



Исключающее ИЛИ  
Контроль по четности

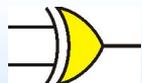
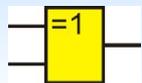
XOR  
Parity check

# XOR

| B | A | Q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

**XOR**

Графическое  
обозначение

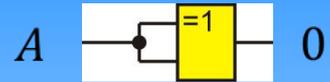


Алгебраическое  
обозначение

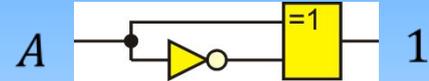
$$Q = A \oplus B$$

# XOR

$$A \oplus A = 0$$



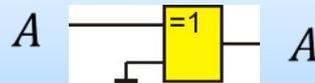
$$A \oplus \bar{A} = 1$$



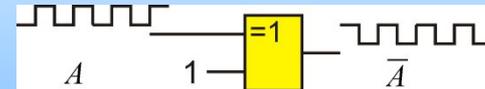
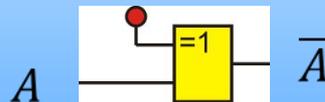
$$A \oplus B = B \oplus A$$

## Управляемый инвертор

$$A \oplus 0 = A$$



$$A \oplus 1 = \bar{A}$$



# XOR сравнение слов

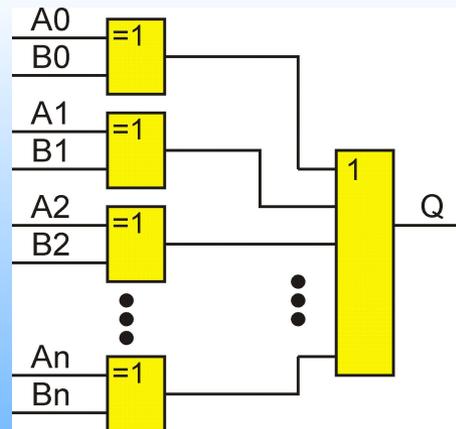
XOR

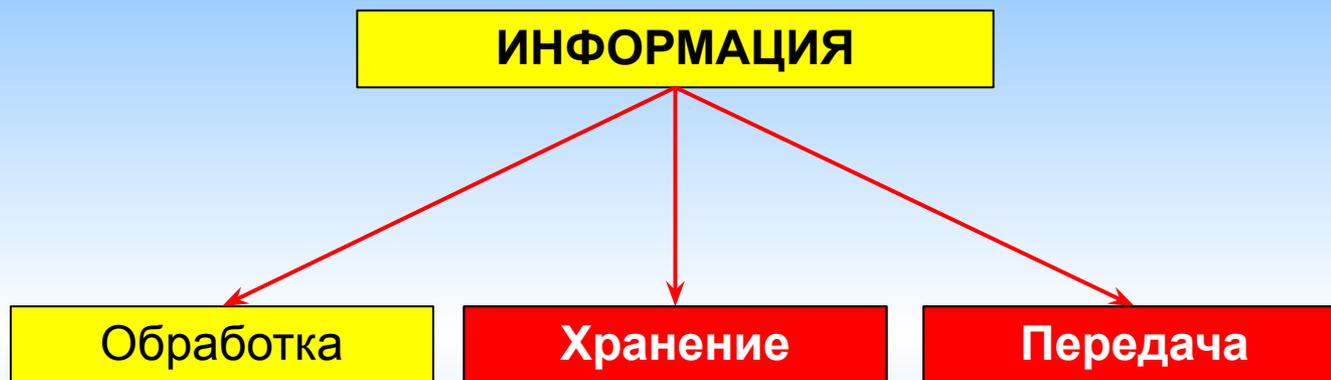
| B | A | Q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$A=B \rightarrow Q=0$

$A \neq B \rightarrow Q=1$

Поразрядное сравнение





**Везде могут быть ошибки**

# Робота над ошибками

## BER (Bit Error Rate)

| System                      | Error rate (errors/bit) |
|-----------------------------|-------------------------|
| Wiring of internal circuits | $10^{-15}$              |
| Memory chips                | $10^{-14}$              |
| Hard disk                   | $10^{-9}$               |
| Optical drives              | $10^{-8}$               |
| Coaxial cable               | $10^{-6}$               |
| Optical disk (CD)           | $10^{-5}$               |
| Telephone System            | $10^{-4}$               |

Table 6.2: Rates of errors for various systems.

Причины возникновения ошибок:

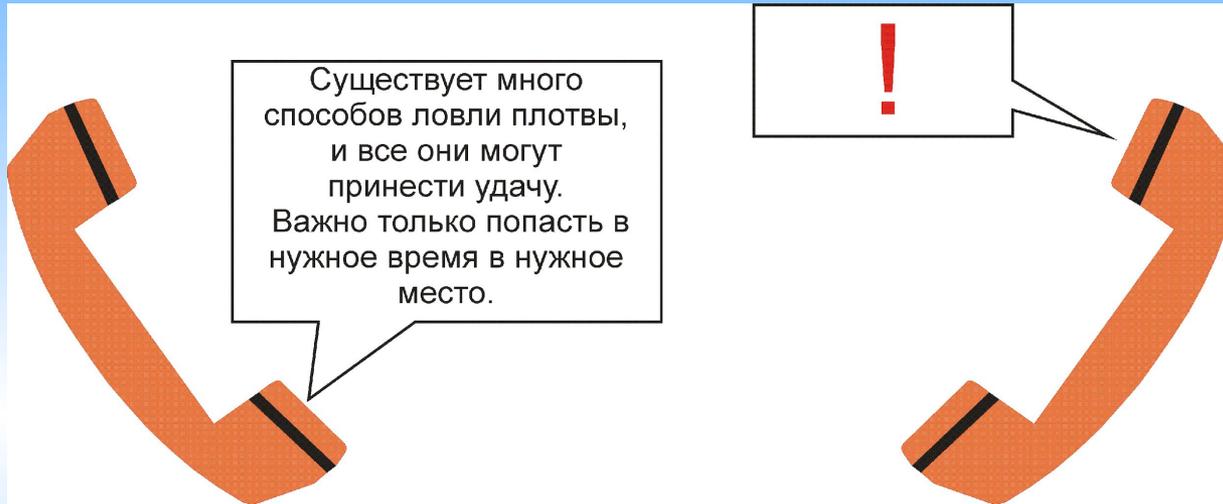
- Внешние воздействия
- Внутренние шумы
- Деградация устройств памяти и каналов связи

Работа над ошибками:

- Обнаружение
- Исправление

# Работа над ошибками

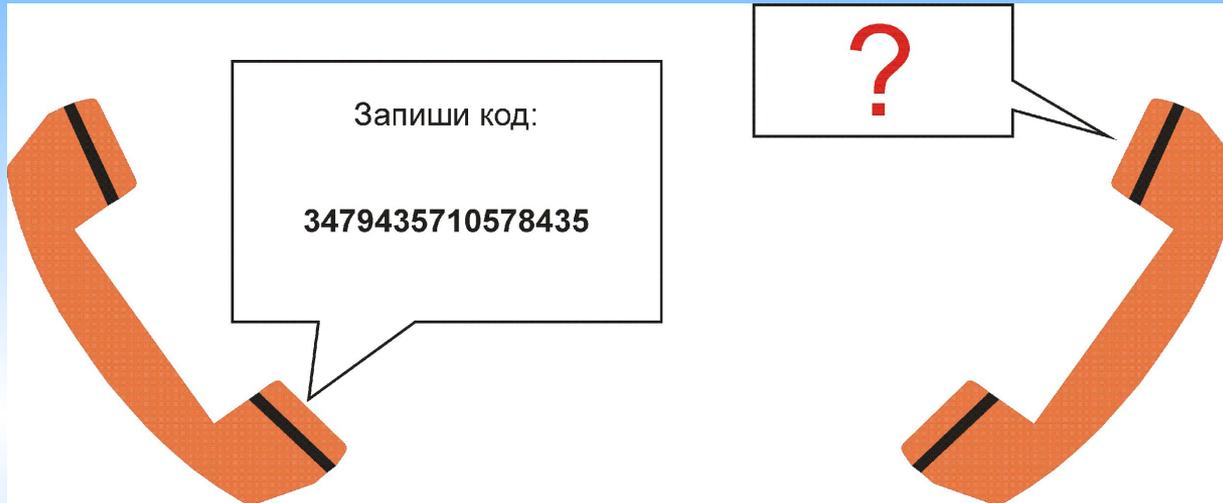
## Пример



Можно говорить быстро и долго. Информация воспринимается правильно.

# Работа над ошибками

## Пример



Нужно говорить медленно и просить подтверждения.  
Вероятность ошибок очень велика.

Почему такая разница?

## *Работа над ошибками*

Пример исправления ошибок

Бриатские ученые установили: не важно, как  
вы расставляете буквы внутри слова, главное,  
чтобы первая и последняя буквы остались  
неизменными, текст будет восприниматься  
правильно.

Из интернетов

**ИЗБЫТОЧНОСТЬ ИНФОРМАЦИИ**

# Работа над ошибками

Как избыточность может помочь?

Двоичный код

Избыточность отсутствует.

Любое сочетание 0 и 1 имеет право на существование.

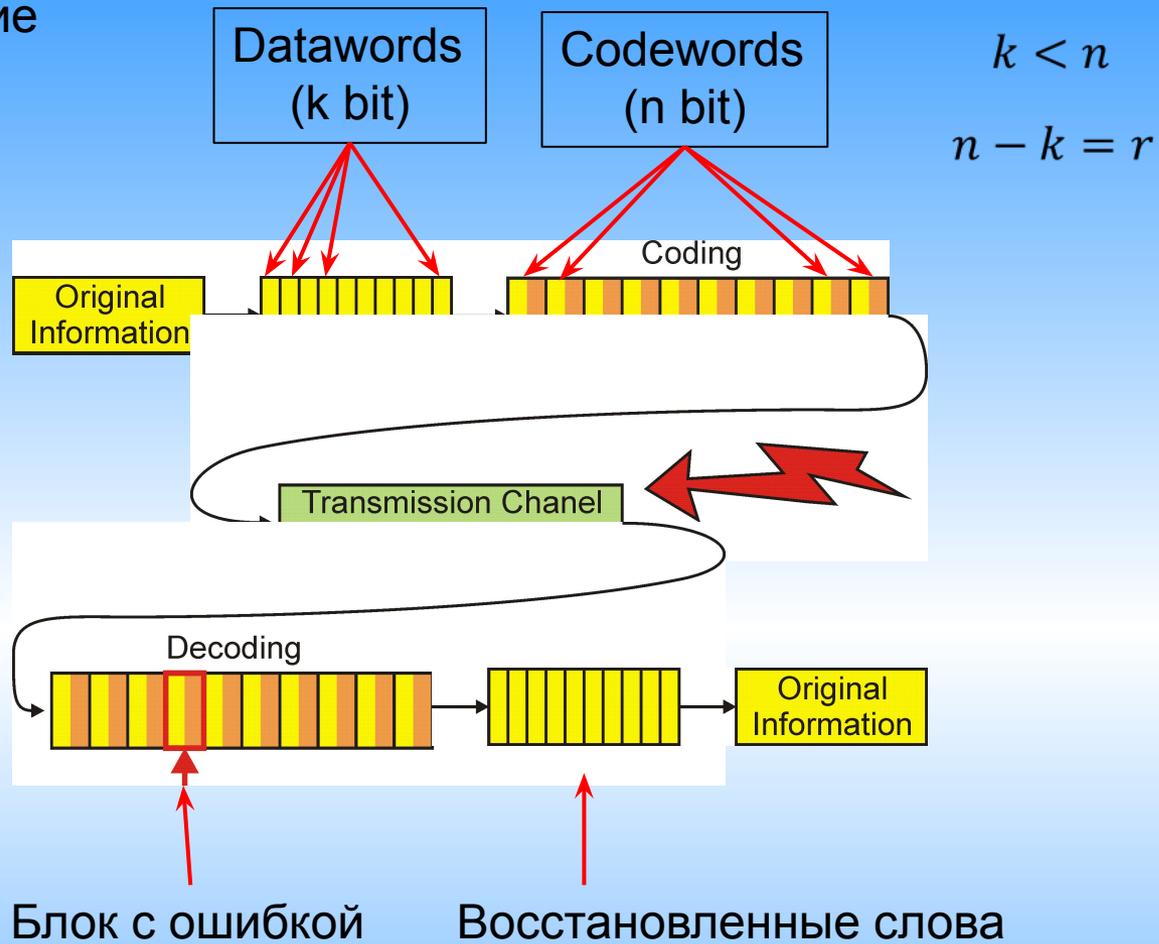
Выявить ошибку невозможно

| 10 | h | 2  |    |    |    |
|----|---|----|----|----|----|
|    |   | b3 | b2 | b1 | b0 |
| 0  | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1  | 1 | 0  | 0  | 0  | 1  |
| 2  | 2 | 0  | 0  | 1  | 0  |
| 3  | 3 | 0  | 0  | 1  | 1  |
| 4  | 4 | 0  | 1  | 0  | 0  |
| 5  | 5 | 0  | 1  | 0  | 1  |
| 6  | 6 | 0  | 1  | 1  | 0  |
| 7  | 7 | 0  | 1  | 1  | 1  |
| 8  | 8 | 1  | 0  | 0  | 0  |
| 9  | 9 | 1  | 0  | 0  | 1  |
| 10 | A | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 11 | B | 1  | 0  | 1  | 1  |
| 12 | C | 1  | 1  | 0  | 0  |
| 13 | D | 1  | 1  | 0  | 1  |
| 14 | E | 1  | 1  | 1  | 0  |
| 15 | F | 1  | 1  | 1  | 1  |

Необходимо придумать такой код у которого не все комбинации допустимы

# Кодовое слово

## Блоковое кодирование



Относительная избыточность кода =  $r/n$

Скорость кода =  $k/n$

# Кодовое слово

## Блочное кодирование

1. Все сообщение разбивается на слова.
2. К словам добавляются дополнительные биты и получаются кодовые слова или блоки, как и в человеческом языке.
3. Не все сочетания 0 и 1 в кодовом слове допустимы.
4. Информация передается или хранится в таком закодированном виде.
5. Ошибка в любом из битов (нескольких битах) кодового слова должна приводить к недопустимой комбинации (некодovому слову).
6. При приеме или чтении из памяти исходная информация восстанавливается или сопровождается сообщением об ошибке.

# Кодовое слово

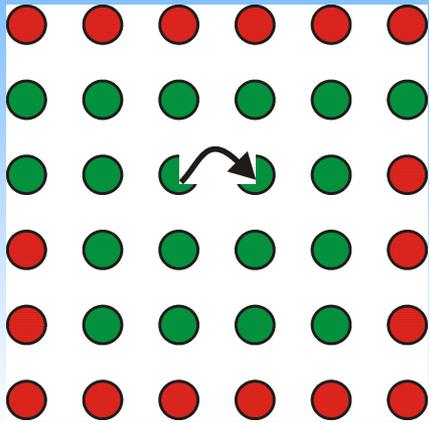
Что такое хороший код?

## Требования

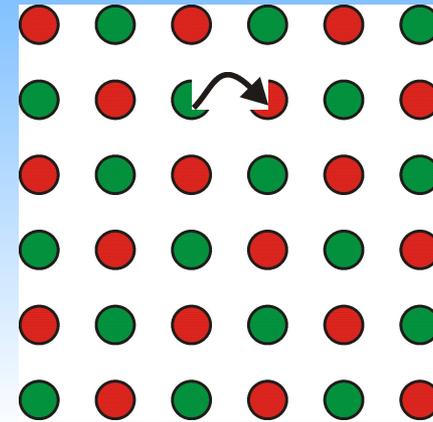
- Возможность обнаружения ошибок
- Возможность коррекции ошибок
- Минимально допустимая избыточность
- Скорость работы кодера и декодера
- Простота реализации

# Кодовое слово

Что такое хороший код?



Плохой код

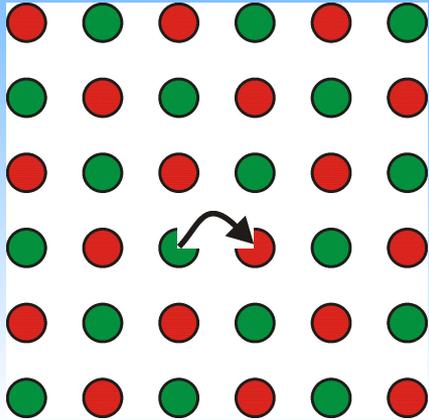


Код лучше

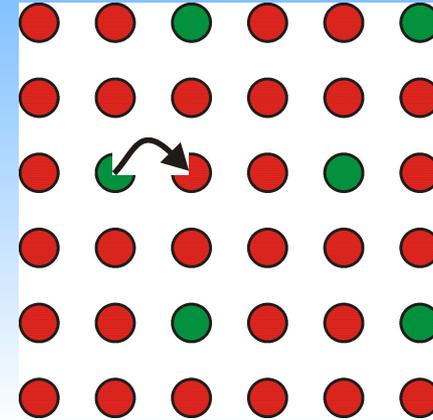
-  Кодовые слова (codewords)
-  Не кодовые слова (noncodewords)
-  Ошибка (error)

# Кодовое слово

Что такое хороший код?



Код лучше



Код еще лучше

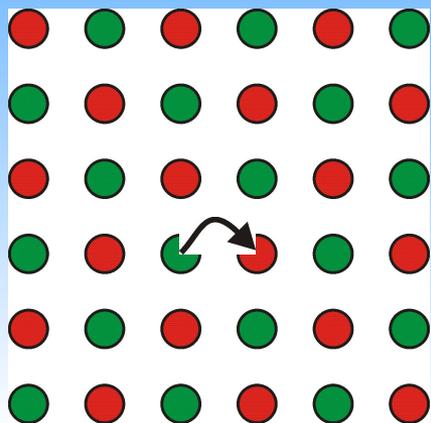
-  Кодовые слова (codewords)
-  Не кодовые слова (noncodewords)
-  Ошибка (error)

Чем выше избыточность, тем надежнее система.

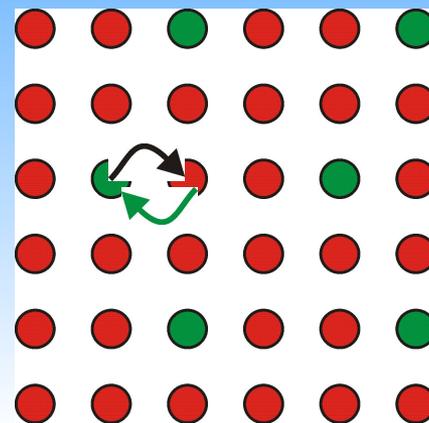
# Кодовое слово

Хороший код. Исправление ошибок.

Стратегия наибольшего правдоподобия (Maximum Likelihood Decoding)

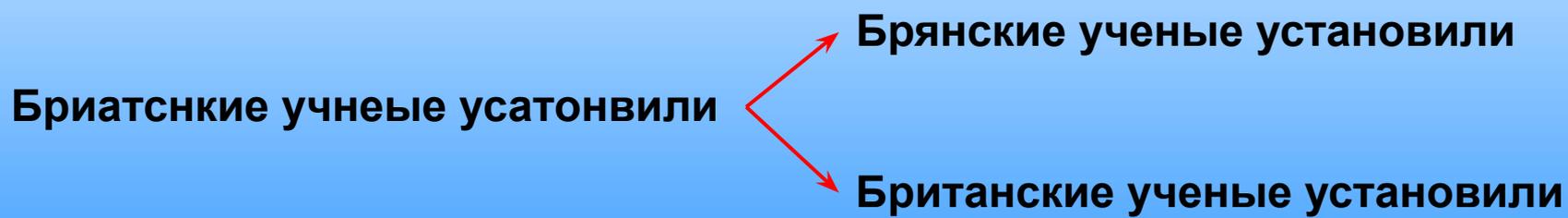


Код лучше



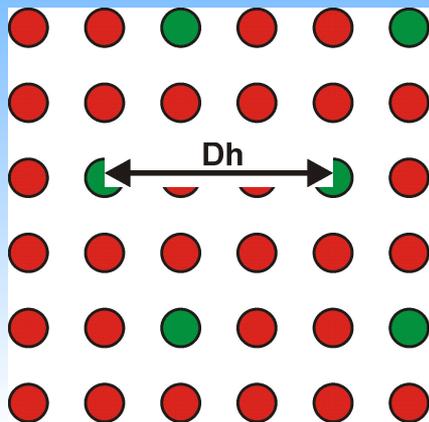
Код еще лучше

Исправление ошибок: некодовое слово превратить в ближайшее кодовое.



# Кодовое расстояние

Расстояние или дистанция Хемминга



Кодовое расстояние или расстояние Хемминга  $D_h$  расстояние между **ближайшими** кодовыми комбинациями. Оно определяется числом позиций, в которых их двоичные знаки не совпадают.

Чем больше  $D_h$ , тем надежнее код, но больше избыточность.

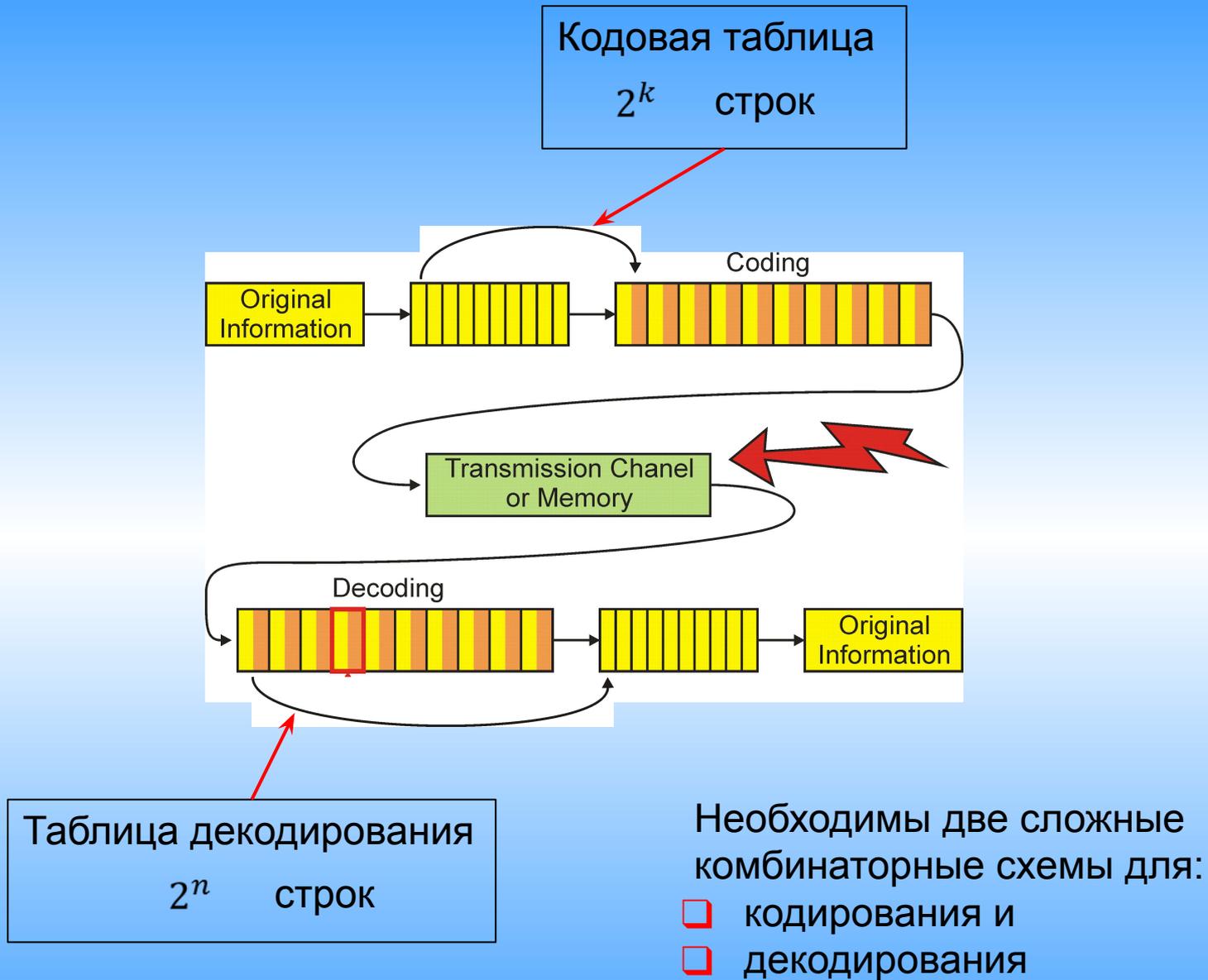
- Кодовые слова (codewords)
- Не кодовые слова (noncodewords)

У простого двоичного кода  $D_h=1$ .

Избыточности нет – хорошо.

Помехоустойчивости так же нет – плохо.

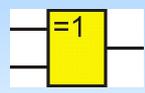
# Кодирование



Простота схем кодирования и декодирования

# Обнаружение ошибок. Контроль по четности.

Четность.



| B | A | Q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$A=B \rightarrow Q=0$   
 $A \neq B \rightarrow Q=1$

Четное кол-во 1

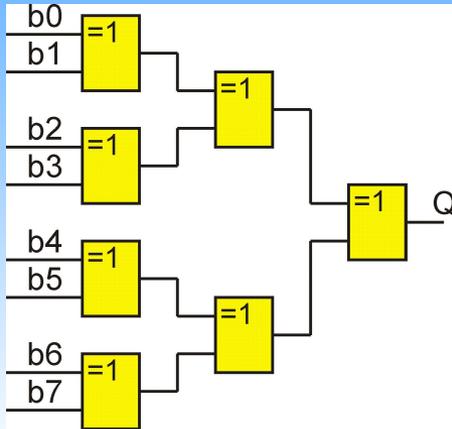
Нечетное кол-во 1

| B | A | Q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Четное кол-во 1  $\rightarrow Q=0$   
Нечетное кол-во 1  $\rightarrow Q=1$

# Обнаружение ошибок. Контроль по четности.

Сумматор по модулю 2.



=



Четное кол-во 1  $\rightarrow$   $Q=0$   
Нечетное кол-во 1  $\rightarrow$   $Q=1$

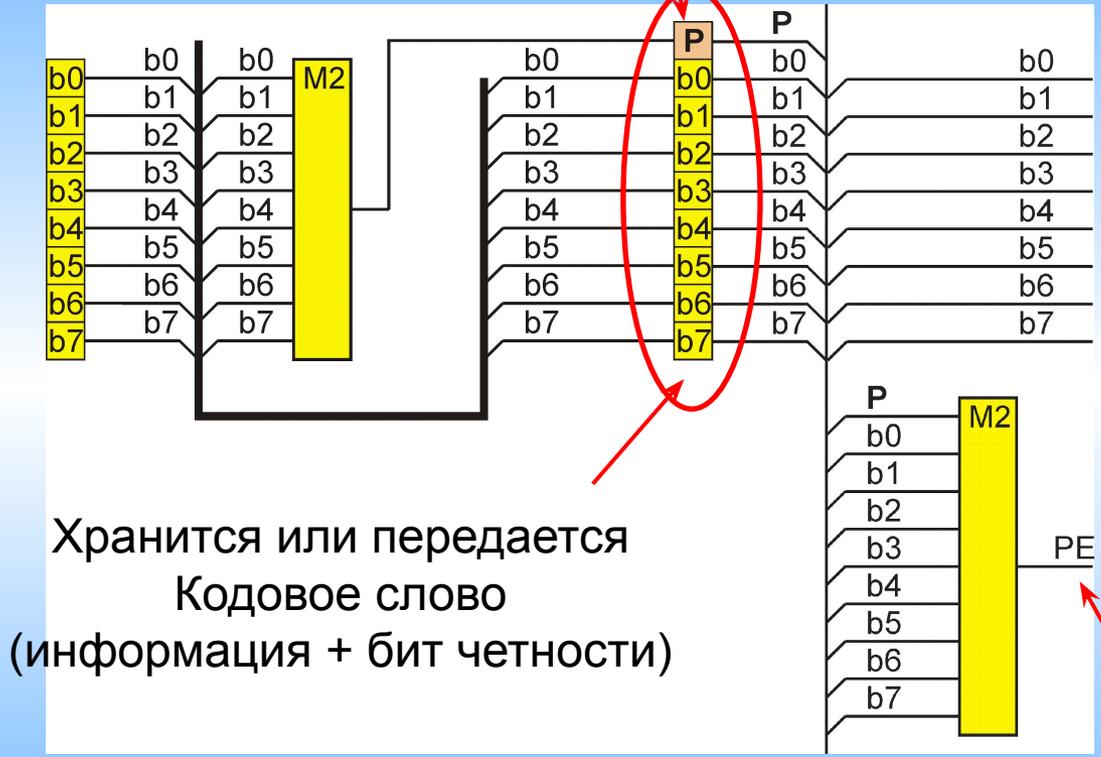
Сумматор по модулю 2  
(сумматор без переносов)

# Обнаружение ошибок. Контроль по четности.

Добавочный бит четности

Чтение (прием)  
кодového слова

Исходная  
Информация  
(байт)



Хранится или передается  
Кодовое слово  
(информация + бит четности)

Parity Error

**Кодовое слово ВСЕГДА имеет четное количество 1**

Синдром ошибки

## Обнаружение ошибок. Контроль по четности.



- Кодовые слова (codewords)
- Не кодовые слова (noncodewords)

Дистанция Хемминга  $D_h=2$ .

Синдром ошибки возникает при ошибке в одном бите.

Двойная ошибка останется незамеченной.

Более точно:  
Нечетное количество ошибок будет замечено  
Нечетное – нет.

## Обнаружение ошибок. Вероятность многократных ошибок.

Синдром ошибки возникает при ошибке в одном бите.

Двойная ошибка останется незамеченной.

| System                      | Error rate (errors/bit) |
|-----------------------------|-------------------------|
| Wiring of internal circuits | $10^{-15}$              |
| Memory chips                | $10^{-14}$              |
| Hard disk                   | $10^{-9}$               |
| Optical drives              | $10^{-8}$               |
| Coaxial cable               | $10^{-6}$               |
| Optical disk (CD)           | $10^{-5}$               |
| Telephone System            | $10^{-4}$               |

Table 6.2: Rates of errors for various systems.

Достаточно  
условная таблица

Для двух независимых событий

Вероятность двойного события = (вер. события 1) X (вер. события 2)

$$P(1 + 2) = P(1) \times P(2)$$

$$P(\text{одинарная}) = 10^{-5}$$

$$P(\text{двойная}) = 10^{-10}$$

## Контроль по четности. Длина слова.



$$\text{Избыточность} = 1/9 \approx 11\%$$

Вероятность одиночной битовой ошибки =  $9P$



$$\text{Избыточность} = 1/17 \approx 6\%$$

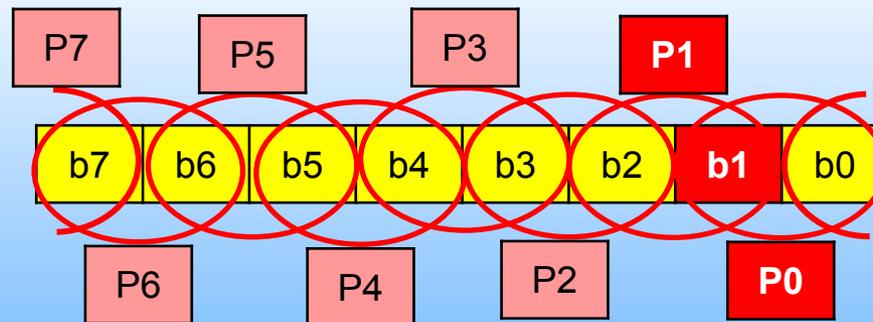
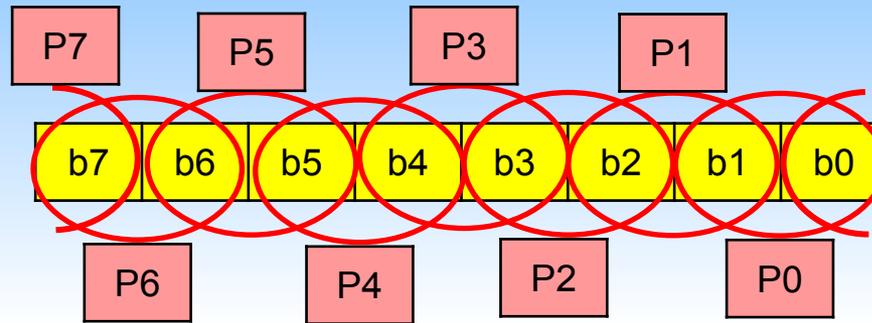
Вероятность одиночной битовой ошибки =  $17P$

# Контроль по четности. Исправление ошибок.

Идея. Перекрывание (Overlapping).



Простейший контроль по четности



Исправить = инвертировать!

Избыточность = 50%

# Контроль по четности. Исправление ошибок.

Идея. Перекрывание (Overlapping).

dataword  $k = 8$



codeword  $n = 16$



Исправляет **любые** одинарные ошибки

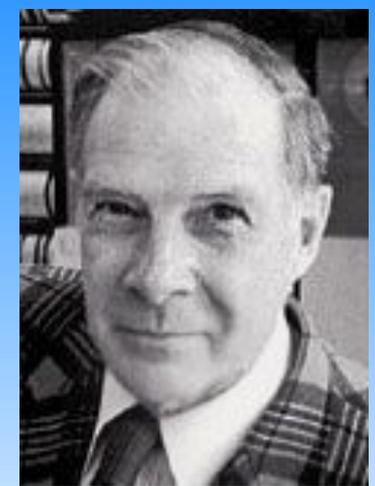
Избыточность (для любой разрядности данных  $k$ ) = 50%

Это лучше, чем просто повторить передачу

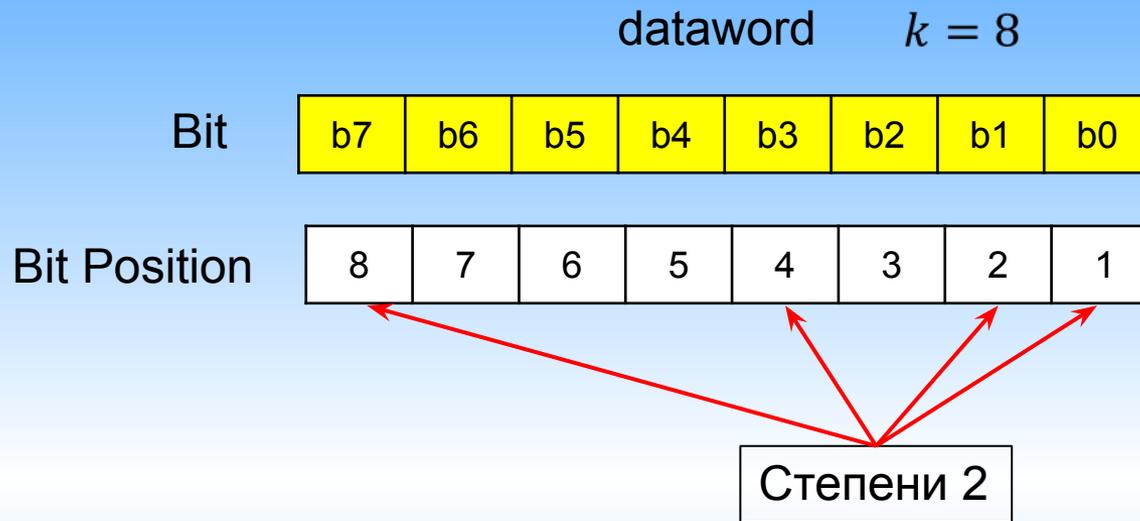
$D_h=3$

# Исправляющие коды

Код Хемминга. Идея.



Richard W. Hamming  
1915-1998



Опять контроль по четности

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 12 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  |
| b7 | b6 | b5 | b4 | P3 | b3 | b2 | b1 | P2 | b0 | P1 | P0 |

Вначале в позиции битов контроля по четности записываются 0

|    |    |    |    |   |    |    |    |   |    |   |   |
|----|----|----|----|---|----|----|----|---|----|---|---|
| b7 | b6 | b5 | b4 | 0 | b3 | b2 | b1 | 0 | b0 | 0 | 0 |
|----|----|----|----|---|----|----|----|---|----|---|---|

# Исправляющие коды

Код Хемминга. Формирование кода.

Вычисляются биты контроля по четности.

| Bit Position | 12 | 11 | 10 | 9  | 8 | 7  | 6  | 5  | 4 | 3  | 2 | 1 |
|--------------|----|----|----|----|---|----|----|----|---|----|---|---|
| codeword     | b7 | b6 | b5 | b4 | 0 | b3 | b2 | b1 | 0 | b0 | 0 | 0 |
| P0= ⊕        |    | b6 |    | b4 |   | b3 |    | b1 |   | b0 |   | 0 |
| P1= ⊕        |    | b6 | b5 |    |   | b3 | b2 |    |   | b0 | 0 |   |
| P2= ⊕        | b7 |    |    |    |   | b3 | b2 | b1 | 0 |    |   |   |
| P3= ⊕        | b7 | b6 | b5 | b4 | 0 |    |    |    |   |    |   |   |

# Исправляющие коды

Код Хемминга. Формирование кода.

|              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Bit Position | 12 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  |
| codeword     | b7 | b6 | b5 | b4 | P3 | b3 | b2 | b1 | P2 | b0 | P1 | P0 |

Это кодовое слово хранится или передается.

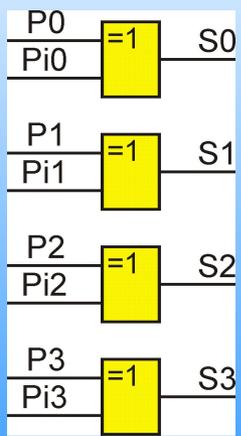
# Исправляющие коды

Код Хемминга. Прием или чтение из памяти.

Ошибка

|              |    |    |    |    |    |           |    |    |    |    |    |    |
|--------------|----|----|----|----|----|-----------|----|----|----|----|----|----|
| Bit Position | 12 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7         | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  |
| codeword     | b7 | b6 | b5 | b4 | P3 | <b>b3</b> | b2 | b1 | P2 | b0 | P1 | P0 |
| Pi0= ⊕       |    | b6 |    | b4 |    | <b>b3</b> |    | b1 |    | b0 |    | P0 |
| Pi1= ⊕       |    | b6 | b5 |    |    | <b>b3</b> | b2 |    |    | b0 | P1 |    |
| Pi2= ⊕       | b7 |    |    |    |    | <b>b3</b> | b2 | b1 | P2 |    |    |    |
| Pi3= ⊕       | b7 | b6 | b5 | b4 | P3 |           |    |    |    |    |    |    |

$P_{i0} \neq P_0$   
 $P_{i1} \neq P_1$   
 $P_{i2} \neq P_2$   
 $P_{i3} = P_3$



Синдром

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| S3 | S2 | S1 | S0 |
| 0  | 1  | 1  | 1  |

7

Ошибка в позиции 7

# Исправляющие коды

Код Хемминга. Параметры.

$D_h=3$

Избыточность (bit)



Исправляет любую одиночную ошибку

Избыточность %



# Работа над ошибками. Исправление ошибок.

Двухмерный контроль по четности. Идея.  
Two-Dimensional Parity Check

|     |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| b15 | b14 | b13 | b12 | b11 | b10 | b9 | b8 | b7 | b6 | b5 | b4 | b3 | b2 | b1 | b0 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| b15 | b14 | b13 | b12 | Pr3 |
| b11 | b10 | b9  | b8  | Pr2 |
| b7  | b6  | b5  | b4  | Pr1 |
| b3  | b2  | b1  | b0  | Pr0 |
| Pc3 | Pc2 | Pc1 | Pc0 |     |

Биты четности по строкам

Биты четности по столбцам

$$\text{Избыточность} = \frac{8}{24} \approx 33\%$$

# Работа над ошибками. Исправление ошибок.

Двухмерный контроль по четности. Идея.  
Two-Dimensional Parity Check

|     |           |     |     |     |   |
|-----|-----------|-----|-----|-----|---|
| b15 | b14       | b13 | b12 | Pr3 |   |
| b11 | b10       | b9  | b8  | Pr2 |   |
| b7  | <b>b6</b> | b5  | b4  | Pr1 | ← |
| b3  | b2        | b1  | b0  | Pr0 |   |
| Pc3 | Pc2       | Pc1 | Pc0 |     |   |

↑

Одиночную ошибку исправляет

# Работа над ошибками. Исправление ошибок.

Двухмерный контроль по четности. Идея.  
Two-Dimensional Parity Check

|     |            |     |     |     |   |
|-----|------------|-----|-----|-----|---|
| b15 | b14        | b13 | b12 | Pr3 |   |
| b11 | <b>b10</b> | b9  | b8  | Pr2 | ← |
| b7  | <b>b6</b>  | b5  | b4  | Pr1 | ← |
| b3  | b2         | b1  | b0  | Pr0 |   |
| Pc3 | Pc2        | Pc1 | Pc0 |     |   |

Двойную ошибку фиксирует

|     |            |           |     |     |   |
|-----|------------|-----------|-----|-----|---|
| b15 | b14        | b13       | b12 | Pr3 |   |
| b11 | <b>b10</b> | <b>b9</b> | b8  | Pr2 |   |
| b7  | <b>b6</b>  | b5        | b4  | Pr1 | ← |
| b3  | b2         | b1        | b0  | Pr0 |   |
| Pc3 | Pc2        | Pc1       | Pc0 |     |   |

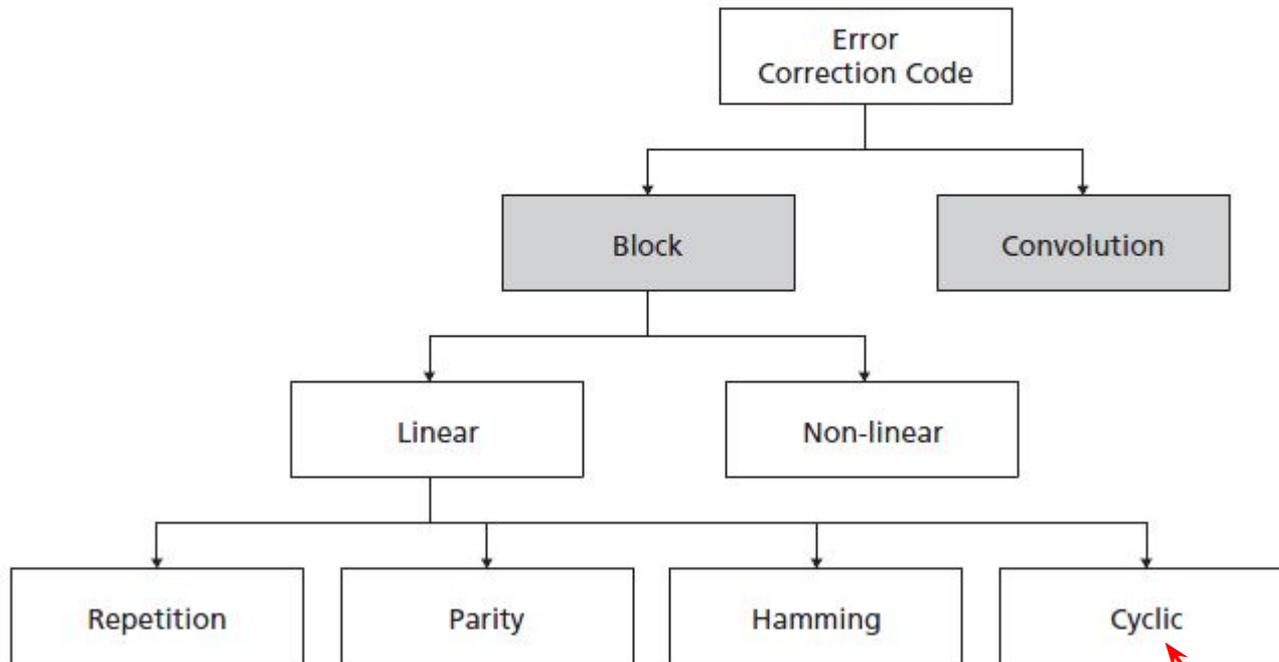
Тройную ошибку фиксирует

|     |            |           |     |     |  |
|-----|------------|-----------|-----|-----|--|
| b15 | b14        | b13       | b12 | Pr3 |  |
| b11 | <b>b10</b> | <b>b9</b> | b8  | Pr2 |  |
| b7  | <b>b6</b>  | <b>b5</b> | b4  | Pr1 |  |
| b3  | b2         | b1        | b0  | Pr0 |  |
| Pc3 | Pc2        | Pc1       | Pc0 |     |  |

Четвертную ошибку не обнаруживает



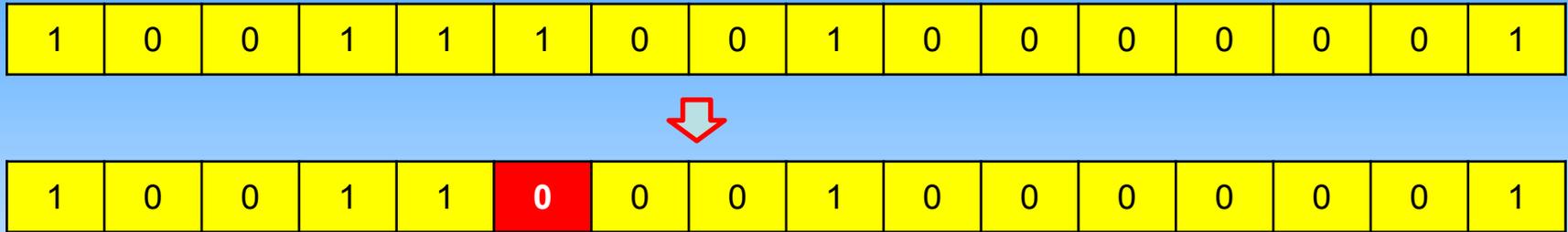
Figure 1: Block Codes



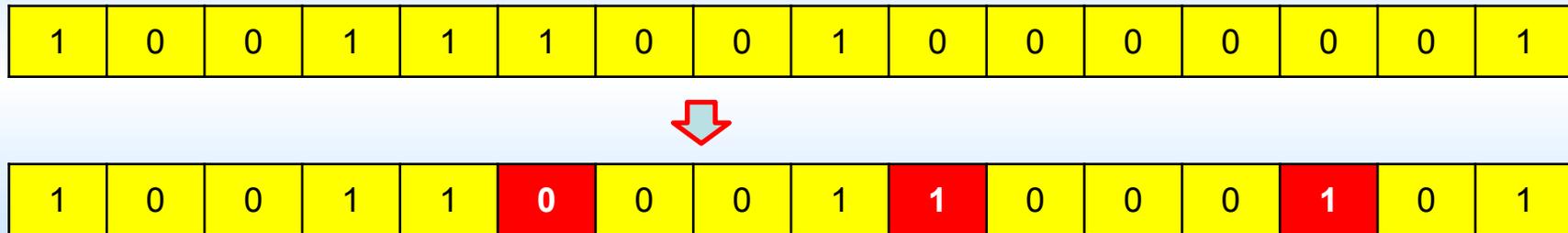
ЭТО ПОТОМ

# Types of Errors

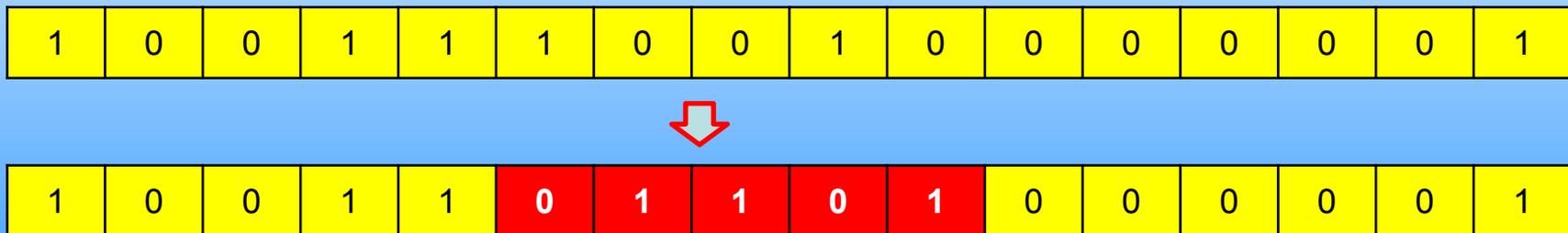
## Single-Bit Error:



## Multiple-Bit Error:



## Burst Error:

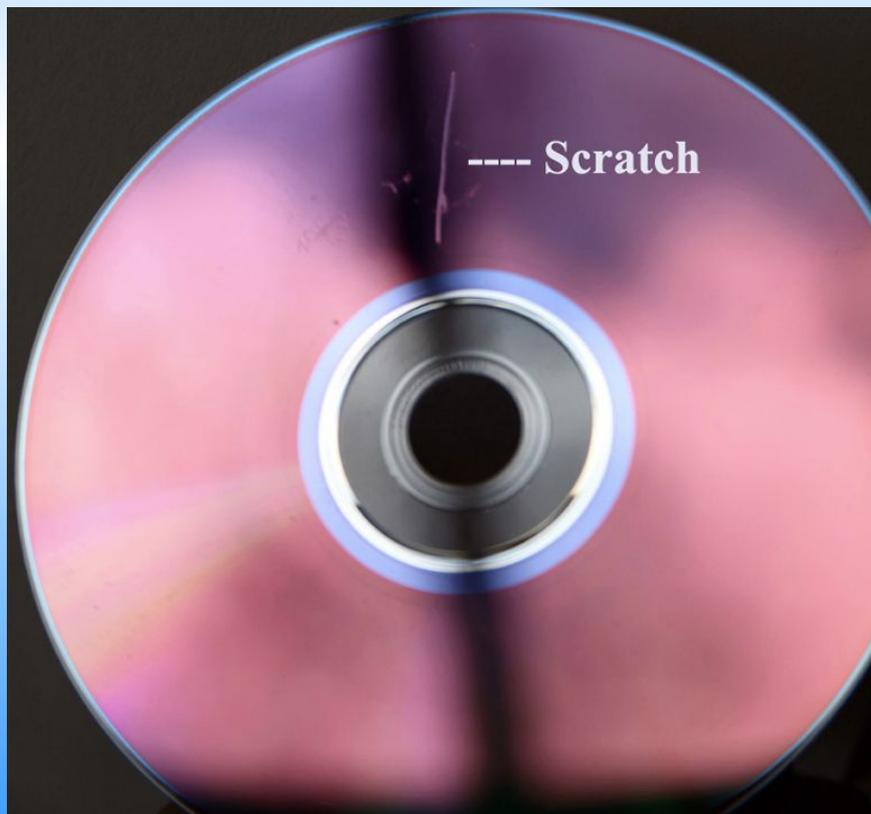


Это ошибки, имеющие одну причину

# Burst Error

Пример

Burst Error:

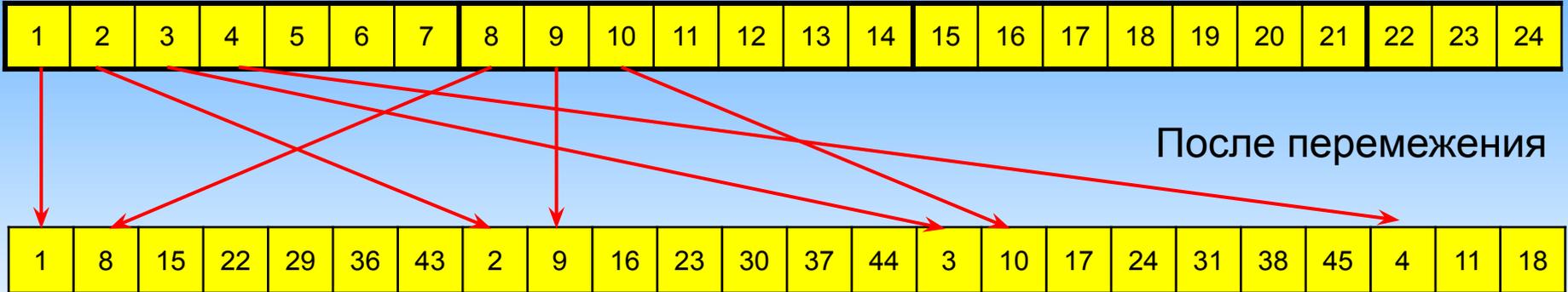


Как исправить?

Надо превратить серию последовательных ошибок в набор одиночных.

# Interleaving

Исходная кодовая последовательность. Хемминг (4,3)



Burst Error



Восстановленная кодовая последовательность с одиночными ошибками



Это легко исправляется