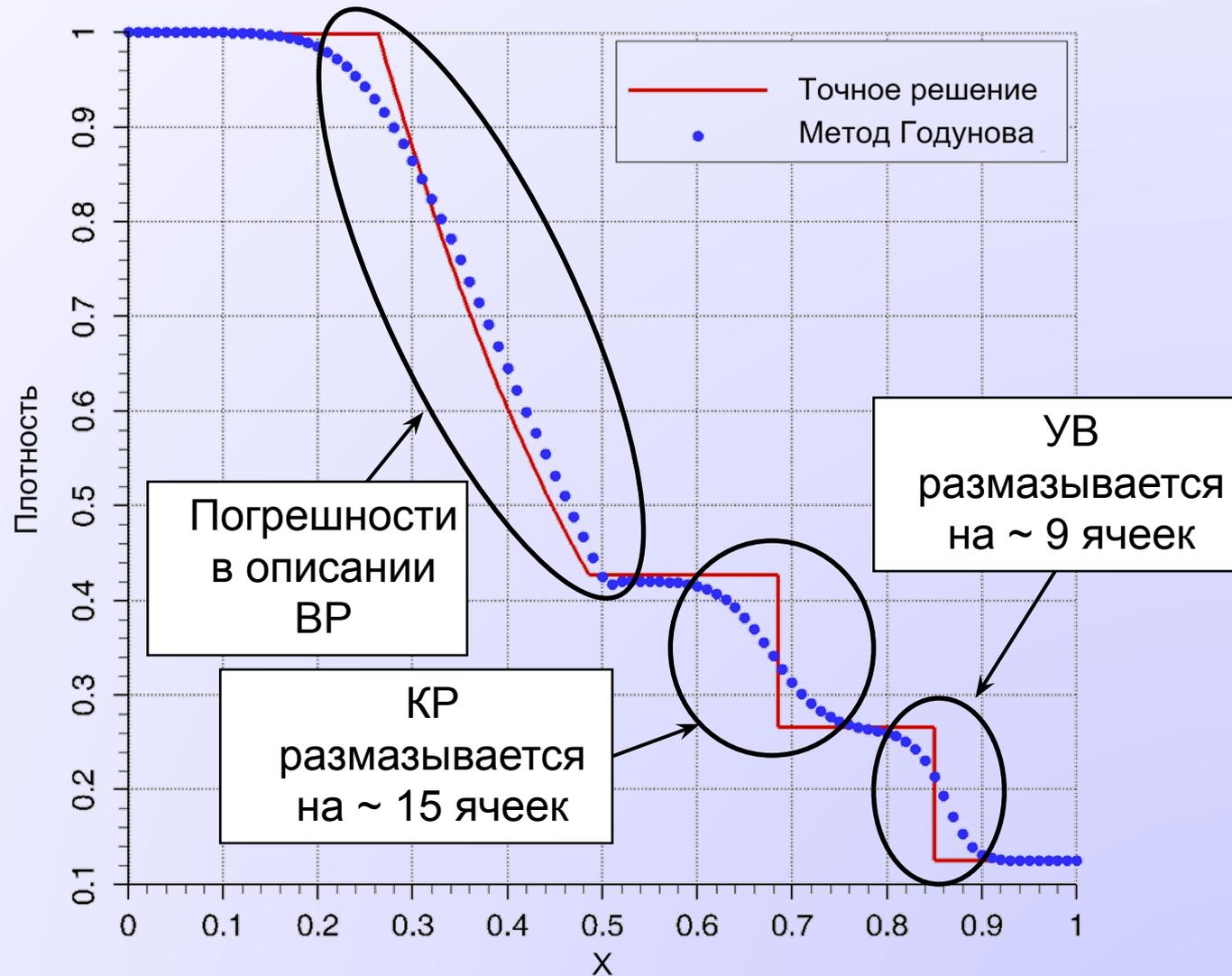
$$\begin{array}{l|l} \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.1 \\ U_L = 0.0 & U_R = 0.0 \\ \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.125 \\ Y_L = 1.4 & Y_R = 1.4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_0 = 0.5 \\ t = 0.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta x = 0.01 \\ \Delta t = 0.001 \end{array}$$

Схема С.К. Годунова:

- 1-ый порядок аппроксимации
- Монотонность
- Физичность результатов (есть исключения)

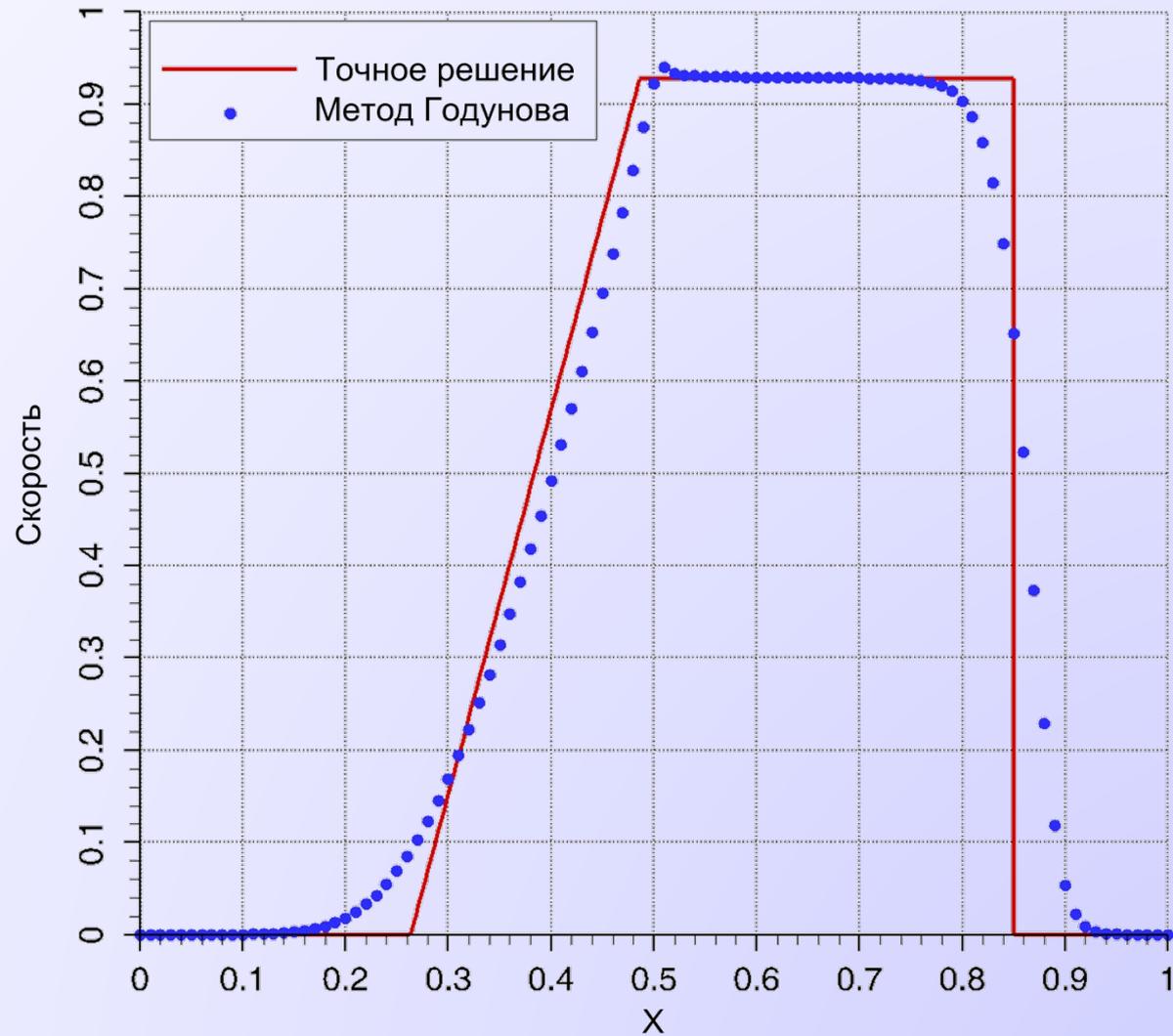


Тест 1. Задача Сода. Метод Годунова. Распределение скорости.

$$\left. \begin{array}{l} \rho_L = 1.0 \\ U_L = 0.0 \\ \rho_L = 1.0 \\ Y_L = 1.4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \rho_R = 0.1 \\ U_R = 0.0 \\ \rho_R = 0.125 \\ Y_R = 1.4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_0 = 0.5 \\ t = 0.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta x = 0.01 \\ \Delta t = 0.001 \end{array}$$

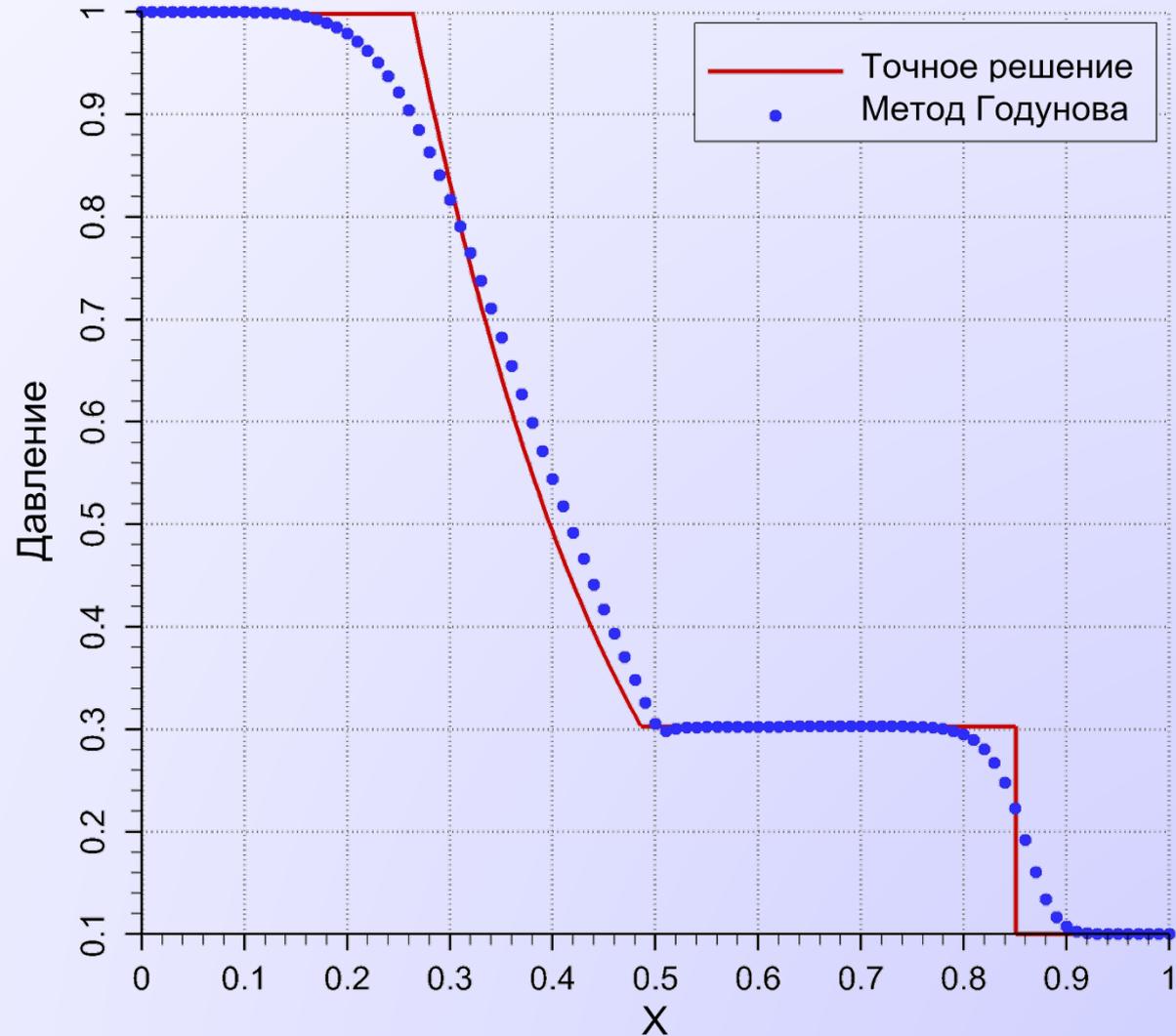


Тест 1. Задача Сода. Метод Годунова. Распределение давления.

$$\begin{array}{l|l} \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.1 \\ U_L = 0.0 & U_R = 0.0 \\ \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.125 \\ Y_L = 1.4 & Y_R = 1.4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_0 = 0.5 \\ t = 0.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta x = 0.01 \\ \Delta t = 0.001 \end{array}$$



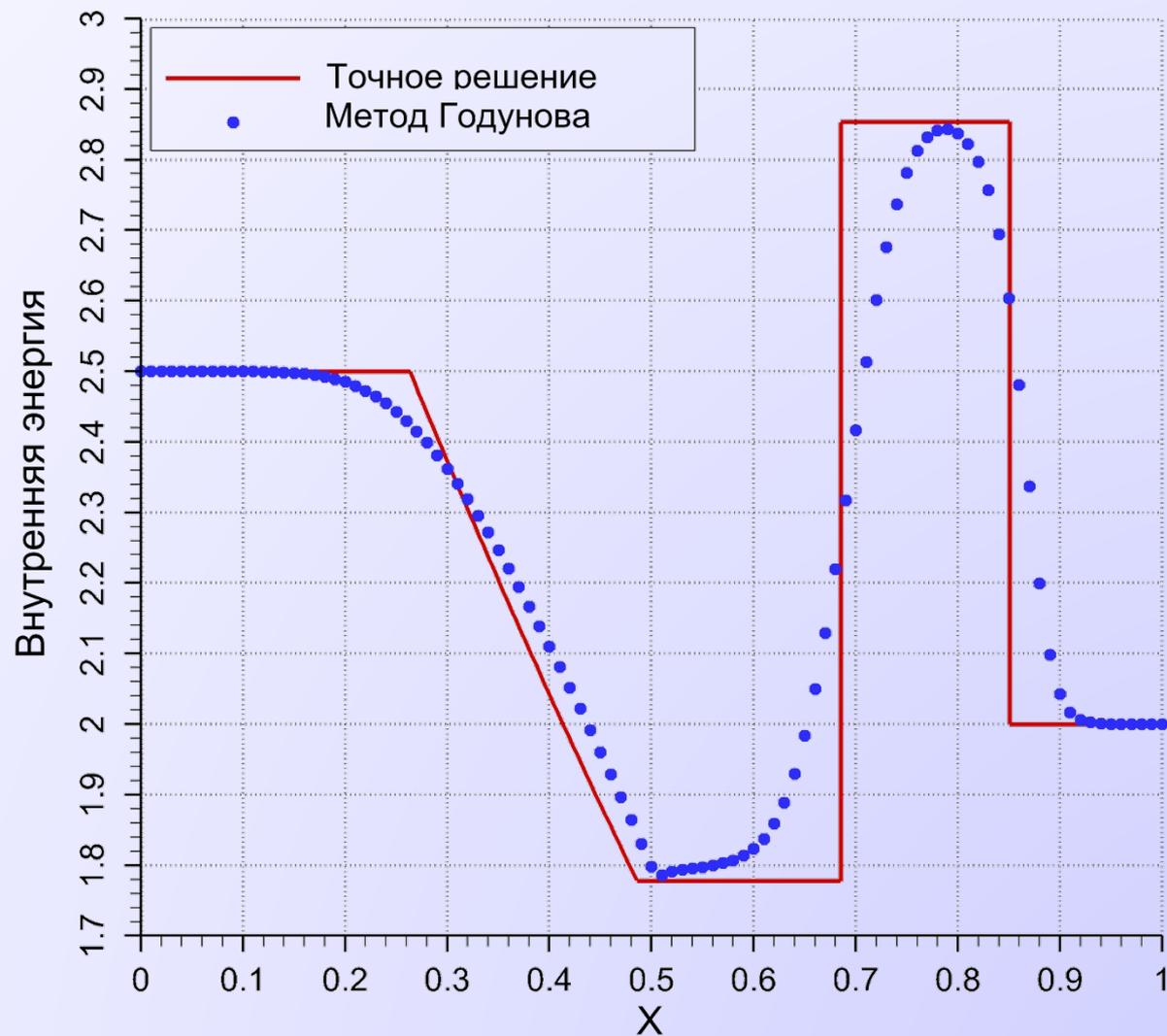
Тест 1. Задача Сода. Метод Годунова. Распределение внутренней энергии.

$$\begin{array}{l|l} \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.1 \\ U_L = 0.0 & U_R = 0.0 \\ \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.125 \\ Y_L = 1.4 & Y_R = 1.4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_0 = 0.5 \\ t = 0.2 \end{array}$$

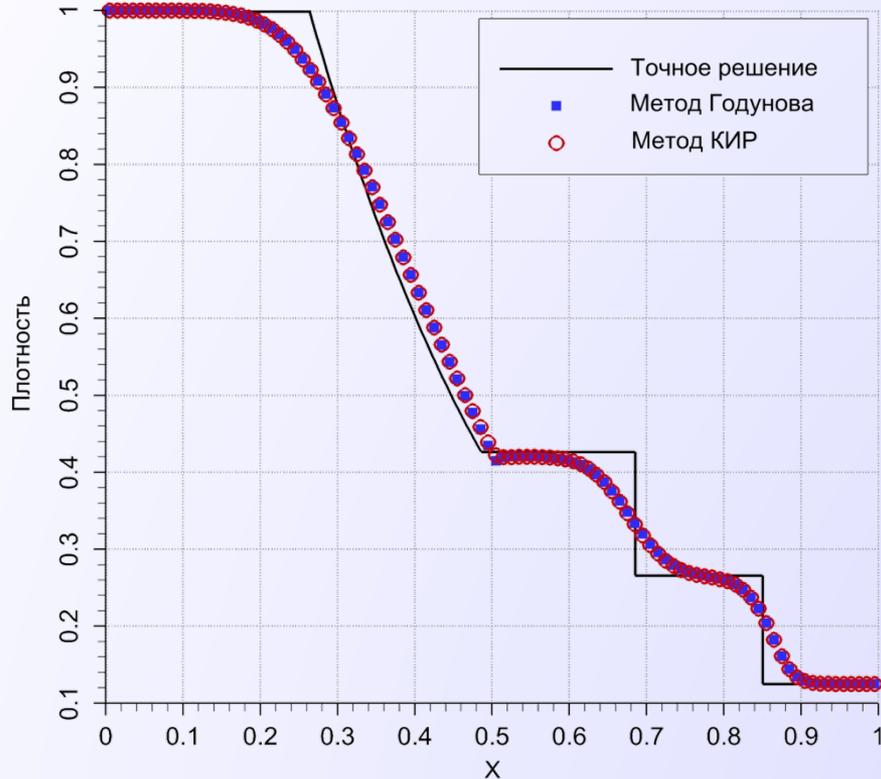
$$\begin{array}{l} \Delta x = 0.01 \\ \Delta t = 0.001 \end{array}$$

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

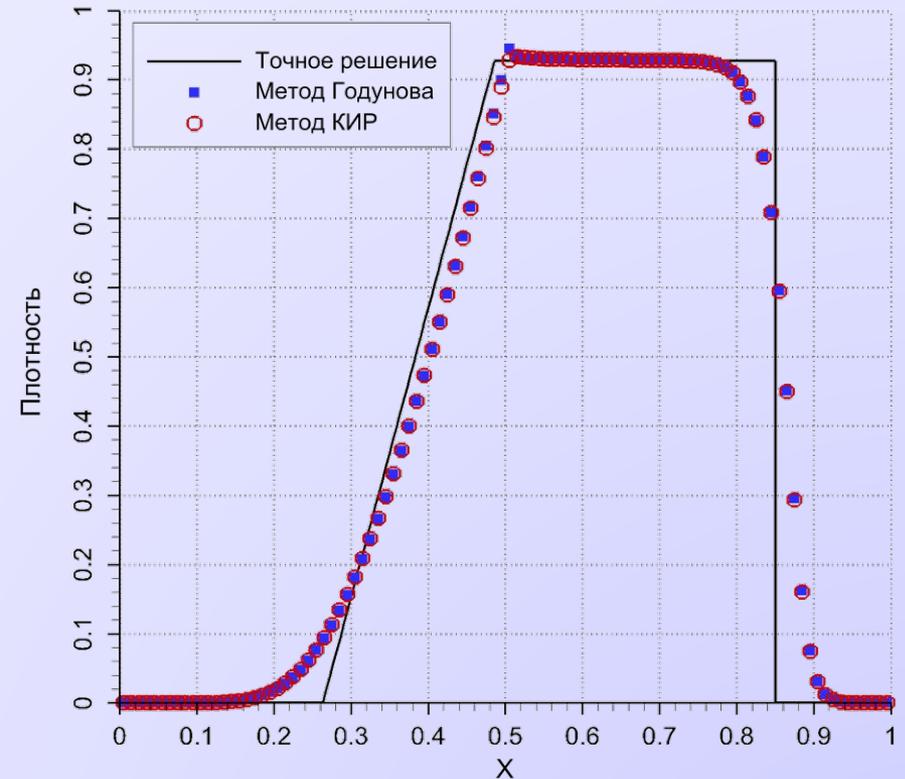


Тест 1. Задача Сода. Сравнение методов Годунова и КИР (1).

Распределение плотности

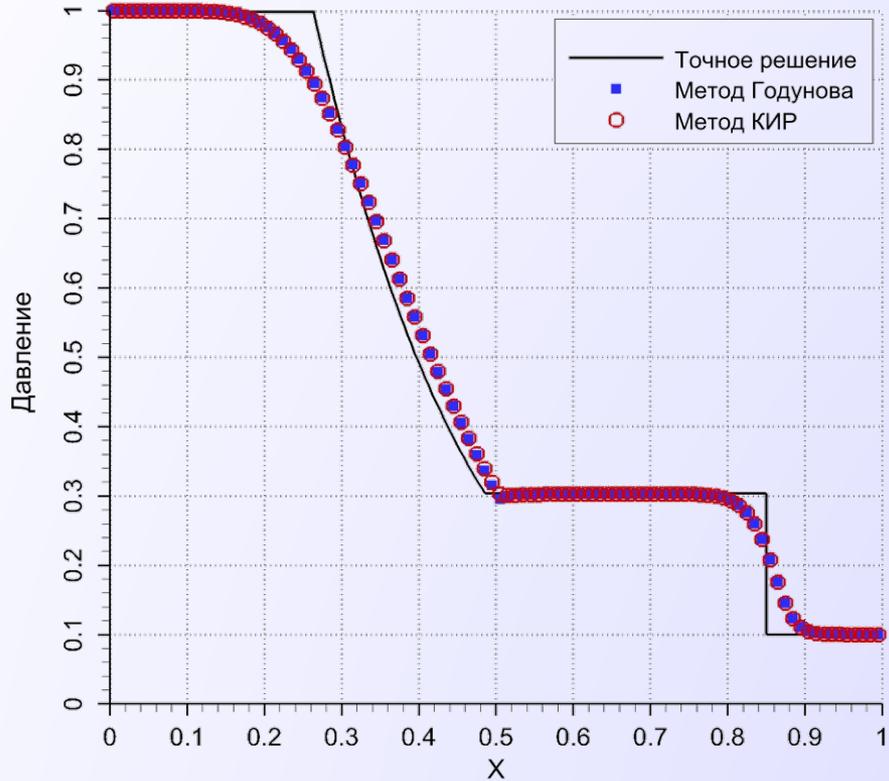


Распределение скорости

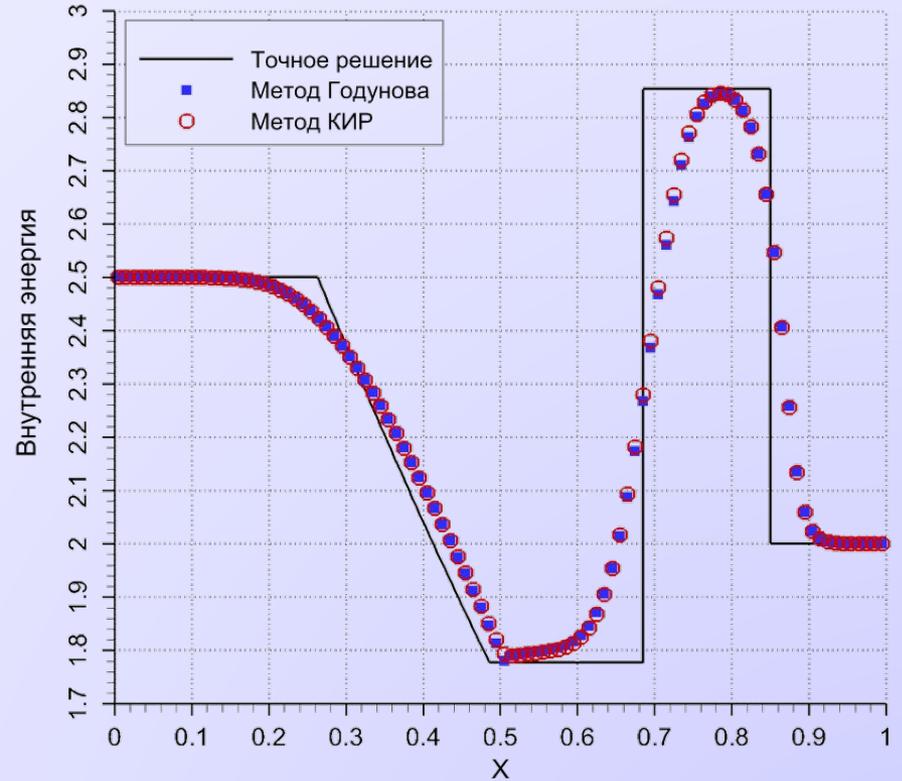


Тест 1. Задача Сода. Сравнение методов Годунова и КИР (2).

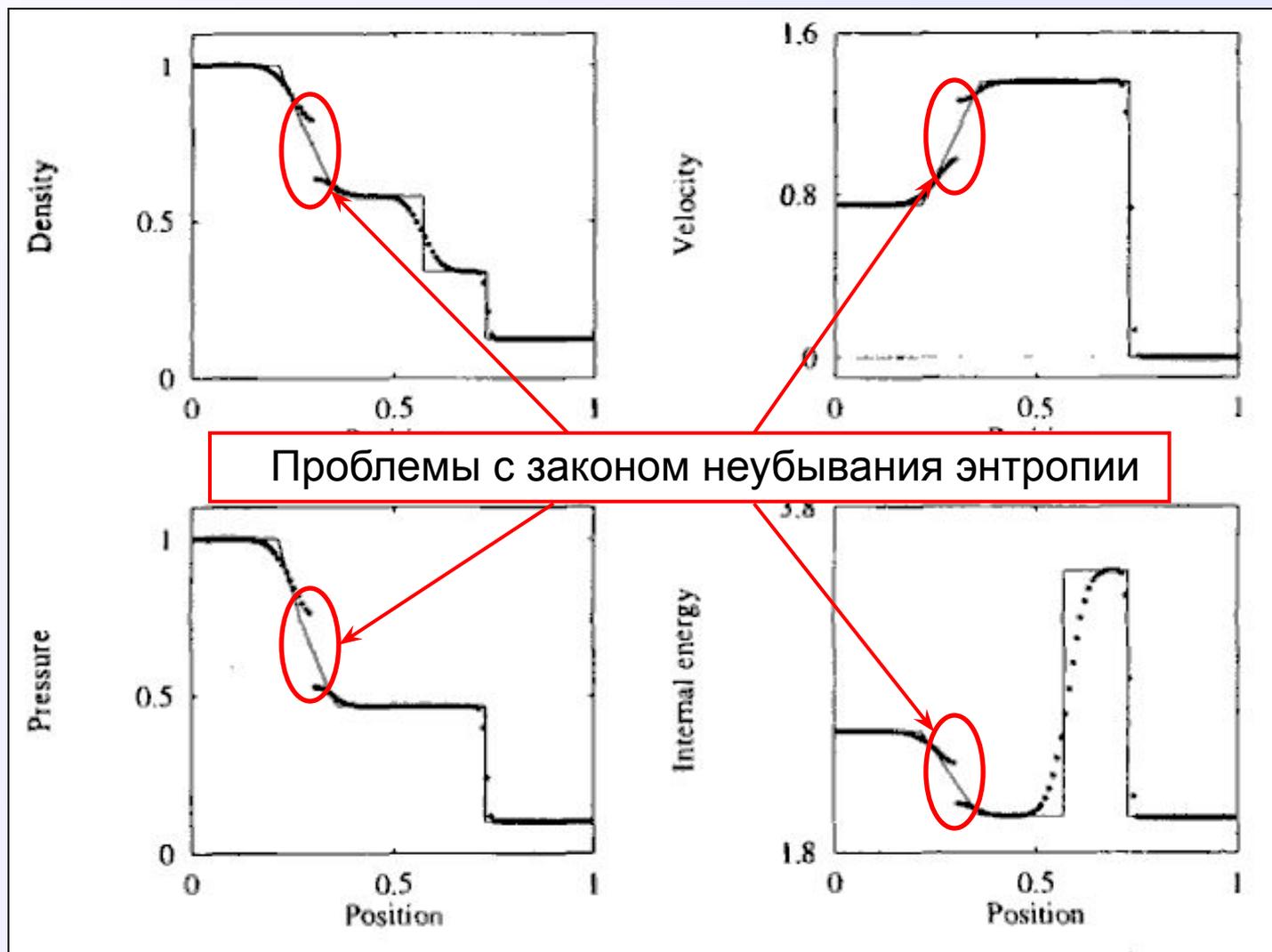
Распределение давления



Распределение внутренней энергии

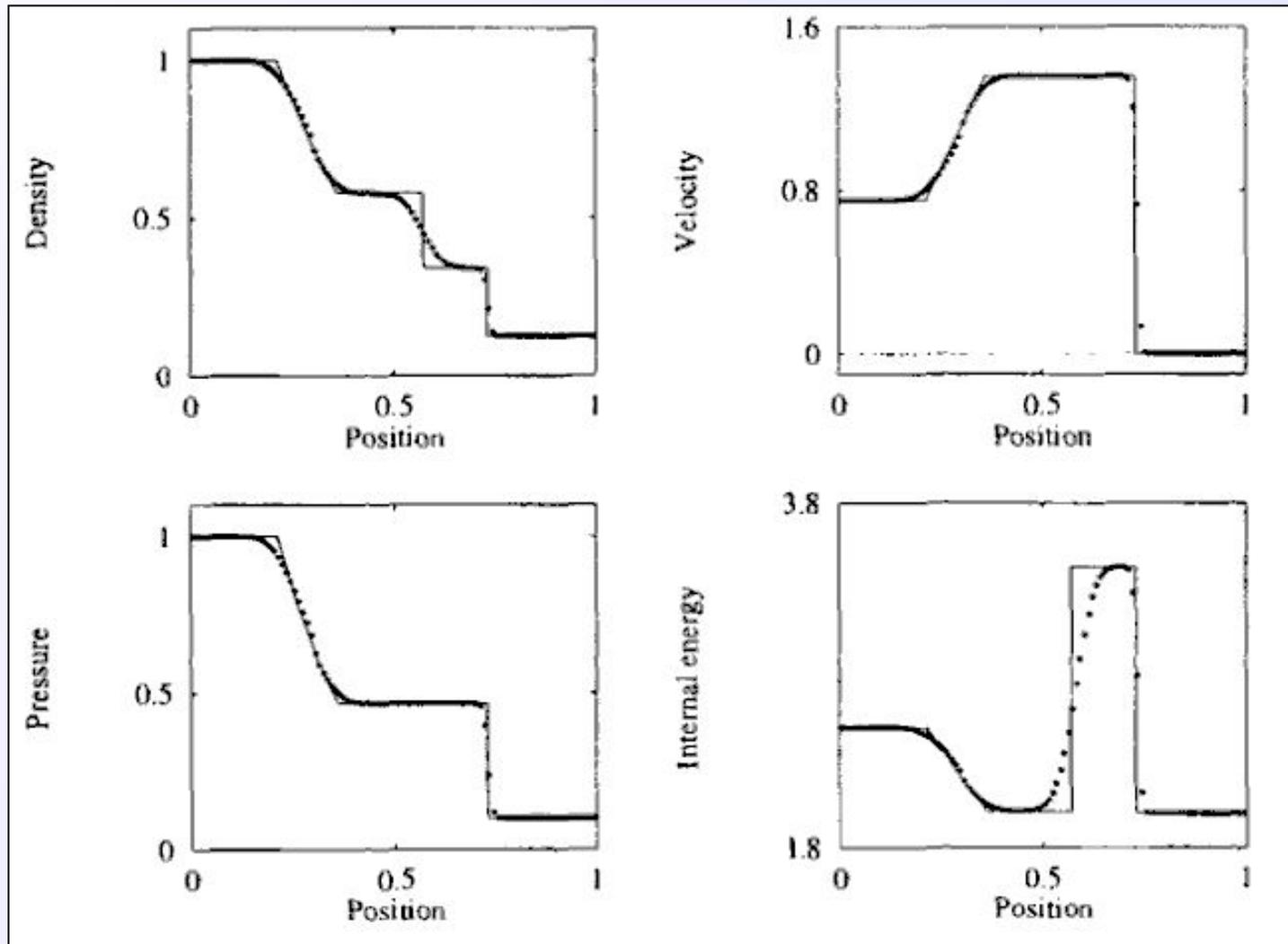


Тест 2. Метод Рое (Roe).



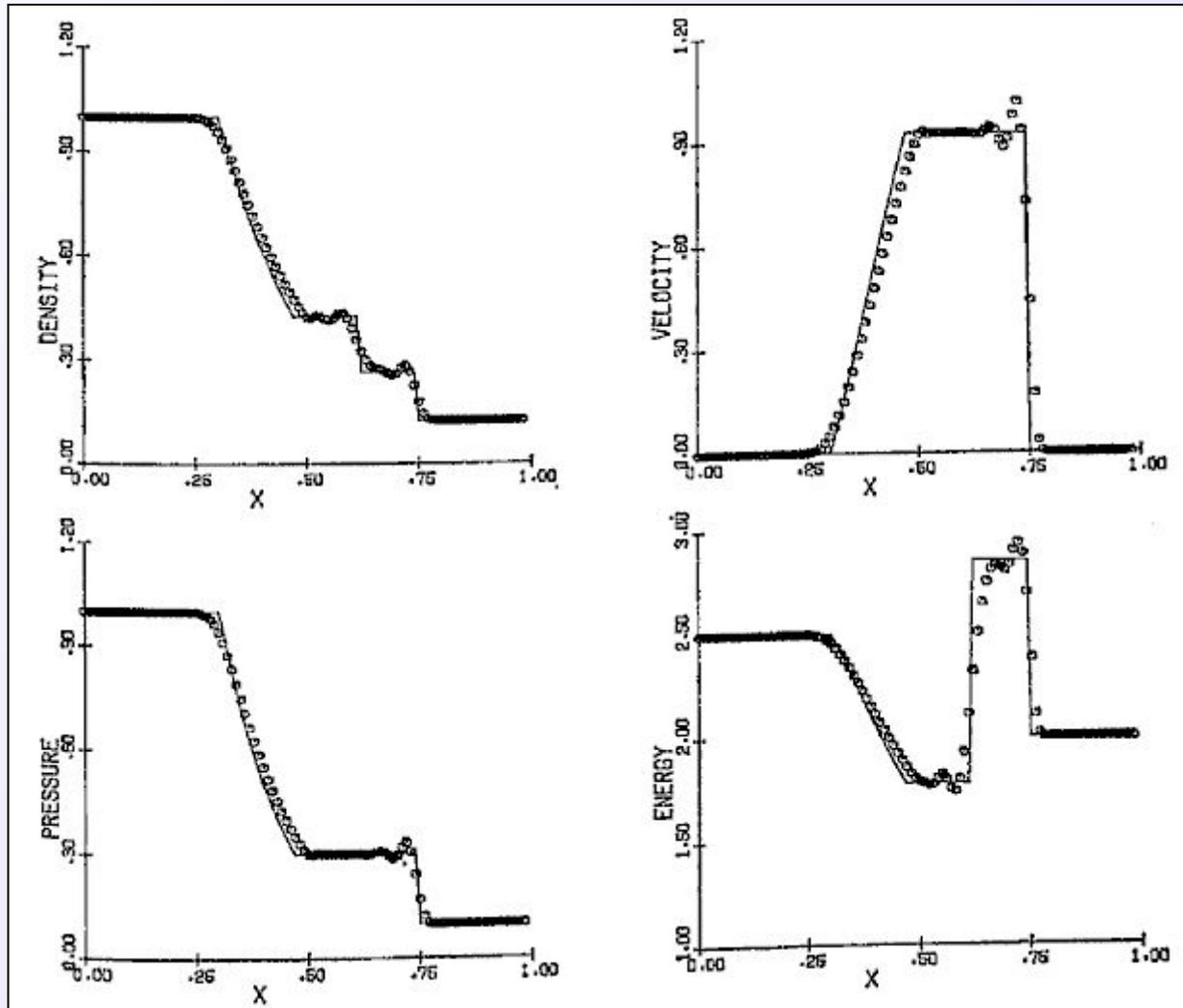
Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. – Springer, 1999.

Тест 2. Метод Рунге с энтропийной коррекцией.



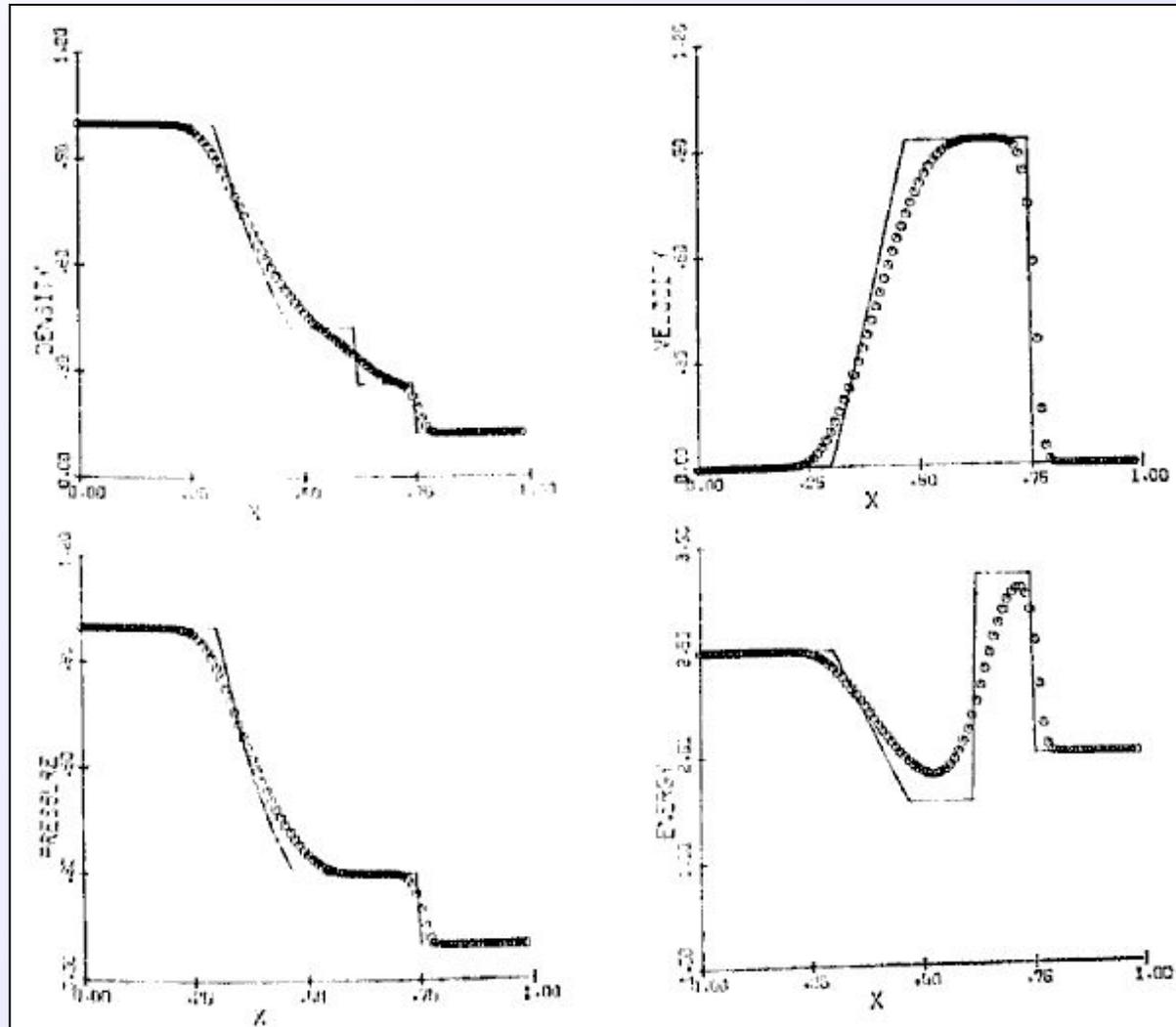
Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. – Springer, 1999.

Тест 1. Метод Лакса-Вендроффа.



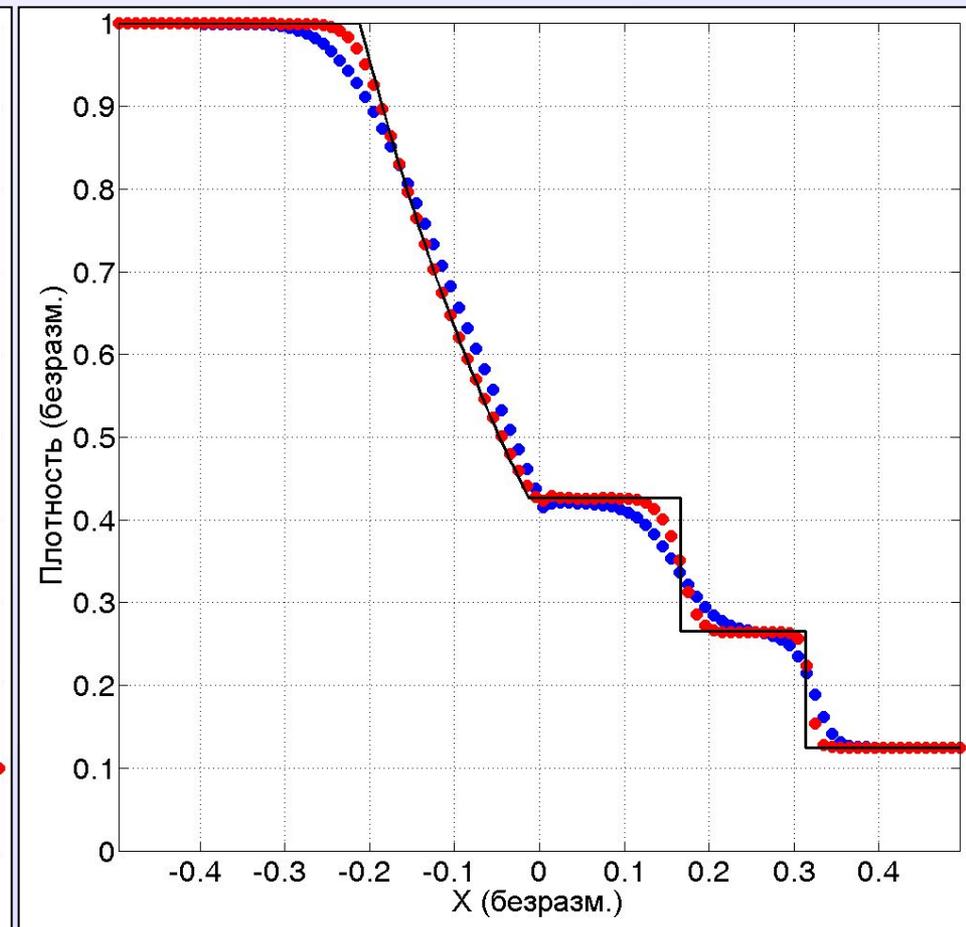
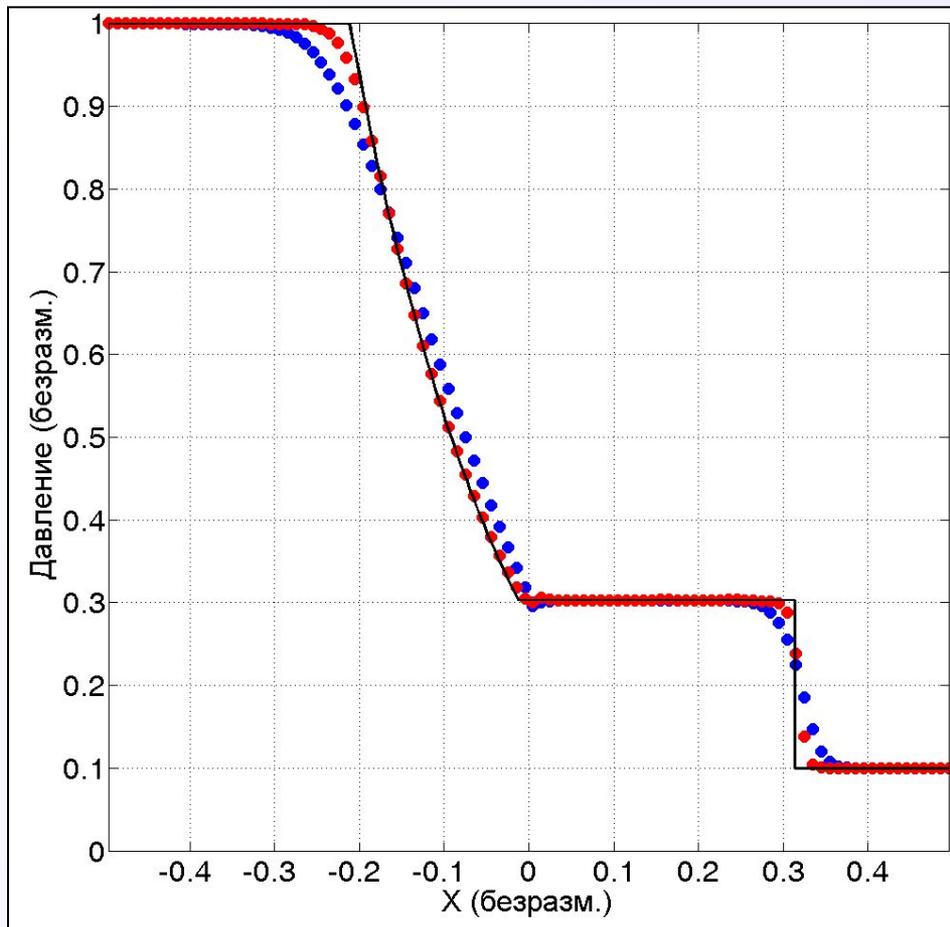
Sod G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. – 1978. – V. 27. – P. 1 – 31.

Тест 1. Метод Русанова.



Sod G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. – 1978. – V. 27. – P. 1 – 31.

Монотонные схемы повышенного порядка аппроксимации



- метод Годунова 1-го порядка аппроксимации
- метод Годунова повышенного порядка аппроксимации
- точное решение