Виды моделей расчета корреспонденций

1. Гравитационная модель

Исторически одной из первых математических моделей, предложенных для оценки межрайонных корреспонденций, была *гравитационная модель* [11, 102, 111, 113, 115, 120]. Рассмотрим систему, состоящую из некоторого множества R районов прибытия-отправления, соединенных между собой путями по транспортной сети. Исходными данными к расчету матрицы корреспонденций являются:

O_i — объем отправления из района $i \in R$,
D_j — объем прибытия в район $j \in R$.

В зависимости от типа корреспонденций объемы могут измеряться в автомобилях, пассажирах или других удобных единицах. Предполагается выполненным условие баланса общего прибытия и отправления

$$\sum_{i \in R} O_i = \sum_{j \in R} D_j. \tag{1}$$

Гравитационная модель

Гравитационная модель основана на следующем простом положении: корреспонденция из района i в район j пропорциональна общему объему отправления из центра i, общему объему прибытия в центр j и некоторой функции $C(t_{ij})$, зависящей от *транспортного расстояния* t_{ij} между центрами i и j. С интуитивной точки зрения транспортное расстояние отражает степень близости районов с учетом скорости и удобства передвижений, предоставляемых транспортной сетью. Способ определения этой величины может различаться в разных вариантах модели.

При расчете однородной матрицы корреспонденций, т.е. корреспонденций, составленных из передвижений одного типа и пользователей одного класса, числовым выражением транспортного расстояния является обобщенная цена (в частном случае время проезда) оптимального (кратчайшего) пути, соединяющего два района. Если оцениваются смешанные корреспонденции, например включающие поездки как на общественном, так и на легковом транспорте, необходимо вычислить оптимальную цену передвижений на разных видах транспорта t_{ij}^k, где k - типы передвижений. В качестве транспортного расстояния тогда можно принять средневзвешенное этих цен с учетом коэффициентов расщепления корреспонденции по типам передвижений:

$$t_{ij} = \sum_k c^k(t_{ij}^1, \ldots, t_{ij}^K) t_{ij}^k, \tag{2}$$

здесь $c^k(t^1, \ldots, t^k)$ - коэффициенты расщепления корреспонденции на типы передвижений как функции от набора оптимальных времен передвижений для разных типов; эти коэффициенты удовлетворяют условию $\sum_k c^k = 1$.

Гравитационная модель

Обозначим через F_{ij} корреспонденцию из района i в район j. Тогда гравитационная модель может быть сформулирована в виде

$$F_{ij} = A_i O_i B_j D_j C(t_{ij}), \quad i,j \in R, \tag{3}$$

где коэффициенты определяются из условий

$$\begin{aligned} \sum_{j \in R} F_{ij} &= O_i, \quad i \in R, \\ \sum_{i \in R} F_{ij} &= D_j, \quad j \in R, \\ F_{ij} &\geqslant 0, \quad i,j \in R. \end{aligned} \tag{4}$$

Функция $C(t)$ называется *функцией тяготения*. Она является главным фактором, определяющим распределение передвижений по дальности, поэтому применяется также термин *кривая расселения*. В некоторых публикациях эта функция трактуется как «априорная вероятность зарождения корреспонденции» в зависимости от расстояния, хотя в общем случае она не должна удовлетворять никаким условиям нормировки. Выбор этой функции осуществляется в ходе калибровки модели на основе сопоставления выходного модельного распределения дальностей с данными обследований. Проведено большое количество исследований по калибровке этой функции для разных городов [14, 93, 116, 117, 90]. При практических расчетах часто используется следующая аппроксимация:

$$C(t) = \exp\left(-\alpha t^{\beta}\right), \quad \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0. \tag{5}$$

Гравитационная модель

Для трудовых корреспонденций в крупных городах подходящими являются значения параметров $\alpha \approx 0{,}065$, $\beta \approx 1$.

Вычисление корреспонденций в гравитационной модели сводится к определению коэффициентов A_i, B_j из системы нелинейных уравнений (3)-(4). Для решения этой задачи используется итеративный алгоритм, называемый *алгоритмом балансировки*.

Расщепление корреспонденций по типам передвижений может быть произведено двумя способами. Во-первых, можно изначально оценить объемы O_i^k и D_j^k отдельно для каждого типа передвижений k, основываясь на социально-демографических показателях, таких как «коэффициент автомобилизации» и др. Далее для каждого типа рассчитывается отдельная матрица корреспонденций методом балансировки. Альтернативный путь состоит в балансировке матрицы суммарных корреспонденций согласно общим объемам ПО и последующем поэлементном расщеплении на типы передвижений. Коэффициенты расщепления при этом определяются индивидуально для каждой пары районов ПО в зависимости от соотношения цен межрайонных передвижений разных типов. Данный способ позволяет учитывать влияние на выбор способа передвижений факторов разной природы: социально-экономических характеристик населения, особенностей расположения районов и устройства транспортной сети.

2. Энтропийная модель

Использование концепции энтропии для решения транпортных задач было предложено Вильсоном [111], и затем данный подход развивался во многих работах [112, 113, 36, 83]. Энтропийная модель исходит из вероятностного описания поведения пользователей сети. Пользователи сети случайным образом распределяются по некоторому набору возможных состояний. При расчете корреспонденций состоянием пользователя можно считать принадлежность его к корреспонденции из i в j. Независимый и случайный выбор всеми пользователями своих состояний приводит к тем или иным макроскопическим состояниям системы. Согласно основной концепции энтропийной модели состояние системы, которое реализуется в реальности, есть состояние с наибольшим *статистическим весом*. Использование статистического веса состояний вместо распределения вероятностей тех или иных состояний объясняется тем, что в энтропийных моделях может не существовать конечного и нормированного распределения вероятностей. Статистические веса состояний отражают сравнительные вероятности реализации различных состояний в системе. С учетом этой оговорки состояния с наибольшим статистическим весом часто также называются наиболее вероятными состояниями.

Энтропийная модель

Математически состояние с наибольшим статистическим весом определяется как состояние, доставляющее максимум некоторой функции в пространстве состояний, называемой *энтропией системы*. В применении к задаче определения корреспонденций в транспортной сети энтропия определяется следующим выражением:

$$H(f) = \sum_{i,j} f_{ij} \ln \left(\frac{f_{ij}}{\nu_{ij}} \right), \quad f = \{f_{ij} | i, j \in R\}. \tag{6}$$

Здесь f_{ij} — числа *заполнения состояний*, т.е. количества элементов системы, находящихся в состояниях (i, j). Величины ν_{ij} имеют смысл «априорных наиболее вероятных» значений f_{ij}. Фактические наиболее вероятные значения F_{ij} определяются из решения задачи о максимизации энтропии при некоторой системе ограничений на f_{ij}. В отсутствие ограничений решение задачи максимизации приводит к априорным значениям $F_{ij} = \nu_{ij}$. Ограничения, накладываемые на распределения, могут быть самой разной природы. Как правило, эти ограничения отражают имеющуюся информацию о макроскопических характеристиках состояния системы. В системе ограничений, применяемых в энтропийных моделях транспортных сетей, можно выделить группу стандартных линейных ограничений, выражающих баланс прибытий

Энтропийная модель

и отправлений. Эта группа ограничений называется также *транспортными ограничениями*. С учетом сказанного энтропийная модель расчета корреспонденций может быть записана в виде

$$F = \operatorname{argmax}(H(f)), \quad f = \{f_{ij} | i, j \in R\}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in R} f_{ij} &= O_i, \quad i \in R, \\
\sum_{i \in R} f_{ij} &= D_j, \quad j \in R, \\
f_{ij} &\geqslant 0, \quad i, j \in R, \\
g_n(f) &= 0, \quad n = \overline{1, N}, \\
h_m(f) &\leqslant 0, \quad m = \overline{1, M}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Энтропийная модель

Здесь явно выделены транспортные ограничения, а также включены в общем виде N дополнительных ограничений-равенств и M ограничений-неравенств. Задача оптимизации (7)-(8) является стандартной задачей математического программирования с выпуклой целевой функцией. Система ограничений в этой задаче, как правило, линейна. Решение задачи в общем случае может быть получено методом множителей Лагранжа. В частном случае, когда имеются только транспортные ограничения, можно получить аналитическое выражение для решения задачи (7)-(8). Это выражение совпадает с выражением, даваемым гравитационной моделью, если задать априорные вероятности в соответствии с функцией тяготения: $\nu_{ij} = C(t_{ij})$. Другой способ установить связь между энтропийной и гравитационной моделью предложен в [112]. Предположим, что передвижения между районами прибытия и отправления i и j связаны с некоторым количеством «обобщенных затрат». Пусть для каждого района отправления известны суммарные общие затраты на передвижения:

$$\sum_{j \in R} c_{ij} f_{ij} = c_i, \quad i \in R. \tag{9}$$

Данные равенства могут быть использованы в качестве ограничений в задаче максимизации энтропии. Они называются *затратными ограничениями*. Рассмотрим энтропийную задачу, в которой априорные вероятности тех или иных значений корреспонденций равны: $\nu_{ij} = \text{const}$, а в число ограничений включены балансовые и затратные ограничения. Решение задачи также будет совпадать по виду с выражением гравитационной модели, если принять $t_{ij} = c_{ij}$ и взять функцию тяготения вида

$$C(c_{ij}) = \exp(-\lambda c_{ij}). \tag{10}$$

Энтропийная модель

Коэффициент λ в этом выражении есть множитель Лагранжа задачи оптимизации, его значение определяется в ходе решения самой задачи. Согласно такой аргументации энтропийная модель может служить статистическим обоснованием для гравитационной модели, причем дает основание для выбора функции тяготения.

В рамках задачи максимизации энтропии может быть также осуществлен расчет корреспонденций с одновременным расщеплением по типам передвижений. Согласно общему подходу будем считать, что случайное состояние пользователя транспортной сети заключается в принадлежности к корреспонденции из i в j и выборе способа передвижения k. Состояние системы тогда определяется трехиндексным набором f_{ij}^k. Выражения для энтропийной функции и соответствующей задачи максимизации вполне аналогичны (6)-(8). При этом в состав ограничений должны быть включены дополнительные ограничения по общему объему передвижений для разных типов [123, 119].

3. Другие модели

Одним из недостатков классической гравитационной модели является то, что объем корреспонденции связывается с характеристиками пары районов (включая транспортное расстояние между ними), взятых в отдельности от других районов. Как отмечается многими исследователями, «привлекательность» района для посещения (или объем прибытия в этот район) может зависеть также от расположения района прибытия среди других районов [37]. Например, район, расположенный в агломерации большого количества других районов посещения, может порождать большую корреспонденцию, чем изолированно расположенный район. Эта идея реализована в моделях семейства *конкурирующих центров* (competing destinations [27, 28]). Модели конкурирующих центров можно рассматривать как обобщения гравитационной модели, где в выражение (3) включаются дополнительные факторы, например, *индекс посещаемости* района прибытия, определяемый формулой

$$I_{ij} = \sum_{k \in R, k \neq i,j} \frac{D_k}{t_{kj}}. \tag{11}$$

Индекс посещаемости тем больше, чем больше и ближе к району посещения расположены альтернативные районы отправления. Введение этого фактора в модель позволяет моделировать агломерационные эффекты в структуре корреспонденций.

Другие модели

Дальнейшие модификации модели связаны с попыткой учета структуры рассматриваемой системы районов. Например, рассмотрим некоторый регион, где имеются крупные города, окруженные системой прилегающих центров меньшего ранга, каждый из которых окружен прилегающими мелкими районами. В такой системе структурный эффект может проявляться в том, что центр крупного ранга имеет избыточную притягательность для окружающих «подчиненных» центров в иерархии («избыточную» здесь означает «большую, чем это диктуется факторами доступности»). Этот эффект моделируется «ранжированием» районов въезда-выезда по статусу в иерархии и введением соответствующих поправок в индексы посещаемости районов [24, 25].

Другой важный класс моделей представляют различные модификации модели *промежуточных возможностей* (intervening opportunities) Стауффера [98]. Модель Стауффера исходит из предположения, что объем корреспонденции между двумя центрами определяется не столько расстоянием между ними, сколько количеством и емкостью альтернативных центров прибытия на пути, соединяющем центры, т.е. количеством альтернативных *возможностей* посещения. Рассмотрим сначала простую систему с одним центром отправления и рядом центров прибытия, расположенных вдоль одной линии. Пусть O — объем отправления, x_n — корреспонденция, λ_n — вероятность того, что участник движения остановится в центре n при условии, что центр n достигнут в ходе поездки. Тогда

$$x_n = O\lambda_n \prod_{j=1}^{n-1}(1-\lambda_j), \tag{12}$$

Другие модели

т.е. объем корреспонденции в центр n пропорционален произведению вероятности остановки в этом центре на вероятность того, что участник движения не остановился раньше. Для обобщений представляет интерес непрерывный аналог модели, когда места назначения непрерывно распределены вдоль некоторого луча. В непрерывной модели вместо корреспонденций мы будем говорить о *плотности* корреспонденций $x(r)$, где r — расстояние от центра отправления. Обозначим также: $y(r)$ — количество участников движения, добравшихся до точки r, $\lambda(r)$ — значение плотности распределения вероятности остановки в r при условии, что данная точка достигнута. Тогда, очевидно,

$$y(r) = O - \int_0^r x(\rho)\,d\rho, \qquad x(r) = y(r)\lambda(r). \tag{13}$$

Из уравнения (13) получаем следующее выражение для плотности корреспонденции:

$$x(r) = O\lambda(r)\exp\left(-\int_0^r \lambda(\rho)\,d\rho\right). \tag{14}$$

Различные варианты модели конкурирующих возможностей могут быть получены из уравнения (14) путем принятия различных гипотез о виде функции условной плотности вероятности $\lambda(r)$ [94, 110]. В применении к расчету корреспонденций в транспортной сети условную вероятность остановки в центре обычно связывают с емкостью центра по прибытию, т.е. количеством мест работы, обслуживания и др.

Другие модели

Обобщение модели на случай многих центров отправления и прибытия сталкивается с трудностью формального определения количества возможностей остановки «по пути» к данному центру. Один из подходов к решению проблемы состоит в ранжировании центров прибытия по удаленности от каждого центра отправления. Все центры, расположенные к центру отправления ближе, чем данный центр (независимо от направления), считаются альтернативными возможностями, «предшествующими» возможности остановки в данном центре. Используя выражение (14) и возвращаясь снова к дискретному описанию центров прибытия-отправления, получаем следующее выражение для корреспонденции:

$$F_{ij} = O_i \left(\exp(-\lambda U_j) - \exp(-\lambda U_{j+1})\right), \tag{15}$$

где λ - константа, U_j - кумулятивная емкость по прибытию всех центров, предшествующих (в указанном выше смысле) центру j.

Другие модели

Основное отличие моделей гравитационного типа и моделей промежуточных возможностей состоит в следующем: гравитационные модели основаны на расчете транспортной доступности центров прибытия, рассматриваемых в основном изолированно от альтернативных центров, в то время как модели промежуточных возможностей учитывают взаимное расположение альтернативных возможностей прибытия, но не учитывают явно фактора транспортной доступности (дальности). В связи с этим предложены различные варианты агрегированных моделей, учитывающие оба указанных фактора. В частности, в [35] предложена объединенная «гравитационно-конкурирующая» (gravity-opportunity) модель энтропийного типа, т.е. основанная на поиске распределения корреспонденций с максимальным статистическим весом. Выражение (15) используется в этой модели в качестве «априорной вероятности» зарождения корреспонденции, фактор транспортной доступности учитывается путем введения «затратного» ограничения (9) в общую систему ограничений энтропийной задачи.