МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
И
МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Общие положения

Математическая модель это описание некоторого явления с помощью математических символов и операций.

Постановка задачи предполагает описание *модели* и *цели* ее исследования. Для одной и той же модели формулируются различные задачи.

Наиболее часто встречающейся моделью является функциональная зависимость $\boldsymbol{y = f(x)}$, для которой ставятся различные задачи, например:

– найти $\boldsymbol{max\ f(x)}$;

– найти $\boldsymbol{x}$, при котором $\boldsymbol{f(x) = 0}$, и др.

Решить задачу – значит указать алгоритм, для получения нужного результата из известных исходных данных.

Методы (алгоритмы) решения математиче-ских задач можно разделить на точные, приближенные и численные.

К точным методам относятся алгоритмы, позволяющие за конечное число действий получить в принципе, если нет ошибок округления, точное решение.

Обычно оно получается в виде формулы или конечного вычислительного алгоритма.

Приближенные – это методы, позволяющие за счет некоторых допущений свести решение исходной задачи к более простой задаче, которая имеет точное решение.

Численные методы предполагают разработку ***вычислительного алгоритма***, обеспечивающего решение задачи с заданной погрешностью.

Погрешность вычислений

Погрешность оцениваают числом, характеризующим близость между точным и приближенным значениями некоторой величины.

Пусть $\boldsymbol{x}$ − точное, а $\boldsymbol{x}^*$ − приближенное значения. Тогда:

$\Delta(x^*) = | x - x^* |$ − абсолютная погрешность;

$\Delta(x^*) \geq | x - x^* |$ − предельная абсолютная погрешность;

$\delta(x^*) = \Delta(x^*) / | x^* |$ − относительная погрешность.

Источники погрешностей

Есть четыре основных источника погрешности результата.

1. ***Неточность математической модели***.

2. ***Погрешность исходных данных***. В зависимости от того, как ошибки исходных данных отражаются на результате, задачи разделяют на: ***корректные*** и ***некорректные***.

Задача ***корректна***, если малые ошибки исходных данных приводят к пропорционально малым ошибкам решения. Если малые ошибки исходных данных приводят к большим ошибкам результатов, задача называется ***некорректной***.

3. ***Погрешность метода***. Алгоритм задачи представляется бесконечной последовательностью действий, выполнение которых ограничивается, например, заданной погрешностью.

4. ***Ошибки округлений***. Расчеты на ПК производятся с конечным числом значащих цифр, поэтому при вычислениях (1./3. = 0.3333...), если округление производится в седьмом знаке, то вносится ошибка $\varepsilon \approx 10^{-8}$. Если вычислений много, ошибки могут накапливаться или компенсироваться.

Метод ***устойчив***, если ошибки округлений не накапливаются, иначе метод ***неустойчив***.

Итерационные методы

Символически решаемую задачу можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}\,(\,\boldsymbol{X}\,) = \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{A}$ – заданный оператор (формула, реализующая метод), элемент $\boldsymbol{b}$ задан, требуется найти $\boldsymbol{X}$.

Обозначим $\boldsymbol{X}$ – точное решение задачи ($\boldsymbol{X}$ может быть числом, вектором, или функцией), $\boldsymbol{X}^*$ – приближенное.

Итерационные методы основаны на построении сходящейся к точному решению $\boldsymbol{X}$ бесконечной последовательности элементов той же природы, что и $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{X}_0,\ \boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2, \ldots,\ \boldsymbol{X}_k \ \rightarrow\ \boldsymbol{X}\ (\text{при } \boldsymbol{k} \rightarrow \infty)$$

Последовательность – ***рекуррентна***, если каждый ее следующий член выражается через предыдущий по некоторому правилу:

$$\boldsymbol{X}_1 = \phi\,(\boldsymbol{X}_0);\ \boldsymbol{X}_2 = \phi\,(\boldsymbol{X}_1);\ \ldots,\ \boldsymbol{X}_k = \phi\,(\boldsymbol{X}_{k-1});\ \ldots \quad (1)$$

$\boldsymbol{X}_0$ – решение на нулевом шаге, т.е. ***начальное приближение***, которое известно или задается.

Расчеты производят до тех пор, пока не выполнится (как правило) условие:

$$\| \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{k-1}} \| < \boldsymbol{\varepsilon} ,$$

где **ε** – заданная погрешность (точность) решения.

В качестве искомого приближенного реше-ния $\boldsymbol{X^*}$ берут последний член последовательности $\boldsymbol{X_k}$, при котором выполнилось указанное нераве-нство, т.е. достигнута заданная точность.

У рекуррентной последовательности есть понятие порядка ($\boldsymbol{m}$) – это количество предыдущих элементов, необходимых для поиска следующего решения.

Итерационный процесс $\boldsymbol{X_k = \phi\,(X_{k-1})}$ явля-ется одношаговым ($\boldsymbol{m} = 1$).

Процесс

$$\boldsymbol{X_k = \phi\,(X_{k-1},\ X_{k-2})};\ \ldots$$

является двухшаговым ($\boldsymbol{m} = 2$).

Итерационный процесс порядка $\boldsymbol{m}$:

$$\boldsymbol{X_k = \phi\,(X_{k-1}, X_{k-2}, \ldots, X_{k-m})};\ \ldots$$