ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава II
Системы линейных алгебраических уравнений

Лекция № 2

ИЯФиТ

доцент ***Волков Н.П.***

2.2. Общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений (ФСР) однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим однородную систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1_0)$$

или в матричной форме

$$\mathrm{A} \cdot \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}\,, \qquad (1_0'')$$

где $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ есть матрица системы (1_0).

Теорема 2.3. *Если* $\mathbf{Rg\,A} = r < n$, *то однородная система линейных алгебраических уравнений* (1_0) *имеет* $(n-r)$ *линейно независимых решений* $\underset{\downarrow}{\alpha}^{1}, \cdots, \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r}$. *При этом общее решение системы* (1_0) *имеет вид:*

$$\underset{\downarrow}{\alpha}_{oo} = \mathrm{C}_1 \underset{\downarrow}{\alpha}^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{n-r} \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r}\,, \qquad (3)$$

где произвольные постоянные $\mathrm{C}_1, \cdots, \mathrm{C}_{n-r} \in \mathrm{R}$.

Доказательство разобьем на три этапа.

1) Начнем с существования $(n-r)$ нетривиальных решений системы (1_0).

Пусть $\mathbf{Rg\,A} = r < n$, тогда методом Гаусса сведем систему (1_0) к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + a_{1r}^{(r)} x_r = -a_{1(r+1)}^{(r)} x_{r+1} - \cdots - a_{1n}^{(r)} x_n\ , \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad x_r = -a_{r(r+1)}^{(r)} x_{r+1} - \cdots - a_{rn}^{(r)} x_n\ , \end{cases} \qquad (1_0^r)$$

в которой $x_{r+1}, \cdots, x_n$ – свободные неизвестные. (Здесь, не ограничивая общности, предположили, что главными неизвестными являются $x_1, \cdots, x_r$. Если же эти неизвестные нельзя взять в качестве главных, то необходимо поменять нумерацию и взять главными неизвестные $\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_r$.)

Зафиксируем каждое $i = \overline{r+1, n}$ и положим $x_i = 1$, а $x_j = 0 \ \ \forall j \neq i$, $j = \overline{r+1, n}$. Далее подставим эти x_i и x_j в систему (1_0^r) и разрешим ее. В результате получим решения в виде следующих вектор-столбцов:

$$\underset{\downarrow}{\alpha}^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{\alpha}^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{n-r} \\ \vdots \\ \alpha_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Итак, полученные вектор-столбцы $\underset{\downarrow}{\alpha}^{1}, \underset{\downarrow}{\alpha}^{2}, \cdots, \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r}$ являются решениями системы (1_0^r), которые будут решениями системы (1_0), поскольку система (1_0^r) эквивалентна системе (1_0). Следовательно, необходимое количество решений найдено.

2) Покажем теперь, что система $\left\{\underset{\downarrow}{\alpha}^{1}, \underset{\downarrow}{\alpha}^{2}, \cdots, \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r}\right\}$ является линейно независимой. Для этого составим матрицу $\mathbf{B} = \left(\underset{\downarrow}{\alpha}^{1}, \underset{\downarrow}{\alpha}^{2}, \cdots, \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r}\right)_{n\times(n-r)}$ и найдем ее ранг. $\mathbf{Rg\,B} = n - r$, т.к. существует минор матрицы $\mathbf{B}$ вида $\mathcal{M}_{\mathbf{B}} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

Следовательно, столбцы $\left\{\underset{\downarrow}{\alpha}^{1}, \underset{\downarrow}{\alpha}^{2}, \cdots, \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r}\right\}$ матрицы $\mathbf{B}$ являются базисными. А тогда по теореме о базисном миноре система решений $\left\{\underset{\downarrow}{\alpha}^{1}, \underset{\downarrow}{\alpha}^{2}, \cdots, \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r}\right\}$ является линейно независимой.

3) Докажем теперь формулу (3). Рассмотрим вектор-столбец $\underset{\downarrow}{\alpha} = \mathrm{C}_1 \underset{\downarrow}{\alpha}^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{n-r} \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r}$, где $\mathrm{C}_1, \cdots, \mathrm{C}_{n-r}$ – произвольные константы из $\mathbb{R}$.

По лемме 2.1 $\underset{\downarrow}{\alpha}$ является решением системы (1_0) при любых $\mathrm{C}_1, \cdots, \mathrm{C}_{n-r}$ из $\mathbb{R}$, т.е. выполнено условие а) определения 1.5.

б): Далее, пусть $\underset{\downarrow}{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ есть произвольное решение однородной системы линейных алгебраических уравнений (1_0). Рассмотрим вектор-столбец $\underset{\downarrow}{z} = \underset{\downarrow}{\beta} - \underset{\downarrow}{\alpha}$, который будет решением системы (1_0) (по той же лемме 2.1) при всех $C_1, \cdots, C_{n-r}$ из $\mathbb{R}$, в том числе и при $C'_k = \beta_{r+k} \ \forall \ k = \overline{1, n-r}$.

Тогда $\underset{\downarrow}{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Поскольку $\underset{\downarrow}{z}$ является решением системы (1_0^r), то $z_j = 0 \ \ \forall \ j = \overline{1, r}$,

т.е. $\underset{\downarrow}{z} = \underset{\downarrow}{0}$. А это означает, что $\underset{\downarrow}{\beta} = C'_1 \underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \cdots + C'_{n-r} \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r} = \beta_{r+1} \underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \cdots + \beta_n \underset{\downarrow}{\alpha}^{n-r}$.

Итак, найдены $C'_1, \cdots, C'_{n-r}$, при которых $\underset{\downarrow}{\beta} = \underset{\downarrow}{\alpha}(C'_1, \cdots, C'_{n-r})$.

Следовательно, $\underset{\downarrow}{\alpha} = \sum_{k=1}^{n-r} C_k \underset{\downarrow}{\alpha}^k$ является общим решением однородной системы линейных алгебраических уравнений (1_0). #

Определение 2.1. Пусть $\mathrm{Rg}\,\mathrm{A} = r < n$, где n – число неизвестных системы (1_0). Тогда любая линейно независимая система из $n-r$ решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (1_0) называется *фундаментальной системой решений (ФСР) системы* (1_0).

Замечание 2.2. В ходе доказательства теоремы 2.3 была построена одна из ФСР $\left\{\underset{\downarrow}{\alpha}^{k}\right\}_{k=1}^{n-r}$, которую называют *нормальной ФСР*.

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathrm{Rg}\,\mathrm{A} = r < n$ *и*, $\left\{\underset{\downarrow}{\gamma}^{1}, \cdots, \underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r}\right\}$ *– ФСР однородной системы линейных алгебраических уравнений* (1_0).
Тогда общее решение системы (1_0) *имеет вид:*

$$\underset{\downarrow}{\alpha}_{oo} = \mathrm{C}_1 \underset{\downarrow}{\gamma}^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{n-r} \underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r} \tag{5}$$

при любых C_k, $k = \overline{1, n-r}$.

\# а): На основании леммы 2.1 при любых C_k, $k = \overline{1, n-r}$ $\sum\limits_{k=1}^{n-r} \mathrm{C}_k \underset{\downarrow}{\gamma}^{k}$ является решением системы (1_0).

б): Возьмем произвольное решение $\underset{\downarrow}{\beta}$ однородной системы линейных алгебраических уравнений (1_0) и рассмотрим матрицу $\mathrm{X} = \left(\underset{\downarrow}{\beta}, \underset{\downarrow}{\gamma}^{1}, \cdots, \underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r}\right)_{n \times (n-r+1)}$. Очевидно $\mathrm{Rg}\,\mathrm{X} \geq n-r$, т.к. $\left\{\underset{\downarrow}{\gamma}^{1},\cdots,\underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r}\right\}$ – линейно независимая система (как ФСР).

Поскольку $\underset{\downarrow}{\beta},\underset{\downarrow}{\gamma}^{1},\cdots,\underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r}$ – решения системы (1_0), а система (1_0) эквивалентна системе (1_0^r), то $\underset{\downarrow}{\beta},\underset{\downarrow}{\gamma}^{1},\cdots,\underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r}$ есть решения системы (1_0^r). Следовательно, существует r строк в матрице $\mathbf{X}$, которые являются линейной комбинацией остальных, тогда $\mathbf{Rg\,X} \le n-r$.

Итак, $\mathbf{Rg\,X} = n-r$, а $\left\{\underset{\downarrow}{\gamma}^{1},\cdots,\underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r}\right\}$ – линейно независимая система, тогда в матрице $\mathbf{X}$ столбцы $\underset{\downarrow}{\gamma}^{1},\cdots,\underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r}$ являются базисными, тогда существуют константы $C'_k \in \mathbb{R}$, $k=\overline{1,n-r}$ такие, что $\underset{\downarrow}{\beta} = C'_1\,\underset{\downarrow}{\gamma}^{1}+\cdots+C'_{n-r}\,\underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r}$.

Следовательно, в силу определения 1.5 $\underset{\downarrow}{\alpha}=\sum\limits_{k=1}^{n-r} C_k\,\underset{\downarrow}{\alpha}^{k}$ есть общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений (1_0). #

Пример 2.1. Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+6x_3+x_4=0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Рассмотрим расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left]\begin{array}{c}\text{Первую строку оставим без изменения.}\\ \text{Добавим минус 2 первых строки ко второй.}\end{array}\right[\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left]\begin{array}{c}\text{Переставим четвертый столбец на второе место.}\\ \text{Умножим вторую строку на минус 1.}\end{array}\right[\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует следующая система $\begin{cases} x_1 + x_4 = -2x_2 - 3x_3, \\ x_4 = 0 \end{cases}$,

где x_1, x_4 – главные неизвестные, а x_2, x_3 – свободные.

Решая последнюю систему, получим следующее решение: $\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3, \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

Положив сначала $x_2 = 1$, а $x_3 = 0$; затем $x_2 = 0$, а $x_3 = 1$, получим следующие решения:

$$\underset{\downarrow}{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \underset{\downarrow}{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$ т.е. $\left\{\underset{\downarrow}{\gamma}^1, \underset{\downarrow}{\gamma}^2\right\}$ есть ФСР исходной системы.

А $\underset{\downarrow}{\alpha}_{oo} = C_1 \underset{\downarrow}{\gamma}^1 + C_2 \underset{\downarrow}{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} -2C_1 - 3C_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ является общим решением исходной системы.

§ 3. Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений

3.1. Решение неоднородных систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

или в виде $\mathrm{A}\cdot \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$, где $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\underset{\downarrow}{a}_1, \cdots, \underset{\downarrow}{a}_n\right)$, $\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathrm{Rg}\,\hat{\mathrm{A}} = \mathrm{Rg}\,\mathrm{A} = r$.

Тогда 1) *при* $r = n \le m$ *существует единственное решение системы* (1);

2) *при* $r < n$ *существует бесконечно много решений системы* (1), *которые представляются в виде*:

$$\underset{\downarrow}{\alpha}_{он} = \underset{\downarrow}{\alpha}_{оо} + \underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}\ , \qquad (6)$$

где $\underset{\downarrow}{\alpha}_{он}$ *– общее решение неоднородной системы* (1) , $\underset{\downarrow}{\alpha}_{оо}$ *– общее решение однородной системы* (1_0) *и* $\underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}$ *– некоторое частное решение неоднородной системы* (1) .

1) : Пусть $\mathrm{Rg}\,\hat{\mathrm{A}} = \mathrm{Rg}\,\mathrm{A} = r = n$. Тогда методом Гаусса сведем систему (1)

к системе вида

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + a_{12}^{(r)}\,\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}^{(r)}\,\tilde{x}_r = b_1^{(r)}\,, \\ \qquad\quad \tilde{x}_2 + \cdots + a_{2n}^{(r)}\,\tilde{x}_n = b_2^{(r)}\,, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \tilde{x}_n = b_n^{(r)}\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \quad , \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \quad . \end{cases} \qquad (1^r)$$

Здесь неизвестные $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n$ получили из неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_n$, изменив нумерацию последних, чтобы матрица системы стала трапецевидной.

Поскольку главный минор матрицы системы $\det\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(r)} & \cdots & a_{1n}^{(r)} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}^{(r)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$,

то по теореме 6.1 (Крамера) существует единственное решение системы (1^r), а, следовательно, существует единственное решение системы (1), т.к. эти системы эквивалентны.

2) : Пусть $\mathbf{Rg\,A} = r < n$.

а): Пусть $\underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}$ – некоторое частное решение неоднородной системы (1).

Рассмотрим $\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{\alpha}_{oo} + \underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}$ и вычислим $\mathbf{A}\underset{\downarrow}{\alpha} = \mathbf{A}\left(\underset{\downarrow}{\alpha}_{oo} + \underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}\right) = \mathbf{A}\,\underset{\downarrow}{\alpha}_{oo} + \mathbf{A}\,\underset{\downarrow}{\alpha}_{чн} = \underset{\downarrow}{0} + \underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{b}$,

т.е. $\underset{\downarrow}{\alpha}$ – решение неоднородной системы (1) при любых $C_1, \cdots, C_{n-r}$ из $\mathbb{R}$, входящих в $\underset{\downarrow}{\alpha}_{oo}$.

б): Пусть $\underset{\downarrow}{\beta}$ – произвольное частное решение неоднородной системы (1).

Рассмотрим $\underset{\downarrow}{\beta} - \underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}$ и вычислим $\mathbf{A}\left(\underset{\downarrow}{\beta} - \underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}\right) = \mathbf{A}\,\underset{\downarrow}{\beta} - \mathbf{A}\,\underset{\downarrow}{\alpha}_{чн} = \underset{\downarrow}{b} - \underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0}$,

т.е. $\underset{\downarrow}{\beta} - \underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}$ есть решение однородной системы (1_0).

Итак, существуют постоянные $C_1', \cdots, C_{n-r}'$ из $\mathbb{R}$ такие, что $\underset{\downarrow}{\beta} = \underset{\downarrow}{\alpha}_{oo}\left(C_1', \cdots, C_{n-r}'\right) + \underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}$.

Следовательно, по определению 1.5 $\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{\alpha}_{oo} + \underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}$ есть общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (1). #

Следствие 3.1. *Если* $\mathrm{Rg}\,\hat{\mathrm{A}} = \mathrm{Rg}\,\mathrm{A} = r$, *то при* $r < n$ *общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений* (1) *представимо в виде*

$$\underset{\downarrow}{\alpha}_{\text{он}} = \underset{\downarrow}{\alpha}_{\text{чн}} + \sum_{k=1}^{n-r} \mathrm{C}_k \underset{\downarrow}{\gamma}^k , \qquad (7)$$

где $\left\{ \underset{\downarrow}{\gamma}^1, \cdots, \underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r} \right\}$ – *ФСР однородной системы линейных алгебраических уравнений* (1_0).

\# Формула (7) следует из формулы (6) в силу формулы (5). #

Замечание 3.1. Для нахождения какого-либо $\underset{\downarrow}{\alpha}_{\text{чн}}$ нужно систему (1) методом Гаусса свести к системе (1^r). Далее придать свободным неизвестным некоторые значения (например, нулевые) и после этого найти соответствующие значения главных неизвестных.

Замечание 3.2. Выбор главных неизвестных неоднозначен. Поэтому в качестве главных можно взять любые неизвестные, коэффициенты при которых образуют базисный минор.

Пример 3.1. Решить следующую неоднородную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Методом Гаусса приводим исходную систему к системе вида

$\begin{cases} x_1 + x_4 = 2 - 2x_2 - 3x_3, \\ \quad x_4 = -1 \end{cases}$, для которой найдем сначала частное решение.

Положив $x_2 = x_3 = 0$, получим $x_1 = 3$, $x_4 = -1$. Итак, $\underset{\downarrow}{\alpha}_{чн} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

В примере 2.1 была найдена ФСР однородной системы, т.е. $\left\{ \underset{\downarrow}{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underset{\downarrow}{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Следовательно, $\underset{\downarrow}{\alpha}_{он} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2C_1 - 3C_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ -1 \end{pmatrix}$.