

И 5

Практическая работа №32
**(1): Применение интеграла к
вычислению площадей.**

1. Вычислите:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{11})^2}{7 + \sqrt{33}} &= \frac{3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{11} + 11}{7 + \sqrt{33}} = \\ &= \frac{14 + 2\sqrt{33}}{7 + \sqrt{33}} = \frac{2(7 + \sqrt{33})}{7 + \sqrt{33}} = 2 \end{aligned}$$

Повторение:

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{4 + 5x^4} dx = \int \sqrt{t} \frac{dt}{20} = \frac{1}{20} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$$

$$\begin{aligned} 4 + 5x^4 &= t \\ 20x^3 dx &= dt \\ x^3 dx &= \frac{dt}{20} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{(4 + 5x^4)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 =$$
$$= \frac{9^{\frac{3}{2}}}{30} - \frac{4^{\frac{3}{2}}}{30} = \frac{27}{30} - \frac{8}{30} = \frac{19}{30}$$

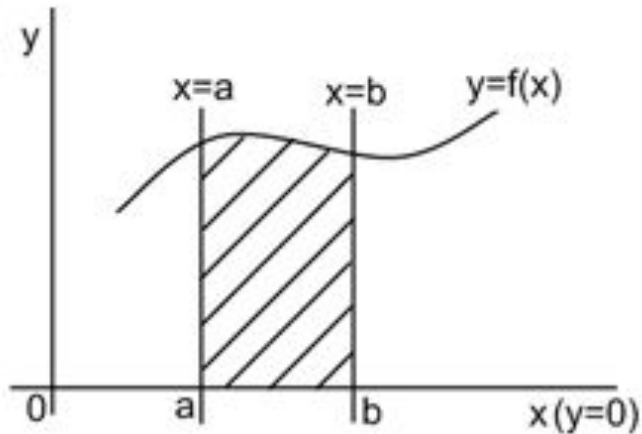
Повторение:

$$\int_{-2}^1 (5 - 2x)^3 dx = \int t^3 \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} =$$

$$\begin{array}{l} 5 - 2x = t \\ -2 \cdot dx = dt \\ dx = -\frac{dt}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{(5 - 2x)^4}{8} \Big|_{-2}^1 = \\ &= -\frac{81}{8} - \left(-\frac{6561}{8}\right) = 810 \end{aligned}$$

Площадь плоской фигуры



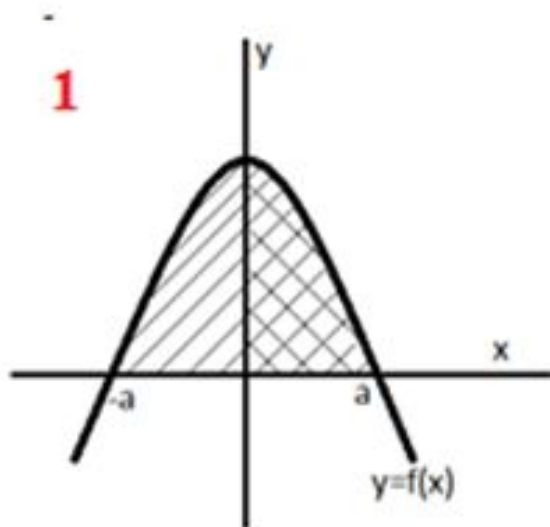
Геометрический смысл определённого интеграла заключается в нахождении площади криволинейной трапеции по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Площадь плоской фигуры

Случа

и:



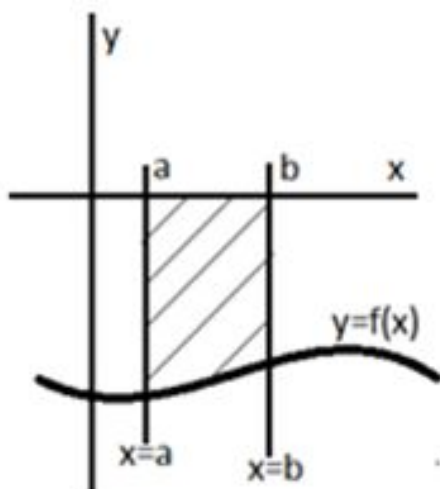
Если $y = f(x)$ - чётная функция, то $S = \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Площадь плоской фигуры

Случа

и:

2.

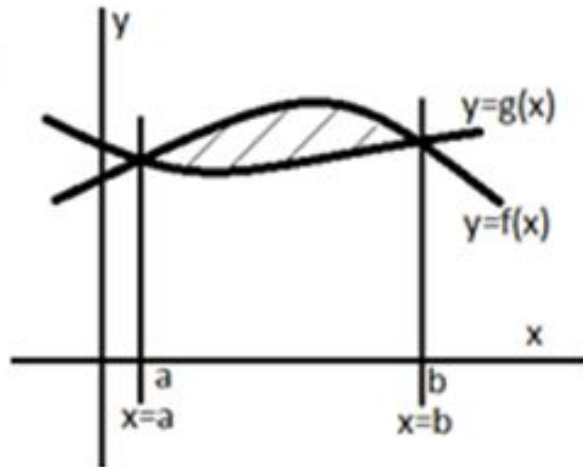


Если криволинейная трапеция находится ниже оси ox , то $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

Площадь плоской фигуры

Случа
и:

3.

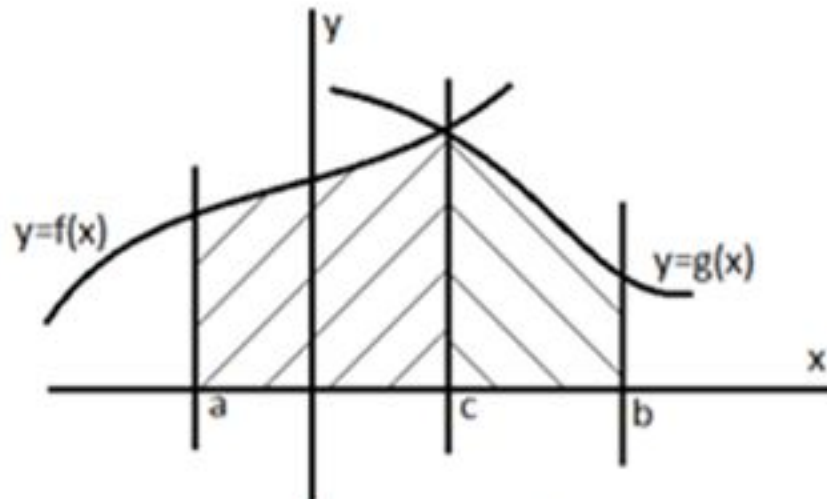


$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Площадь плоской фигуры

Случа
и:

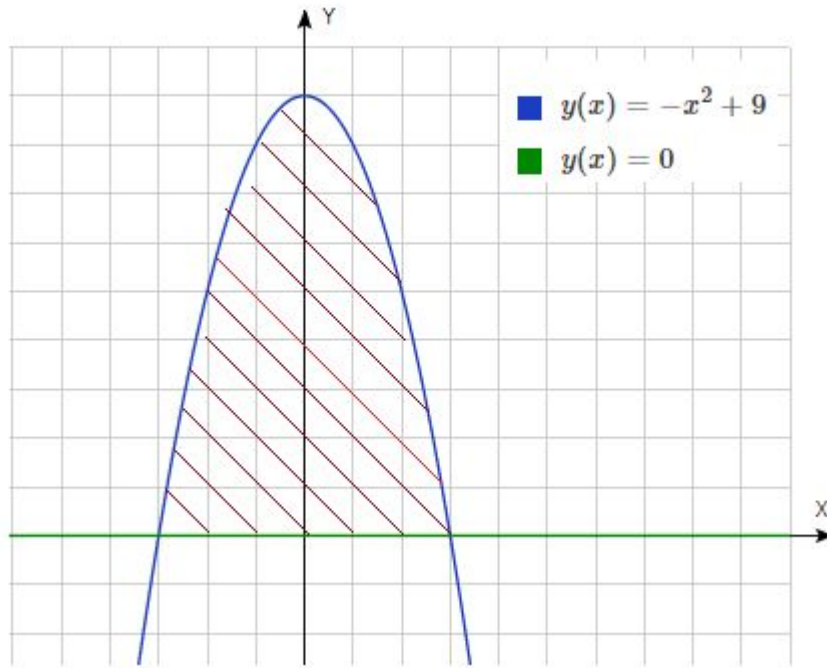
4.



$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$

Задача 1: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

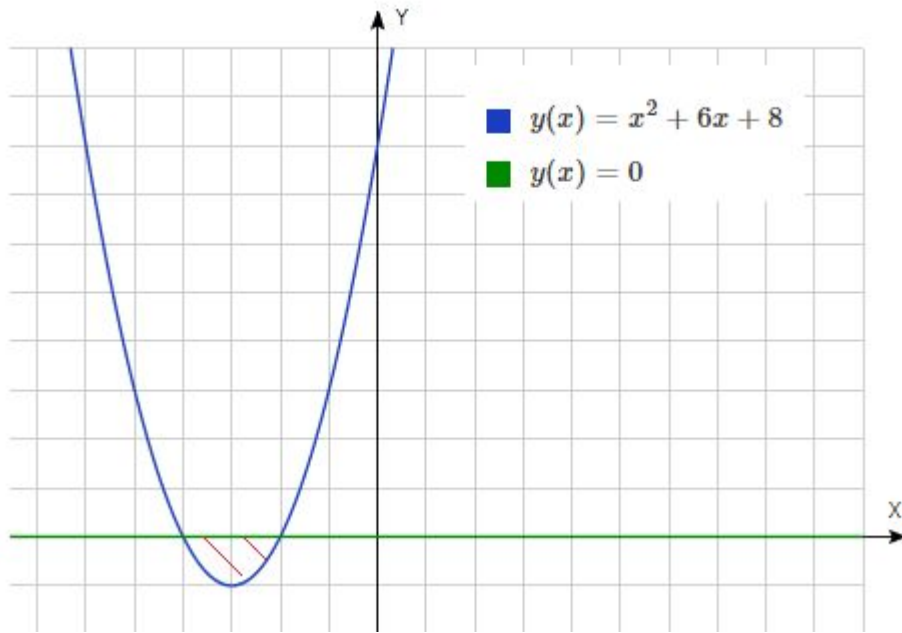
$$y = -x^2 + 9 \quad \text{и} \quad y = 0$$



$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx = \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + 9 \cdot x \right) \Big|_0^3 = \\ &= \left(-\frac{3^3}{3} + 9 \cdot 3 \right) - 0 = \\ &= -9 + 27 = 18 \text{ ед}^2 \end{aligned}$$

Задача 2: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 6x + 8 \quad \text{и} \quad y = 0$$



$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

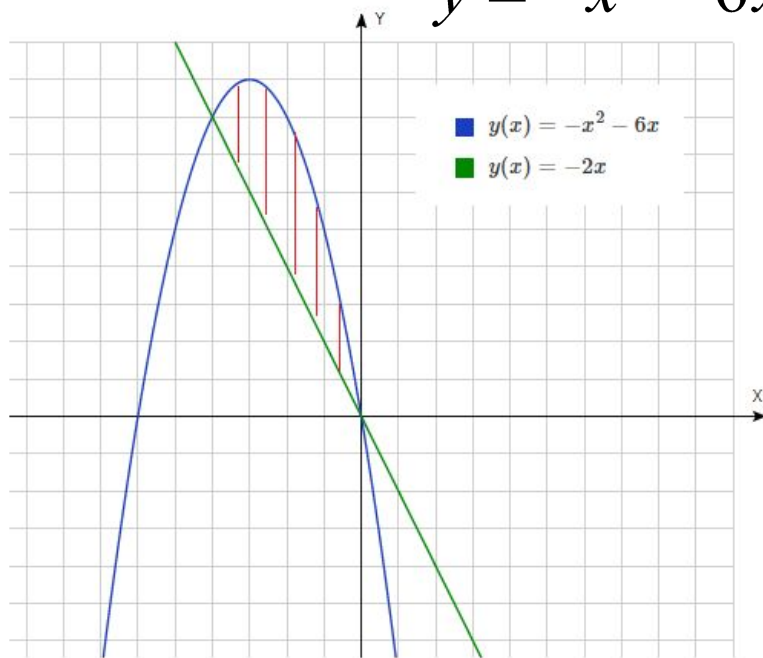
$$D = 4$$

$$x_1 = -2 \quad \text{и} \quad x_2 = -4$$

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-4}^{-2} (x^2 + 6x + 8) dx \right| = \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right) \Big|_{-4}^{-2} = \\ &= \left| \left(\frac{(-2)^3}{3} + 3 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) \right) - \left(\frac{(-4)^3}{3} + 3 \cdot (-4)^2 + 8 \cdot (-4) \right) \right| = \\ &= \left| -\frac{8}{3} + 12 - 16 + \frac{64}{3} - 48 + 32 \right| = \left| -20 + \frac{56}{3} \right| = \left| -20 + 18\frac{2}{3} \right| = 1\frac{1}{3} \text{ ед}^2 \end{aligned}$$

Задача 3: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -x^2 - 6x \quad \text{и} \quad y = -2x$$



$$-x^2 - 6x = -2x$$

$$-x^2 - 6x + 2x = 0$$

$$-x^2 - 4x = 0$$

$$-x(x + 4) = 0$$

$$-x = 0 \quad \text{или} \quad x + 4 = 0$$

$$x_1 = 0$$

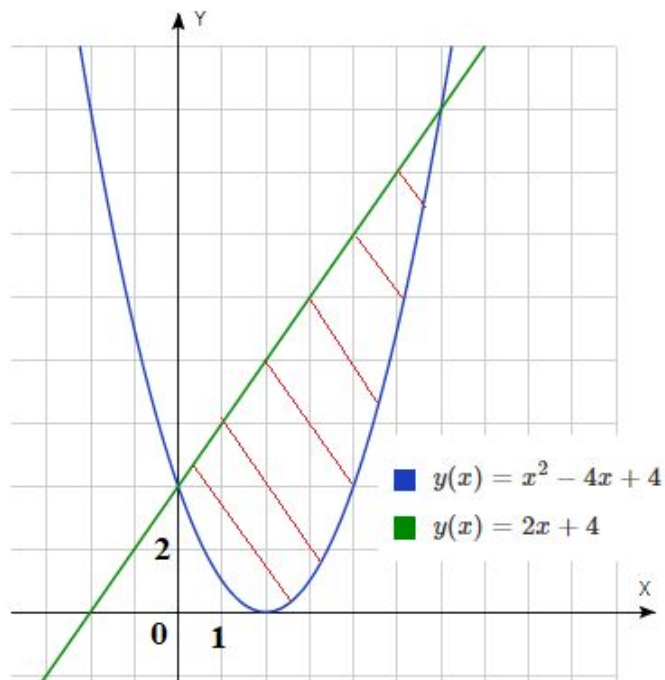
$$x_2 = -4$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-4}^0 (-x^2 - 6x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - 6 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-4}^0 = 0 - \left(-\frac{(-4)^3}{3} - 3 \cdot (-4)^2 \right) = \\ &= - \left(-\frac{-64}{3} - 48 \right) = -21 \frac{1}{3} + 48 = 26 \frac{2}{3} \text{ед}^2 \end{aligned}$$

$$S = S_1 - S_2 = 26 \frac{2}{3} - 16 = 10 \frac{2}{3} \text{ед}^2$$

$$S_2 = \int_{-4}^0 -2x dx = -2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-4}^0 = 0 - (- \cdot (-4)^2) = 16 \text{ед}^2$$

Задача 4: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x + 4$ и $y = 2x + 4$



$$x^2 - 4x + 4 = 2x + 4$$

$$x^2 - 4x + 4 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x - 6 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 6$$

$$S_1 = \int_0^6 (2x + 4) dx = (x^2 + 4x) \Big|_0^6 = 6^2 + 4 \cdot 6 - 0 = 60 \text{ ед}^2$$

$$S = S_1 - S_2 = 60 - 24 = 36 \text{ ед}^2$$

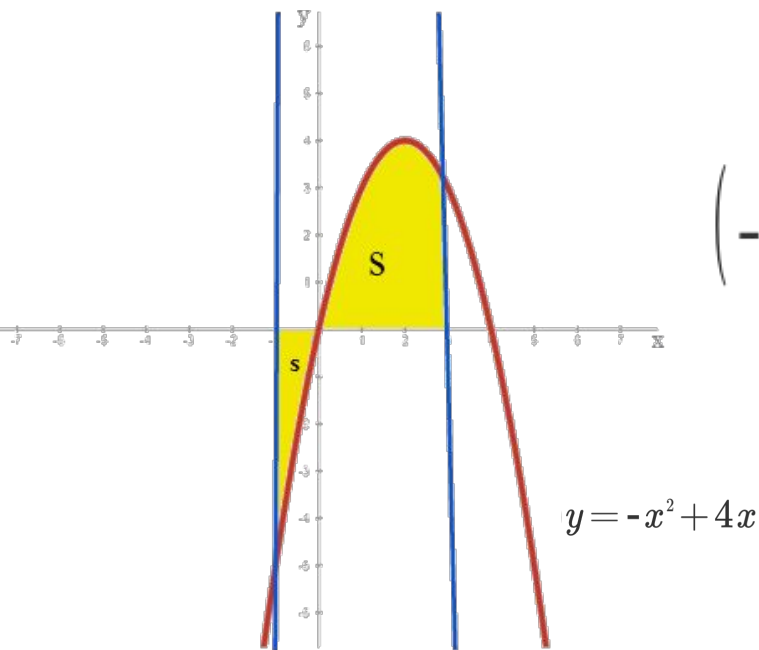
$$S_2 = \int_0^6 (x^2 - 4x + 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^6 = 72 - 72 + 24 = 24 \text{ ед}^2$$

Задача 5: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -x^2 + 4x \quad \text{и} \quad x = -1, x = 3$$

$$x = -1$$

$$x = 3$$



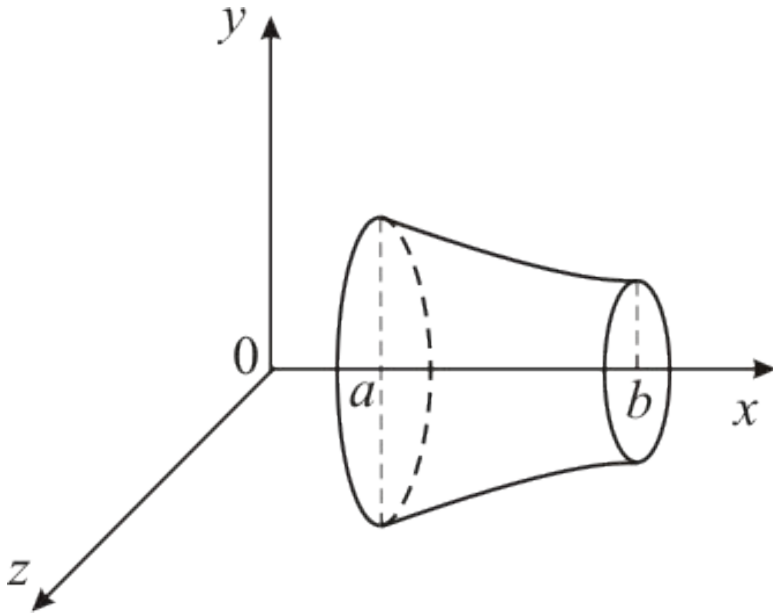
$$\int_{-1}^0 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_{-1}^0 =$$
$$\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{3} + 2 \right) = -\frac{1}{3} - 2 = -2\frac{1}{3}$$

$$S_1 = \left| -2\frac{1}{3} \right| = 2\frac{1}{3} \text{ ед}^2$$

$$S_2 = \int_0^3 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^3 =$$
$$\left(-\frac{27}{3} + 18 \right) - 0 = -9 + 18 = 9 \text{ ед}^2$$

$$S = 2\frac{1}{3} + 9 = 11\frac{1}{3} \text{ ед}^2$$

Если тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, то его объем вычисляется по формуле:



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$