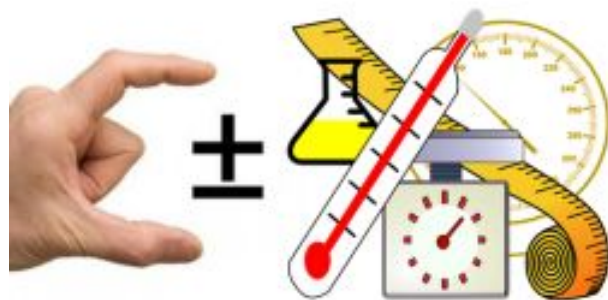




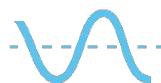
САМАРСКИЙ
ПОЛИТЕХ
Опорный университет

Погрешности измерений



\approx

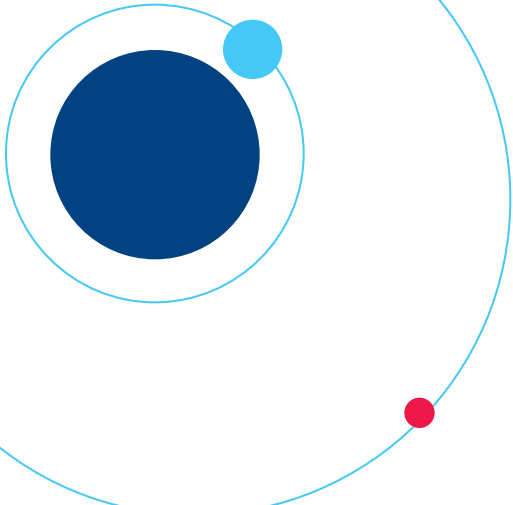
\pm




τ

π

x



Погрешность результата измерения — это отклонение результата измерений ($X_{\text{изм}}$) от истинного (действительного) значения ($X_{\text{ист(действ)}}$) измеряемой величины. Чаще всего она указывает границы неопределенности значения измеряемой величины.



Погрешность средства измерения — это разность между показанием средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины. Она характеризует точность результатов измерений, проводимых данным средством. Эти два понятия во многом близки друг другу и классифицируются по одинаковым признакам.



ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ И СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

По форме представления (способу выражения) :

- *абсолютная погрешность*, выраженная в единицах измеряемой величины

$$\Delta X = X_{\text{изм}} - X_{\text{ист(действ)}}$$

- *относительная погрешность* — отношение абсолютной погрешности к истинному (действительному) значению измеряемой величины или принятому опорному значению (ГОСТ Р ИСО 5725-2002)

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_{\text{ист(действ)}}} = \frac{X_{\text{изм}} - X_{\text{ист(действ)}}}{X_{\text{ист(действ)}}},$$

Длинный подзаголовок

- *Погрешность средств измерений* вычисляется по формуле:

$$\Delta X_n = X_n - X_{\text{ист(действ)}}$$

где X_n — показания прибора; $X_{\text{ист(действ)}}$ — истинное (действительное) значение измеряемой величины.

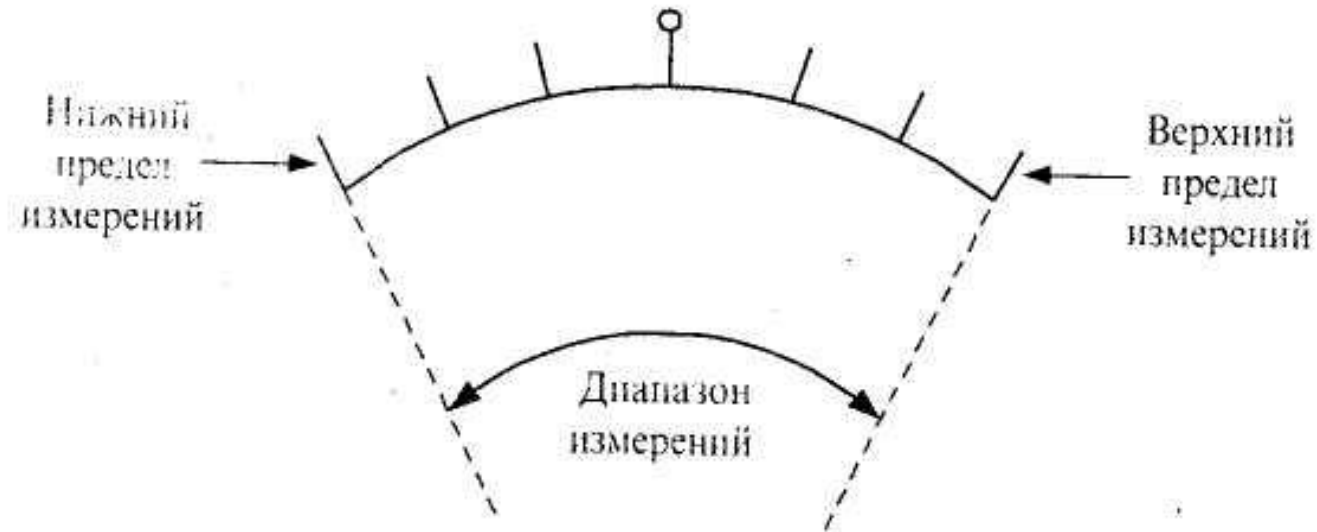
- *Приведенная погрешность СИ* — это относительная погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона

$$\nu = \pm \frac{\Delta X_n}{X_n} 100 \%$$

Длинный подзаголовок

- X_H - нормирующее значение.

Нормирующее значение прибора чаще всего принимается равным верхнему пределу измерений для данного средства измерений (в случае, если нижний предел — нулевое значение односторонней шкалы прибора). В случае двустороннего отсчетного устройства (шкалы) прибора нормирующее значение отнесено к диапазону измерений.





Длинный подзаголовок

В качестве истинного значения при многократных измерениях одного и того же параметра используют среднее арифметическое значение :

$$X_{\text{ист}} \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

где X_i — результат i -го единичного определения; n — число единичных измерений в ряду.

Длинный подзаголовок

Величина X , полученная в одной серии измерений, является случайным приближением к $X_{ист}$. Для оценки ее возможных отклонений от $X_{ист}$ определяют среднюю квадратичную погрешность (СКП) которая получена из ряда равноточных измерений.

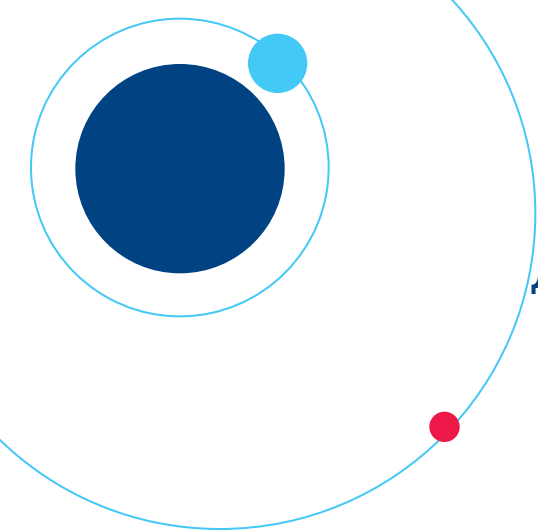
$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}$$

Длинный подзаголовок

- Для оценки рассеяния единичных результатов измерений в ряду равноточных измерений одной и той же физической величины около среднего их значения используют среднюю квадратичную погрешность измерений (СКП):

при $n < 20$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$



Длинный подзаголовок

при $n > 20$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

СКП из серии измерений всегда меньше, чем в каждом отдельном измерении, отсюда следует, что для повышения точности измерений необходимо увеличивать число измерений.



Длинный подзаголовок

По характеру проявления погрешности делятся на систематические и случайные.

- *Систематическая погрешность* — одна из составляющих погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющейся при повторных измерениях одной и той же физической величины.

Величина систематической погрешности характеризует второй показатель качества — правильность полученного результата: чем меньше величина $\Delta_{\text{сис}}$, тем правильнее полученный результат.



Длинный подзаголовок

В зависимости от характера измерения систематические погрешности подразделяют на ***постоянные, прогрессивные, периодические и погрешности, изменяющиеся по сложному закону.***

- ***Постоянные погрешности***, которые сохраняют свое значение в течение всего периода выполнения измерений. Эти погрешности, как правило, легко могут быть выявлены и учтены путем введения соответствующих поправок в результат измерения.

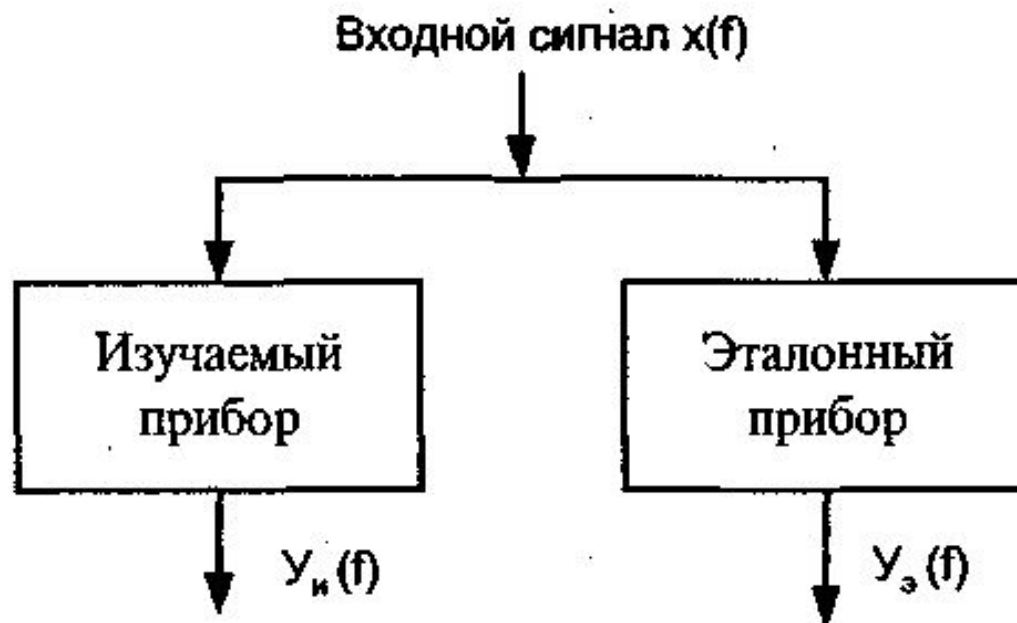


Длинный подзаголовок

- **Прогрессивные погрешности** — это непрерывно возрастающие или убывающие погрешности. Они вызываются процессами износа или старения узлов и деталей средств измерения. К ним могут относиться погрешности от износа контактирующих деталей средств измерения, старение отдельных элементов (конденсаторов, резисторов и т.д.) средств измерения.
- В ряде случаев погрешности могут меняться периодически во времени или при перемещении указателя измерительного прибора. Такие **погрешности называются периодическими**. Обычно такие погрешности встречаются в угломерных приборах с круговой шкалой.



Длинный пс



$$\Delta_C = y_u - y_э,$$

где y_u — результат измерения исследуемого прибора; $y_э$ — результат измерения эталонного прибора.



Длинный подзаголовок

- *Случайными называются погрешности, изменяющиеся случайным образом (по знаку и значению) при одинаковых повторных измерениях одной и той же величины. Эти погрешности возникают в результате влияния на процесс измерения многочисленных случайных факторов, учесть которые практически невозможно.*



Длинный подзаголовок

Величина случайной погрешности $\Delta_{сл}$ характеризует третий показатель качества измерений – **сходимость результатов** при повторных измерениях одного и того же значения измеряемой ФВ, выполненных одним и теми же СИ, одними и тем же методом в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью.

К случайной погрешности, как правило, относится и ***промах*** (грубая погрешность измерений), характеризующийся тем, что погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.



Длинный подзаголовок

По условиям проведения измерений погрешности средств измерений *делятся на основные и дополнительные.*

- *Основной* называется погрешность средства измерений, применяемого в нормальных условиях. Эти условия устанавливаются в нормативно-технических документах на данный вид или тип средств измерений (температура окружающей среды, влажность, давление, напряжение питающей электрической сети и др.) и при них нормируется его погрешность.

Длинный подзаголовок

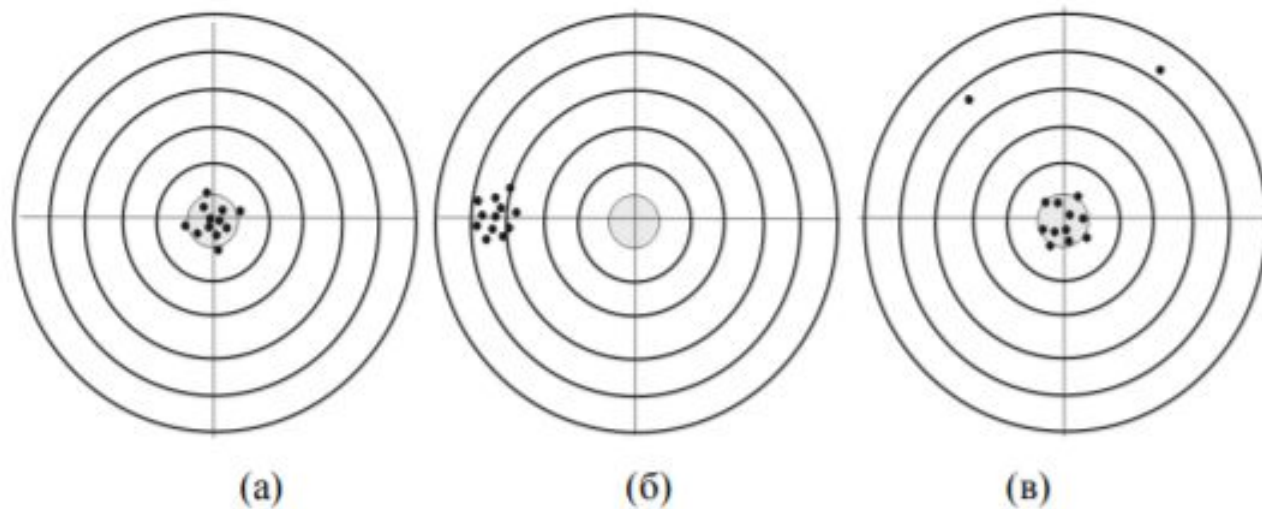
- Значения погрешностей средств измерений, эксплуатируемых в условиях, отличающихся от нормальных, будут различными и плохо контролируруемыми. Составляющая погрешности средства измерений, возникающая дополнительно к основной погрешности вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от нормального его значения или вследствие ее выхода за пределы нормальной области значений, называется *дополнительной погрешностью*.

Длинный подзаголовок

В большинстве нормативно-технических документов на средства измерений за нормальные значения принимаются следующие:

- температура окружающей среды (293 ± 5) К;
- относительная влажность (65 ± 15) % ;
- атмосферное давление $(100 + 4)$ кПа ($750 + 30$ мм рт. ст.);
- напряжение питающей электрической сети $(220 + 4,4)$ В с частотой $(50 + 0,5)$ Гц.

Длинный подзаголовок



Пример случайной (а), случайной и систематической (б), случайной и
грубой (в) погрешностей



Длинный подзаголовок

*По причине возникновения погрешности
разделяются на инструментальные,
методические и субъективные.*

- *Инструментальная погрешность обусловлена несовершенством средств измерений и их конструктивными особенностями. Иногда эту погрешность называют приборной или аппаратурной.*

Длинный подзаголовок

- *Методическая погрешность* обусловлена несовершенством и недостатками применяемого в средстве измерений метода измерений и упрощений при разработке конструкции средства измерений, а также возможными недостатками методик измерений.
- *Субъективная (личная) погрешность* измерения обусловлена погрешностью отсчета оператором показаний по шкале средства измерений вследствие индивидуальных особенностей оператора (внимание, зрение, подготовка и др.). Эти погрешности практически отсутствуют при использовании автоматических или автоматизированных средств измерений.



Длинный подзаголовок

По характеру измерения физической величины
погрешности средства измерений разделяются на
статические и динамические.

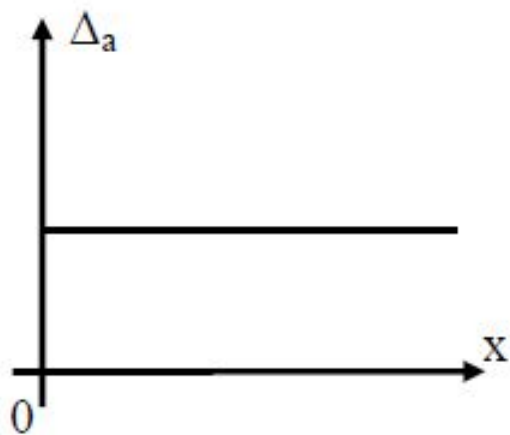
- Погрешность средства измерений, применяемого при измерении физической величины, которая за время измерений не изменяется, носит название **статической погрешности.**
- А погрешность, возникающая при измерении изменяющейся в процессе измерений физической величины, — **динамической погрешности.**



Длинный подзаголовок

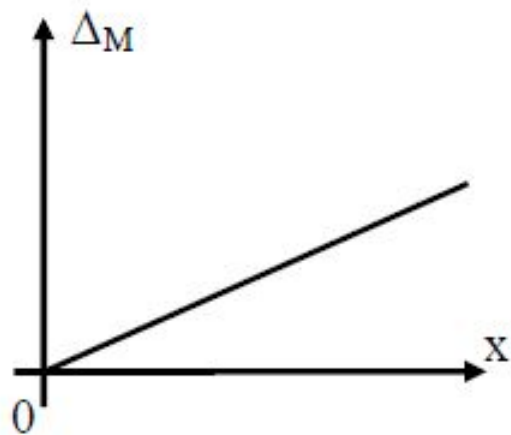
*По характеру зависимости от измеряемой величины X различают погрешности **аддитивные** – не зависящие от X (т.е. $\Delta X = \text{const}$ для любых значений X в пределах диапазона измерений) и **мультипликативные** – линейно или нелинейно зависящие от X (в этом случае $\Delta X = f(X)$).*

Длинный подзаголовок

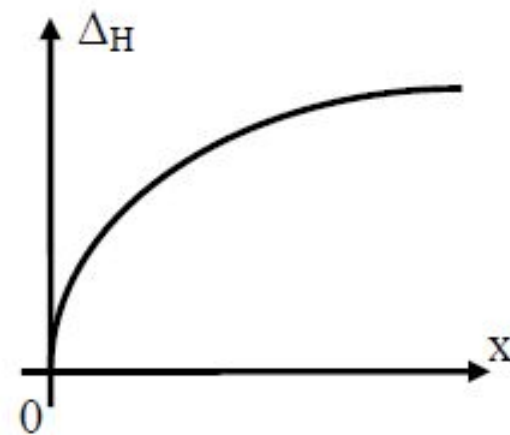


a)

*Аддитивная (a), мультипликативная (б) и нелинейная (в)
погрешности*

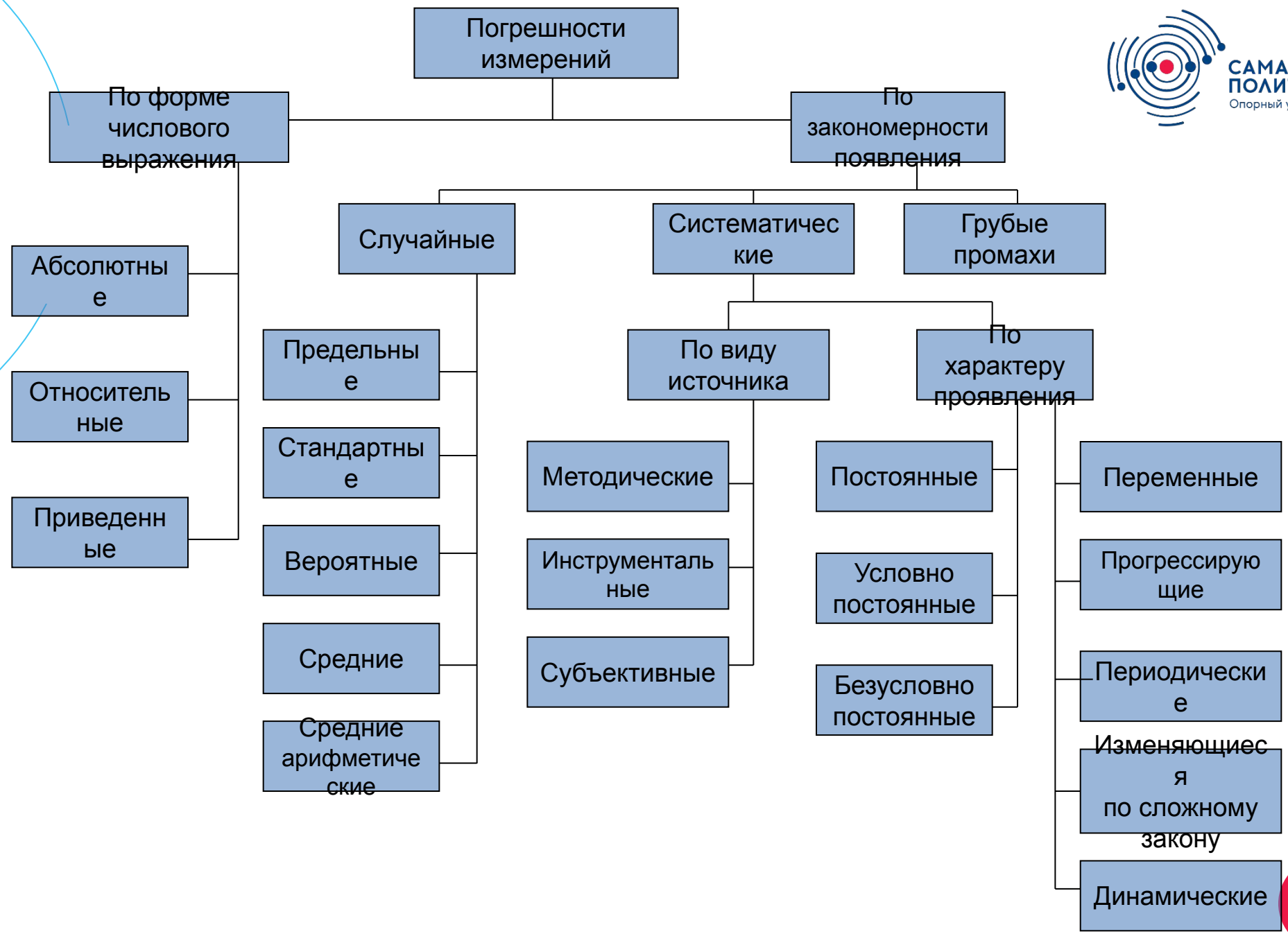


б)



в)





Длинный подзаголовок

Правила суммирования составляющих погрешности.

- *Определение суммарной систематической погрешности.*

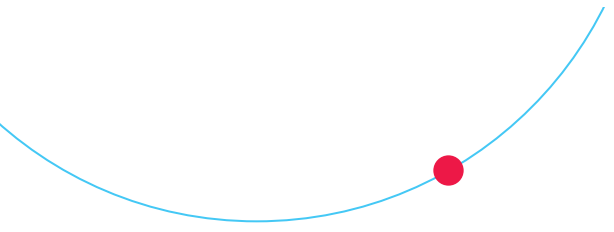
$$\Delta X_{\text{сис}\Sigma} = \sum_{i=1}^n \Delta X_{\text{сис}i}$$

Границы суммарной систематической погрешности определяют, задав желаемый уровень доверительной вероятности P по формуле:

$$\pm \Delta X_{\Sigma \text{сис}.P} = K_P \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta X_{\text{сис}.i}^2}$$



Длинный подзаголовок



Коэффициент K_p зависит от доверительной вероятности P и от числа суммируемых составляющих. На практике используют усреднённое значение коэффициента:

| | | | | |
|-------|------|------|------|------|
| P | 0,9 | 0,95 | 0,98 | 0,99 |
| K_p | 0,95 | 1,1 | 1,3 | 1,4 |

Длинный подзаголовок

- **Определение суммарной случайной составляющей погрешности.** (В том случае, когда есть несколько независимых причин, вызывающих случайную погрешность, причем каждая составляющая, в общем случае, может иметь свой закон распределения).

Если составляющие случайной погрешности известны и характеризуются СКП (средней квадратической погрешностью) S_i , то суммарная СКП:

При независимых составляющих

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2}$$

При наличии корреляции

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2 + 2 \sum_{i \approx j}^n \rho_{ij} S_i S_j}$$

Длинный подзаголовок

- Определение *общей погрешности результата измерений* с учетом суммарной систематической и суммарной случайной составляющих погрешности.
(ГОСТ 8.207-76.)

1 Если отношение

$$K = \frac{\Theta_{\Sigma}}{S_{\Sigma}} < 0.8$$

$$\Theta_{\Sigma} = K_P \sqrt{\sum_{i=1}^n \Theta_i^2}$$

где Θ_i – не исключенные остатки систематических погрешностей
или Θ_i – суммарная СКП

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2}$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2 + 2 \sum_{i \approx j} \rho_{ij} S_i S_j}$$



Длинный подзаголовок

ТО НЕИСКЛЮЧЕННЫМИ СИСТЕМАТИЧЕСКИМИ
ПОГРЕШНОСТЯМИ *пренебрегают* И В КАЧЕСТВЕ
ГРАНИЦ ОБЩЕЙ ПОГРЕШНОСТИ ПРИНИМАЮТ ГРАНИЦЫ
ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА СЛУЧАЙНОЙ
ПОГРЕШНОСТИ:

$$\Delta X_{\text{общ}} = \pm \Delta X_{\text{случ}} = \pm t_p S_{\Sigma}$$

где t_p – коэффициент Стьюдента,
 S_{Σ} – суммарная СКП.

Длинный подзаголовок

- 2 Если отношение

$$K = \frac{\Theta_{\Sigma}}{S_{\Sigma}} \gg 8$$

то *пренебрегают случайной погрешностью* и в качестве границ общей погрешности принимают границы суммарной систематической погрешности:

$$\Delta X_{\text{общ}} = \pm \Theta_{\Sigma}(P_{\text{дов}})$$

Линный ползаголовок

3 Если же $0,8 \leq K \leq 8$, границы общей погрешности следует находить, пользуясь эмпирическими формулами

$$\Delta X_{\text{общ}}(P_{\text{дов}}) = K_{P_{\text{дов}}} \left[\Theta_{\Sigma}(P_{\text{дов}}) + \Delta X_{\text{случ}}(P_{\text{дов}}) \right]$$

- где $K_{P_{\text{дов}}}$ - коэффициент, зависящий от доверительной вероятности и величины коэффициента

$$K = \frac{\Theta_{\Sigma}}{S_{\Sigma}}$$

Окончательный результат представляется в виде:

$$X = X_{\text{изм}} \pm \Delta X_{\text{общ}}; P_{\text{дов}} = A$$

$$X_{\text{изм}} - \Delta X_{\text{общ}} \leq X \leq X_{\text{изм}} + \Delta X_{\text{общ}}; P_{\text{дов}} = A$$

Обработка результатов измерений

Целью обработки результатов измерений (наблюдений) является установление значения измеряемой величины и оценка погрешности полученного результата измерения.

Методы обработки результатов наблюдений могут быть разными в зависимости от предварительной информации, которой располагает экспериментатор об источниках и характере проявления погрешностей, условиях эксперимента, свойствах используемых средств измерений, от вида измерений, числа выполненных наблюдений и других причин.

Длинный подзаголовок

1. Исключить систематическую погрешность из каждого наблюдения, т.е. получить исправленный ряд x_1, x_2, \dots, x_n

2. Найти действительное значение измеряемой величины – среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

3. Найти случайные отклонения результатов наблюдения по формуле

$$\rho_1 = x_1 - \bar{x}; \rho_2 = x_2 - \bar{x}; \dots; \rho_n = x_n - \bar{x}$$

4. Проверить правильность нахождения \bar{x} используя свойство случайных отклонений

$$\sum_n \rho_i = 0;$$

5. Определить дисперсию (или ее оценку) среднего арифметического по формулам

$$\sigma^2[\bar{x}] = \frac{\sigma^2[x]}{n} \quad S^2[\bar{x}] = \frac{1}{n} S^2[x] \quad \text{где } \sigma^2[x] \text{ дисперсия исправленного ряда наблюдений;}$$

Длинный ползаголовок

$S^2[\bar{x}]$ - оценка дисперсии исправленного ряда наблюдений, которая определяется по формуле

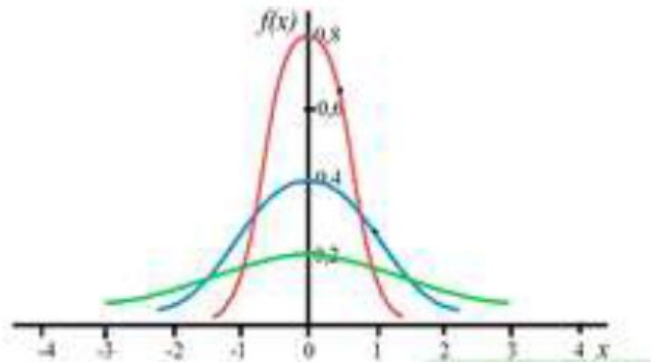
$$S^2[x] = \frac{1}{n-1} \sum_n \rho_i^2$$

6. Найти доверительный интервал погрешности измерения и записать результат измерения с доверительной вероятностью P в виде

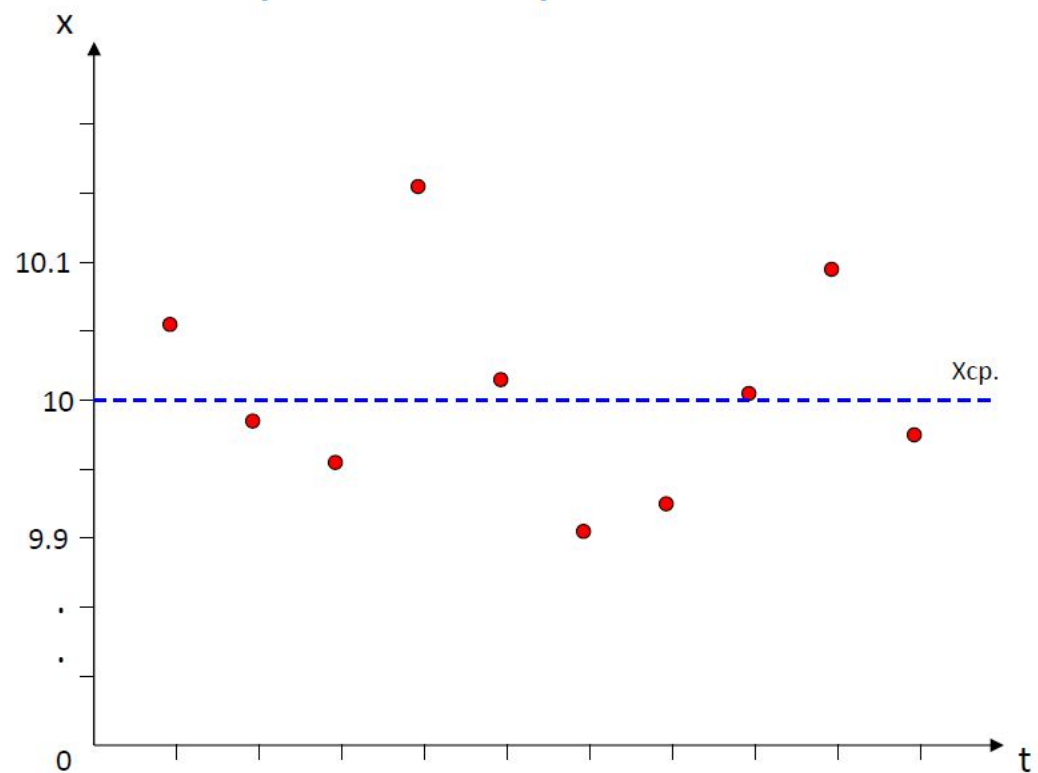
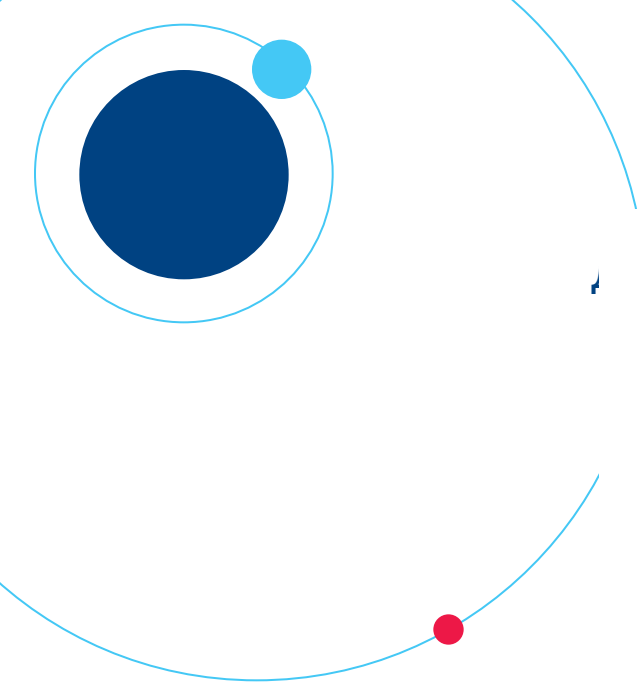
$$x_{\text{и}} = \bar{x} \pm z_p \frac{\sigma[x]}{\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad x_{\text{и}} = \bar{x} \pm t_p(f) \frac{S[x]}{\sqrt{n}}$$

где Z_p - коэффициент нормального закона распределения, зависящий от доверительной вероятности

$t_p(f)$ - коэффициент закона распределения Стьюдента, зависящий как от доверительной вероятности, так и от степени свободы $f = n - 1$



Последние формулы получены в предположении, что закон распределения погрешностей нормальный. При $n > 30$ коэффициенты нормального закона и закона Стьюдента становятся одинаковыми.



| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|-------|------|------|-------|-------|------|------|-------|------|------|
| x, кОм | 10,06 | 9,98 | 9,95 | 10,15 | 10,02 | 9,90 | 9,92 | 10,01 | 10,1 | 9,97 |



Длинный ползаголовок

1. Исключим систематическую погрешность из каждого наблюдения, т.е. получим исправленный ряд x_1, x_2, \dots, x_n

| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 |
|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|------|-------|
| 9,90 | 9,92 | 9,95 | 9,97 | 9,98 | 10,01 | 10,02 | 10,06 | 10,1 | 10,15 |

2. Находим действительное значение измеряемой величины – среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \bar{x} = 10,006$$

3. Находим случайные отклонения результатов наблюдения по формуле

$$\rho_1 = x_1 - \bar{x}; \quad \rho_2 = x_2 - \bar{x}; \dots; \rho_n = x_n - \bar{x}$$

| p1 | p2 | p3 | p4 | p5 | p6 | p7 | p8 | p9 | p10 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| -0,106 | -0,086 | -0,056 | -0,036 | -0,026 | -0,004 | 0,014 | 0,054 | 0,094 | 0,144 |

4. Проверяем правильность нахождения \bar{x} используя свойство случайных отклонений

$$\sum_n \rho_i = 0; \quad (-0,106) + (-0,086) + (-0,056) + (-0,036) + (-0,026) + (-0,004) + 0,014 + 0,054 + 0,094 + 0,144 = 0$$

Длинный подзаголовок

5. Находим оценку дисперсии исправленного ряда наблюдений, которая определяется по формуле

$$S^2[x] = \frac{1}{n-1} \sum_n \rho_i^2$$

$$S^2[x] = \frac{1}{10-1} ((-0,106)^2 + (-0,086)^2 + (-0,056)^2 + (-0,036)^2 + (-0,026)^2 + 0,004^2 + 0,014^2 + 0,054^2 + 0,094^2 + 0,144^2)$$

$$S^2[x] = 0,00528$$

6. Находим доверительный интервал погрешности измерения и записать результат измерения с доверительной вероятностью P в виде

$$x_{\text{н}} = \bar{x} \pm t_p(f) \frac{S[x]}{\sqrt{n}}$$

при P=0,95

$$x_{\text{н}} = (10,006 \pm 0,051) \text{кОм}$$

СПАСИБО

х

τ

π

≡

