И 5

Практическая работа №32 (1): **Применение интеграла к вычислению площадей.**

1. Вычислите:

$$\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^2}{7+\sqrt{33}}=\frac{3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}+11}{7+\sqrt{33}}=$$

$$=\frac{14+2\sqrt{33}}{7+\sqrt{33}}=\frac{2\left(7+\sqrt{33}\right)}{7+\sqrt{33}}=2$$

Повторение:

$$\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{20} = \frac{1}{20}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$$

$$4+5x^4 = t$$

$$20x^3dx = dt$$

$$x^3dx = \frac{dt}{20}$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\left.\frac{\left(4+5x^4\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{9^{\frac{3}{2}}}{30} - \frac{4^{\frac{3}{2}}}{30} = \frac{27}{30} - \frac{8}{30} = \frac{19}{30}$$

Повторение:

$$\int_{-2}^{1}(5-2x)^3\,dx=\int t^3\cdot\left(-\frac{dt}{2}\right)=\;-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}=$$

$$5-2x=t$$

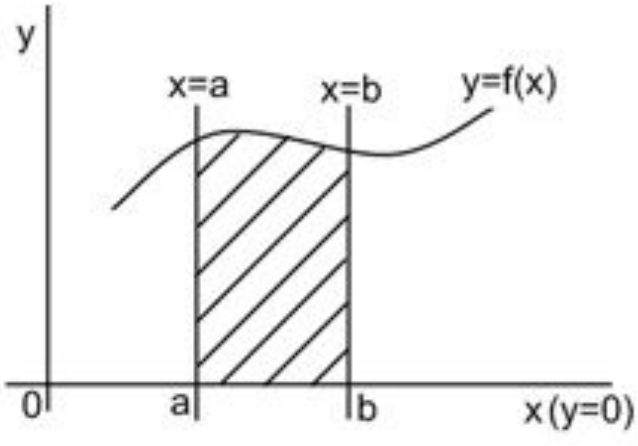
$$-2\cdot dx=dt$$

$$dx=-\frac{dt}{2}$$

$$=-\left.\frac{(5-2x)^4}{8}\right|_{-2}^{1}=$$

$$=-\frac{81}{8}-\left(-\frac{6561}{8}\right)=\;810$$

Площадь плоской фигуры

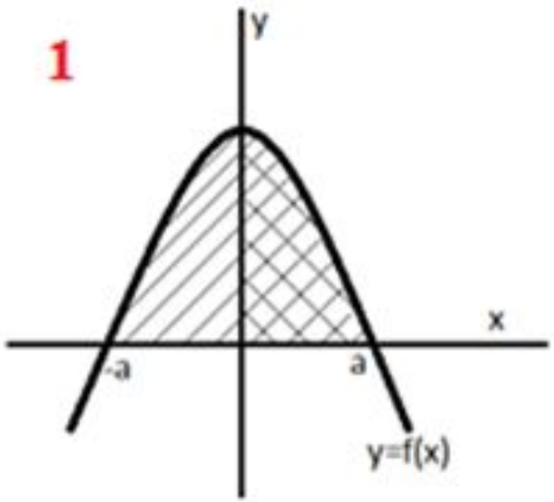


Геометрический смысл определённого интеграла заключается в нахождении площади криволинейной трапеции по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Площадь плоской фигуры

Случаи:

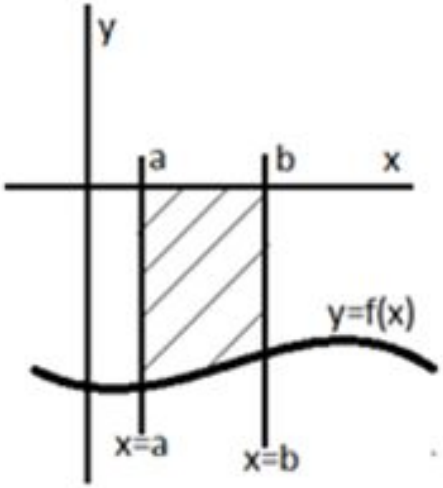


Если $y = f(x)$ - чётная функция, то $S = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

Площадь плоской фигуры

**Случа
и:**

2.

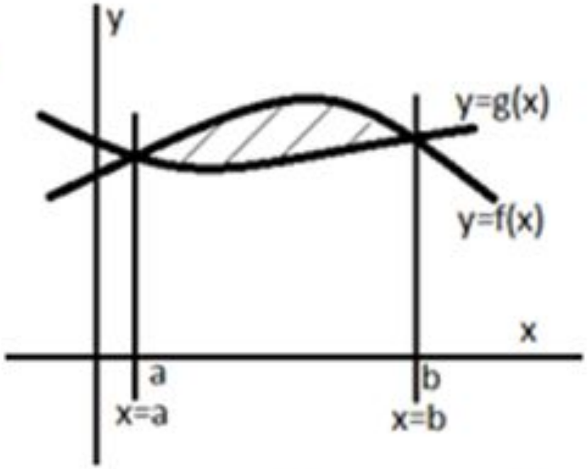


Если криволинейная трапеция находится ниже оси ox, то $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

Площадь плоской фигуры

Случа
и:

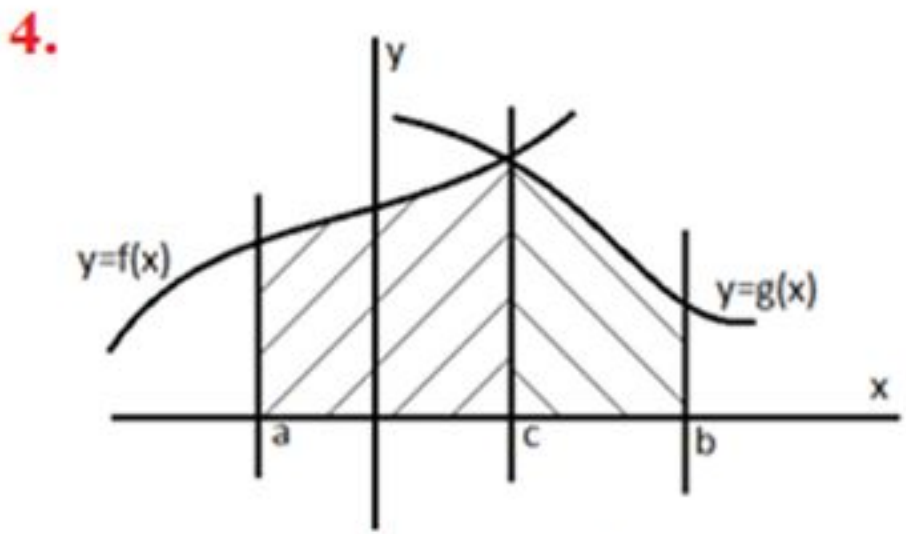
3.



$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

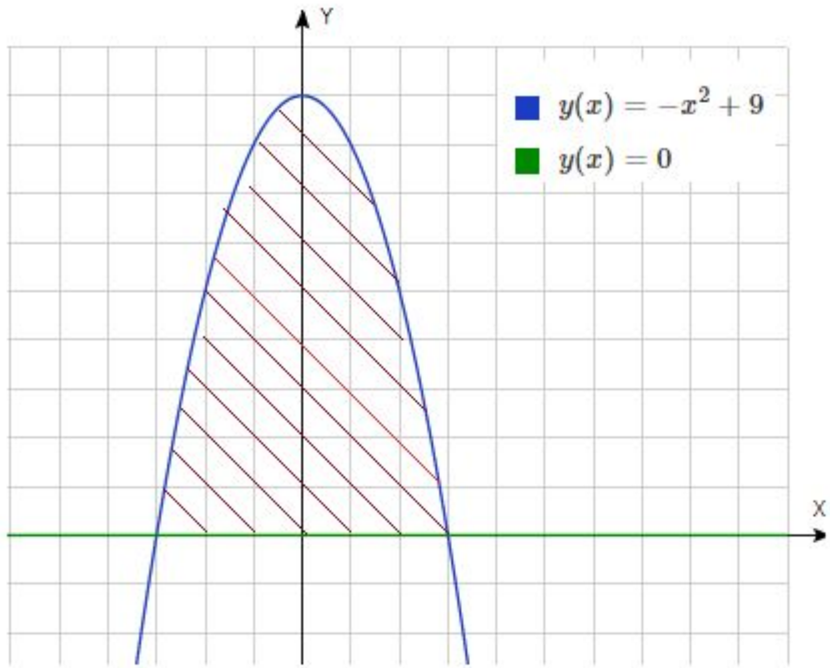
Площадь плоской фигуры

**Случа
и:**



$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

Задача 1: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 9$ и $y = 0$



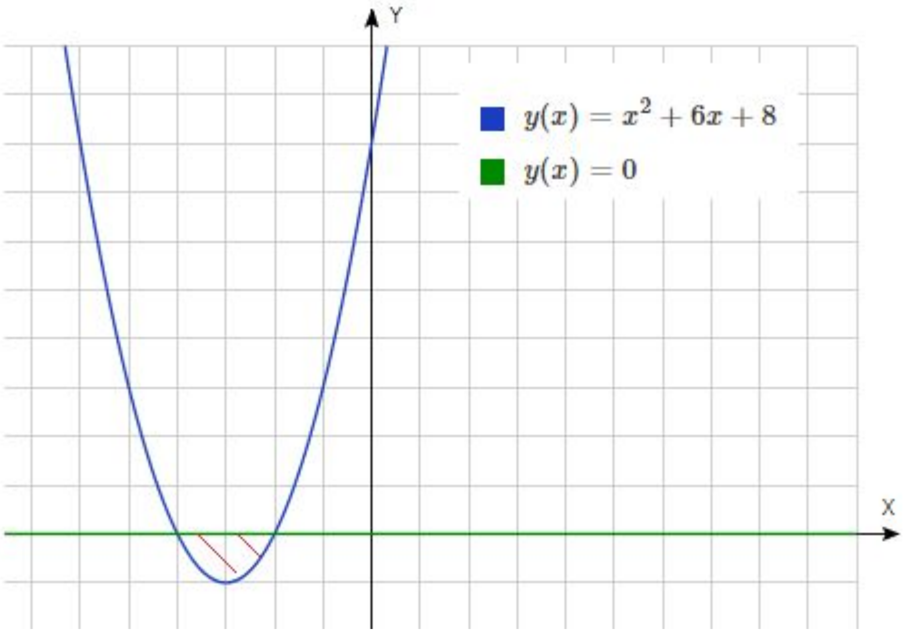
$$S = 2\int_0^3 (-x^2 + 9)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 9 \cdot x\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 9 \cdot 3\right) - 0 =$$

$$= -9 + 27 = 18 \ \text{ед}^2$$

Задача 2: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 6x + 8$ и $y = 0$



$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$D = 4$$

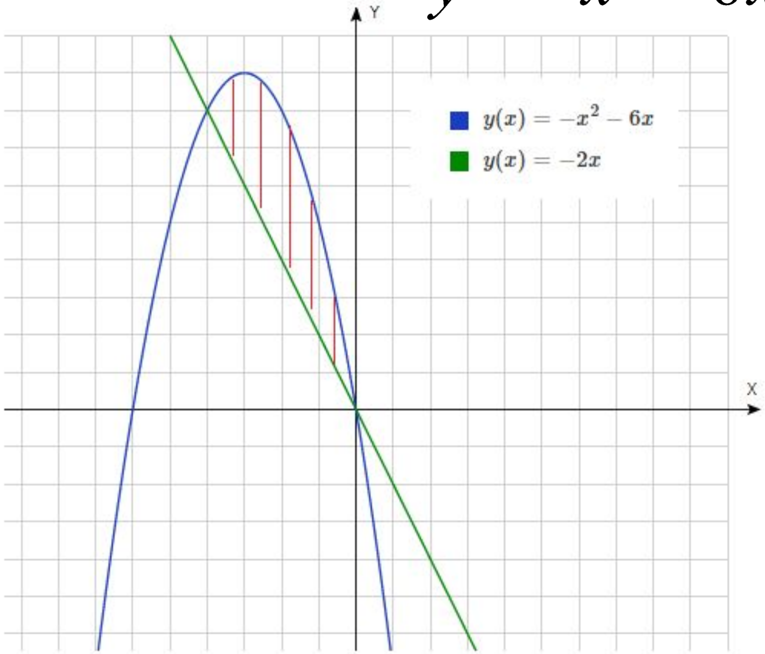
$$x_1 = -2 \quad \text{и} \quad x_2 = -4$$

$$S = \left| \int_{-4}^{-2} (x^2 + 6x + 8)dx \right| = \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right) \Bigg|_{-4}^{-2} =$$

$$= \left| \left(\frac{(-2)^3}{3} + 3 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) \right) - \left(\frac{(-4)^3}{3} + 3 \cdot (-4)^2 + 8 \cdot (-4) \right) \right| =$$

$$= \left| -\frac{8}{3} + 12 - 16 + \frac{64}{3} - 48 + 32 \right| = \left| -20 + \frac{56}{3} \right| = \left| -20 + 18\frac{2}{3} \right| = 1\frac{1}{3} \quad \text{ед}^2$$

Задача 3: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-6x$ и $y=-2x$



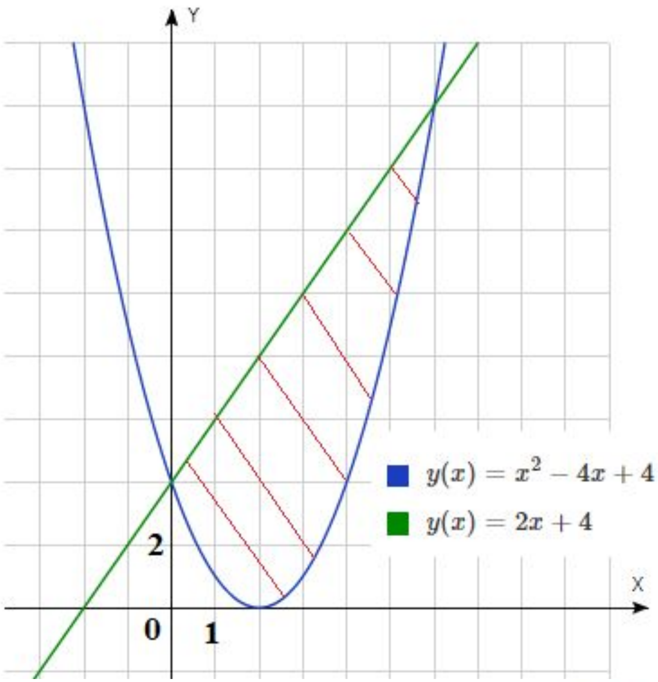
$$-x^2-6x=-2x$$
$$-x^2-6x+2x=0$$
$$-x^2-4x=0$$
$$-x(x+4)=0$$
$$-x=0 \text{ или } x+4=0$$
$$x_1=0$$
$$x_2=-4$$

$$S_1=\int_{-4}^{0}(-x^2-6x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-4}^{0}=0-\left(-\frac{(-4)^3}{3}-3\cdot(-4)^2\right)=$$
$$=-\left(-\frac{-64}{3}-48\right)=-21\frac{1}{3}+48=26\frac{2}{3}\,ед^2$$

$$S=S_1-S_2=26\frac{2}{3}-16=10\frac{2}{3}\,ед^2$$

$$S_2=\int_{-4}^{0}-2xdx=-2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-4}^{0}=0-(-\cdot(-4)^2)=16\,ед^2$$

Задача 4: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x + 4$ и $y = 2x + 4$



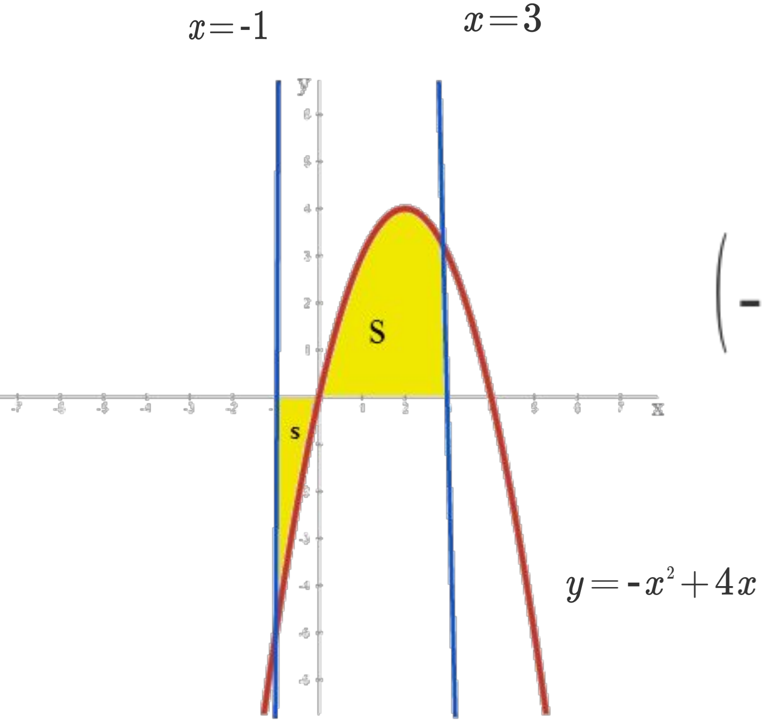
$$x^2 - 4x + 4 = 2x + 4$$
$$x^2 - 4x + 4 - 2x - 4 = 0$$
$$x^2 - 6x = 0$$
$$x(x - 6) = 0$$
$$x = 0 \text{ или } x - 6 = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 6$$

$$S_1 = \int_0^6 (2x+4)dx = (x^2 + 4x)\Big|_0^6 = 6^2 + 4 \cdot 6 - 0 = 60 \text{ ед}^2$$

$$S = S_1 - S_2 = 60 - 24 = 36 \text{ ед}^2$$

$$S_2 = \int_0^6 (x^2 - 4x + 4)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big|_0^6 = 72 - 72 + 24 = 24 \text{ ед}^2$$

Задача 5: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+4x$ и $x=-1, x=3$



$$\int_{-1}^{0}(-x^2+4x)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_{-1}^{0}=$$

$$\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{3}+2\right)=-\frac{1}{3}-2=-2\frac{1}{3}$$

$$S_1=\left|-2\frac{1}{3}\right|=2\frac{1}{3}\ \text{ед}^2$$

$$S_2=\int_{0}^{3}(-x^2+4x)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_{0}^{3}=$$

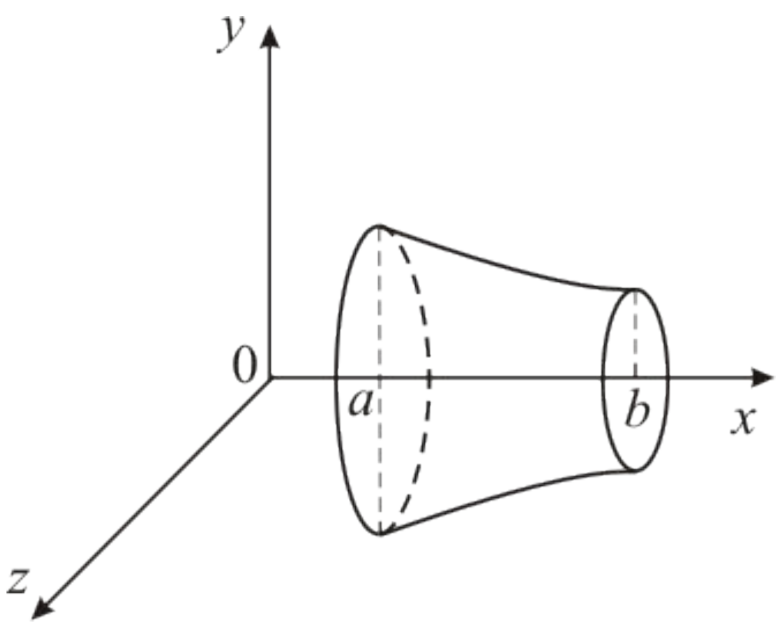
$$\left(-\frac{27}{3}+18\right)-0=-9+18=9\quad \text{ед}^2$$

$$S=2\frac{1}{3}+9=11\frac{1}{3}\quad \text{ед}^2$$

Если тело образовано вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$,

осью ОХ и прямыми $x = a$ и $x = b$,

то его объем вычисляется по формуле:



$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.$$