

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
И
МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Общие положения

Математическая модель это описание некоторого явления с помощью математических символов и операций.

Постановка задачи предполагает описание модели и цели ее исследования. Для одной и той же модели формулируются различные задачи.

Наиболее часто встречающейся моделью является функциональная зависимость $y = f(x)$, для которой ставятся различные задачи, например:

- найти $\max f(x)$;
- найти x , при котором $f(x) = 0$, и др.

Решить задачу – значит указать алгоритм, для получения нужного результата из известных исходных данных.

Методы (алгоритмы) решения математических задач можно разделить на точные, приближенные и численные.

К точным методам относятся алгоритмы, позволяющие за конечное число действий получить в принципе, если нет ошибок округления, точное решение.

Обычно оно получается в виде формулы или конечного вычислительного алгоритма.

Приближенные – это методы, позволяющие за счет некоторых допущений свести решение исходной задачи к более простой задаче, которая имеет точное решение.

Численные методы предполагают разработку ***вычислительного алгоритма***, обеспечивающего решение задачи с заданной погрешностью.

Погрешность вычислений

Погрешность оценивают числом, характеризующим близость между точным и приближенным значениями некоторой величины.

Пусть x — точное, а x^* — приближенное значения. Тогда:

$\Delta(x^*) = |x - x^*|$ — абсолютная погрешность;

$\Delta(x^*) \geq |x - x^*|$ — предельная абсолютная погрешность;

$\delta(x^*) = \Delta(x^*) / |x^*|$ — относительная погрешность.

Источники погрешностей

Есть четыре основных источника погрешности результата.

1. *Неточность математической модели.*

2. *Погрешность исходных данных.* В зависимости от того, как ошибки исходных данных отражаются на результате, задачи разделяют на: *корректные* и *некорректные*.

Задача *корректна*, если малые ошибки исходных данных приводят к пропорционально малым ошибкам решения. Если малые ошибки исходных данных приводят к большим ошибкам результатов, задача называется *некорректной*.

3. *Погрешность метода.* Алгоритм задачи представляется бесконечной последовательностью действий, выполнение которых ограничивается, например, заданной погрешностью.

4. *Ошибки округлений.* Расчеты на ПК производятся с конечным числом значащих цифр, поэтому при вычислениях ($1./3. = 0.3333\dots$), если округление производится в седьмом знаке, то вносится ошибка $\varepsilon \approx 10^{-8}$. Если вычислений много, ошибки могут накапливаться или компенсироваться.

Метод *устойчив*, если ошибки округлений не накапливаются, иначе метод *неустойчив*.

Итерационные методы

Символически решаемую задачу можно записать в виде

$$A(X) = b,$$

где A – заданный оператор (формула, реализующая метод), элемент b задан, требуется найти X .

Обозначим X – точное решение задачи (X может быть числом, вектором, или функцией), X^* – приближенное.

Итерационные методы основаны на построении сходящейся к точному решению X бесконечной последовательности элементов той же природы, что и X :

$$X_0, X_1, X_2, \dots, X_k \rightarrow X \text{ (при } k \rightarrow \infty)$$

Последовательность – *рекуррентна*, если каждый ее следующий член выражается через предыдущий по некоторому правилу:

$$X_1 = \phi (X_0); X_2 = \phi (X_1); \dots, X_k = \phi (X_{k-1}); \dots \quad (1)$$

X_0 – решение на нулевом шаге, т.е. *начальное приближение*, которое известно или задается.

Расчеты производят до тех пор, пока не выполнится (как правило) условие:

$$\| X_k - X_{k-1} \| < \varepsilon ,$$

где ε – заданная погрешность (точность) решения.

В качестве искомого приближенного решения X^* берут последний член последовательности X_k , при котором выполнилось указанное неравенство, т.е. достигнута заданная точность.

У рекуррентной последовательности есть понятие порядка (m) – это количество предыдущих элементов, необходимых для поиска следующего решения.

Итерационный процесс $X_k = \phi (X_{k-1})$ является одношаговым ($m = 1$).

Процесс

$$X_k = \phi (X_{k-1}, X_{k-2}); \dots$$

является двухшаговым ($m = 2$).

Итерационный процесс порядка m :

$$X_k = \phi (X_{k-1}, X_{k-2}, \dots, X_{k-m}); \dots$$