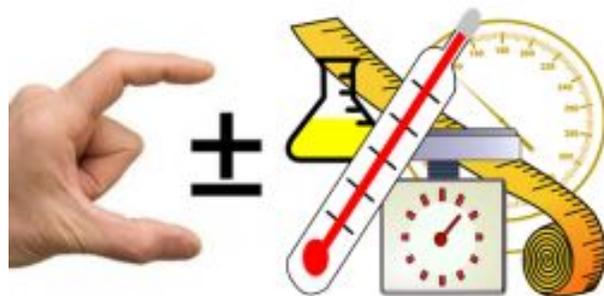




САМАРСКИЙ  
ПОЛИТЕХ  
Опорный университет

## Погрешности измерений



$\approx$

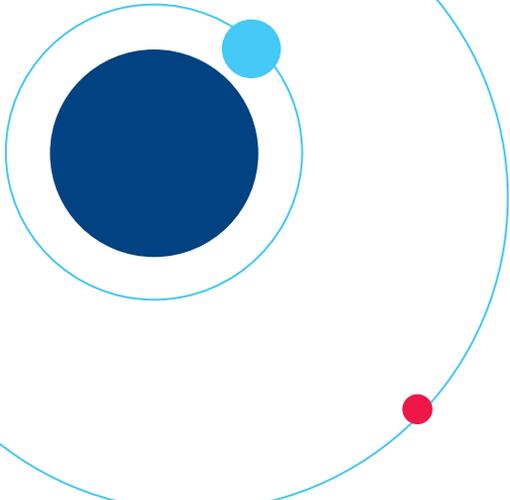
$\pm$



$\tau$

$\pi$

$x$



**Погрешность результата измерения** — это отклонение результата измерений ( $X_{\text{изм}}$ ) от истинного (действительного) значения ( $X_{\text{ист(действ)}}$ ) измеряемой величины. Чаще всего она указывает границы неопределенности значения измеряемой величины.



**Погрешность средства измерения** — это разность между показанием средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины. Она характеризует точность результатов измерений, проводимых данным средством. Эти два понятия во многом близки друг другу и классифицируются по одинаковым признакам.

$\delta, \Delta$



## ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ И СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

*По форме представления (способу выражения) :*

- *абсолютная погрешность*, выраженная в единицах измеряемой величины

$$\Delta X = X_{\text{изм}} - X_{\text{ист(действ)}}$$

- *относительная погрешность* — отношение абсолютной погрешности к истинному (действительному) значению измеряемой величины или принятому опорному значению (ГОСТ Р ИСО 5725-2002 )

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_{\text{ист(действ)}}} = \frac{X_{\text{изм}} - X_{\text{ист(действ)}}}{X_{\text{ист(действ)}}},$$

Длинный подзаголовок

- *Погрешность средств измерений* вычисляется по формуле:

$$\Delta X_n = X_n - X_{\text{ист(действ)}}$$

где  $X_n$  — показания прибора;  $X_{\text{ист(действ)}}$  — истинное (действительное) значение измеряемой величины.

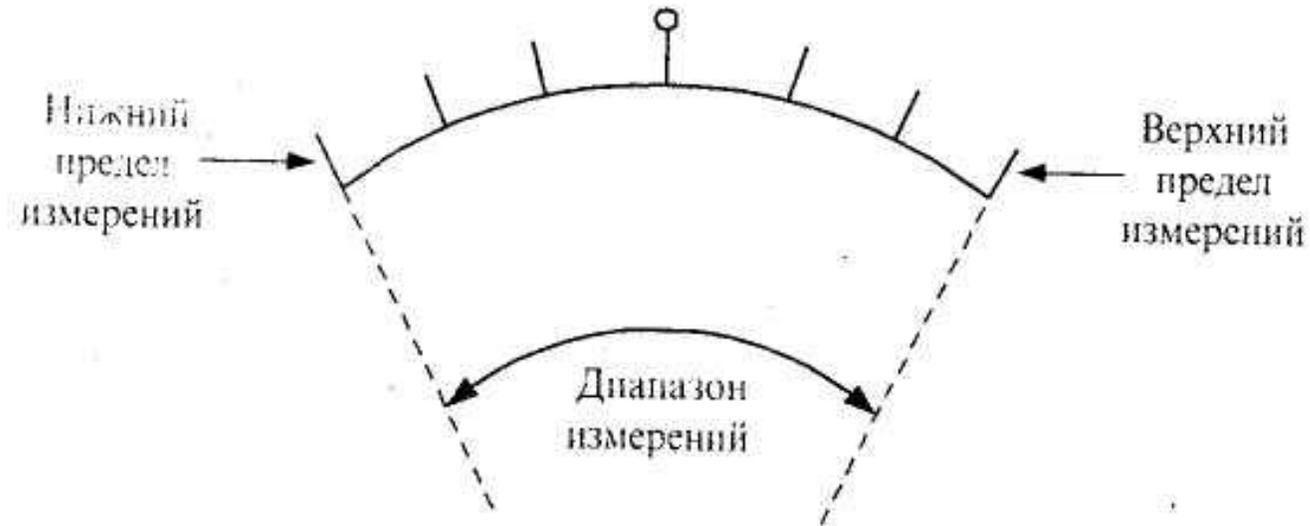
- *Приведенная погрешность СИ* — это относительная погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона

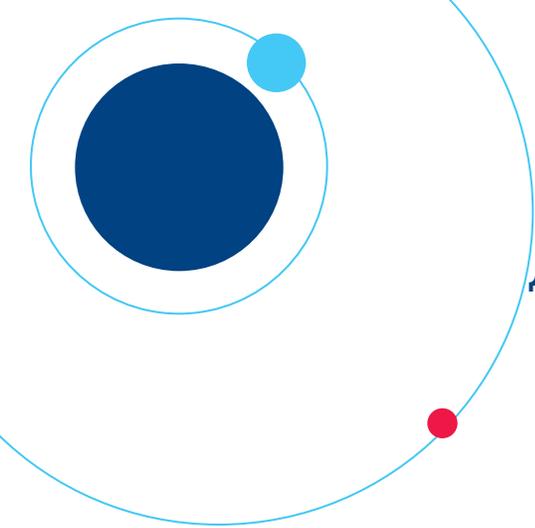
$$\nu = \pm \frac{\Delta X_n}{X_n} 100 \%$$

## Длинный подзаголовок

- $X_H$  - нормирующее значение.

Нормирующее значение прибора чаще всего принимается равным верхнему пределу измерений для данного средства измерений (в случае, если нижний предел — нулевое значение односторонней шкалы прибора). В случае двустороннего отсчетного устройства (шкалы) прибора нормирующее значение отнесено к диапазону измерений.





Длинный подзаголовок

В качестве истинного значения при многократных измерениях одного и того же параметра используют среднее арифметическое значение :

$$X_{\text{ист}} \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

где  $X_i$  — результат  $i$ -го единичного определения;  $n$  — число единичных измерений в ряду.

## Длинный подзаголовок

Величина  $X$ , полученная в одной серии измерений, является случайным приближением к  $X_{ист}$ . Для оценки ее возможных отклонений от  $X_{ист}$  определяют среднюю квадратичную погрешность (СКП) которая получена из ряда равноточных измерений.

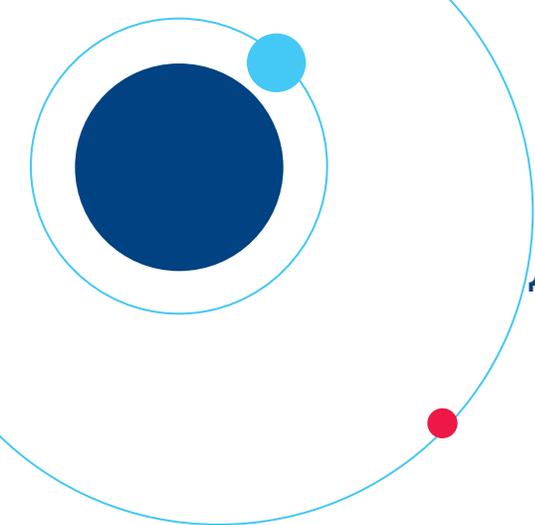
$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}$$

## Длинный подзаголовок

- Для оценки рассеяния единичных результатов измерений в ряду равноточных измерений одной и той же физической величины около среднего их значения используют среднюю квадратичную погрешность измерений (СКП):

при  $n < 20$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

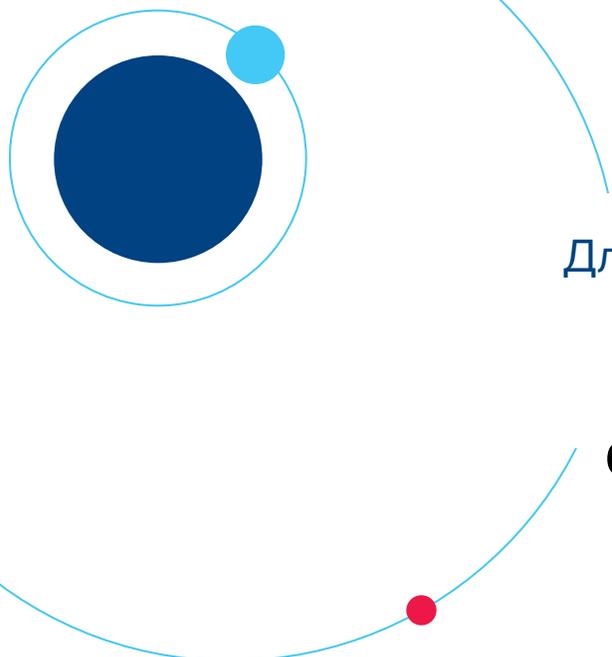


Длинный подзаголовок

при  $n > 20$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

СКП из серии измерений всегда меньше, чем в каждом отдельном измерении, отсюда следует, что для повышения точности измерений необходимо увеличивать число измерений.

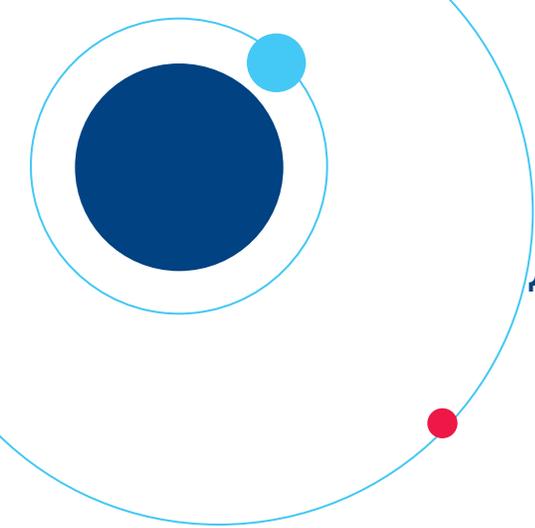


Длинный подзаголовок

**По характеру проявления погрешности** делятся на систематические и случайные.

- *Систематическая погрешность* — одна из составляющих погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющейся при повторных измерениях одной и той же физической величины.

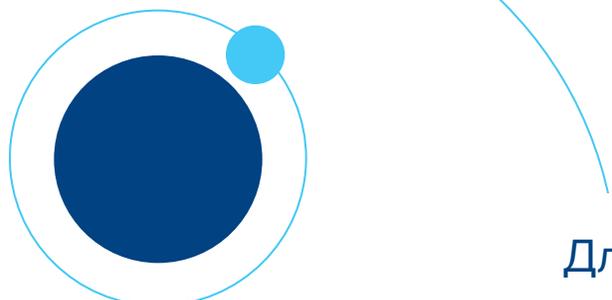
**Величина систематической погрешности характеризует второй показатель качества — правильность** полученного результата: чем меньше величина  $\Delta_{\text{сис}}$ , тем правильнее полученный результат.



Длинный подзаголовок

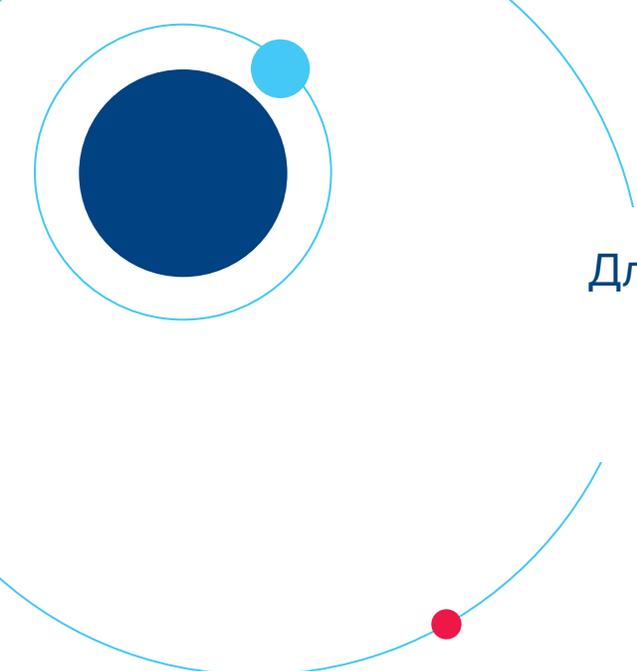
В зависимости от характера измерения систематические погрешности подразделяют на ***постоянные, прогрессивные, периодические и погрешности, изменяющиеся по сложному закону.***

- ***Постоянные погрешности,*** которые сохраняют свое значение в течение всего периода выполнения измерений. Эти погрешности, как правило, легко могут быть выявлены и учтены путем введения соответствующих поправок в результат измерения.

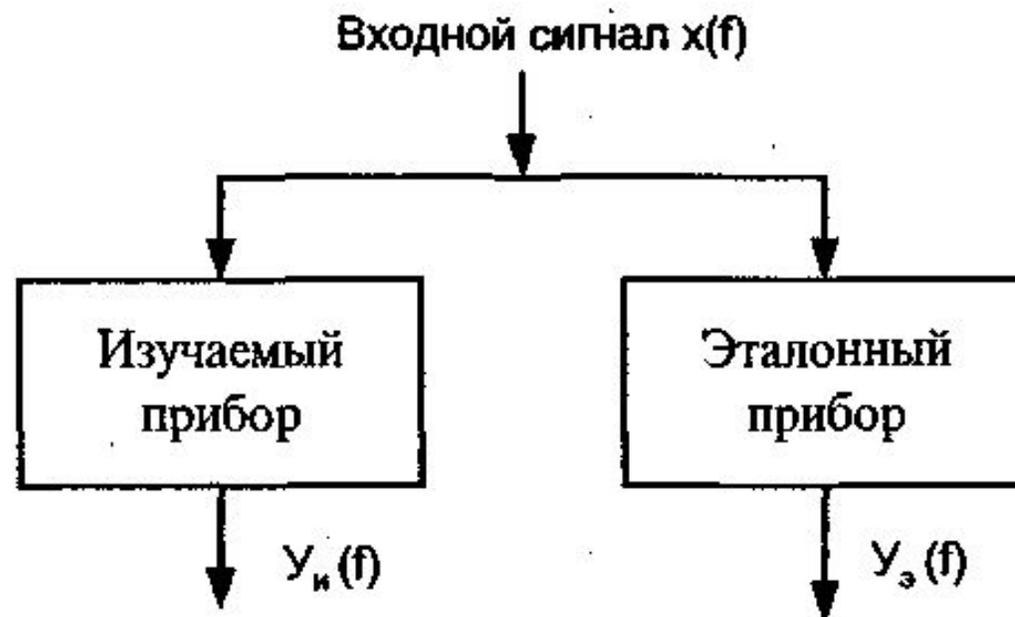


Длинный подзаголовок

- **Прогрессивные погрешности** — это непрерывно возрастающие или убывающие погрешности. Они вызываются процессами износа или старения узлов и деталей средств измерения. К ним могут относиться погрешности от износа контактирующих деталей средств измерения, старение отдельных элементов (конденсаторов, резисторов и т.д.) средств измерения.
- В ряде случаев погрешности могут меняться периодически во времени или при перемещении указателя измерительного прибора. Такие **погрешности называются периодическими**. Обычно такие погрешности встречаются в угломерных приборах с круговой шкалой.

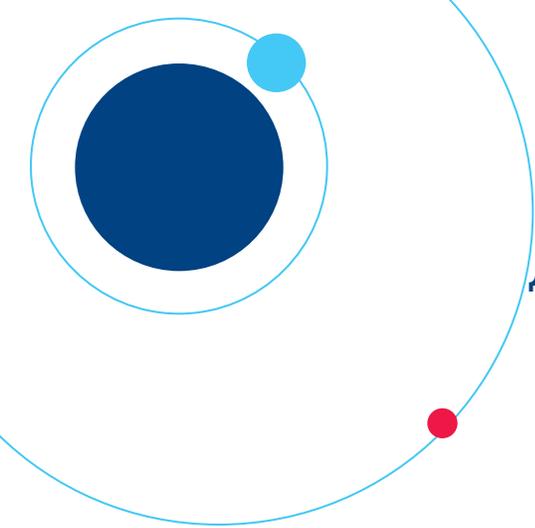


Длинный пс



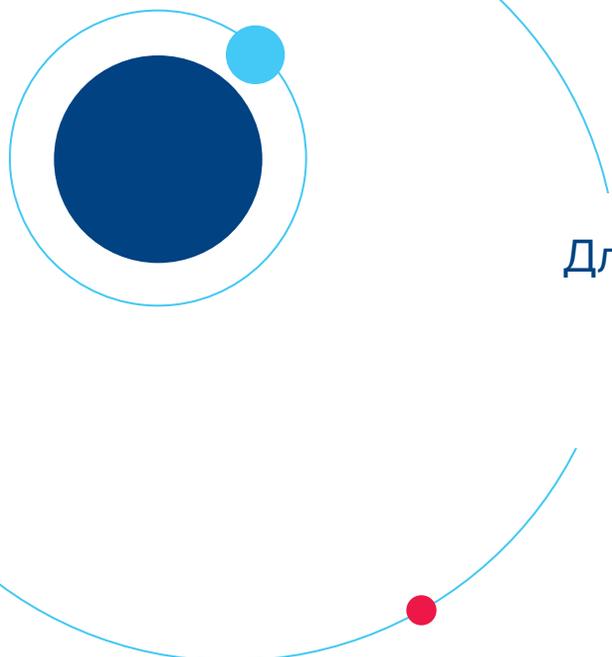
$$\Delta_C = y_u - y_э,$$

где  $y_u$  — результат измерения исследуемого прибора;  $y_э$  — результат измерения эталонного прибора.



Длинный подзаголовок

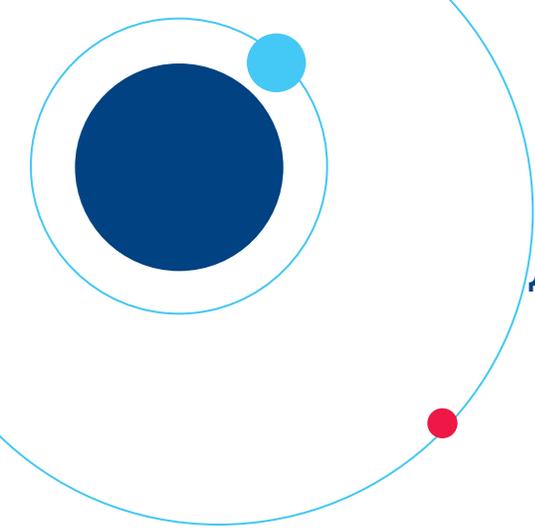
- *Случайными называются погрешности, изменяющиеся случайным образом (по знаку и значению) при одинаковых повторных измерениях одной и той же величины. Эти погрешности возникают в результате влияния на процесс измерения многочисленных случайных факторов, учесть которые практически невозможно.*



Длинный подзаголовок

**Величина случайной погрешности  $\Delta_{сл}$**  характеризует третий показатель качества измерений – **сходимость результатов** при повторных измерениях одного и того же значения измеряемой ФВ, выполненных одним и теми же СИ, одними и тем же методом в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью.

К случайной погрешности, как правило, относится и ***промах*** (грубая погрешность измерений), характеризующийся тем, что погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.



Длинный подзаголовок

***По условиям проведения измерений*** погрешности средств измерений *делятся на основные и дополнительные.*

- *Основной* называется погрешность средства измерений, применяемого в нормальных условиях. Эти условия устанавливаются в нормативно-технических документах на данный вид или тип средств измерений (температура окружающей среды, влажность, давление, напряжение питающей электрической сети и др.) и при них нормируется его погрешность.

## Длинный подзаголовок

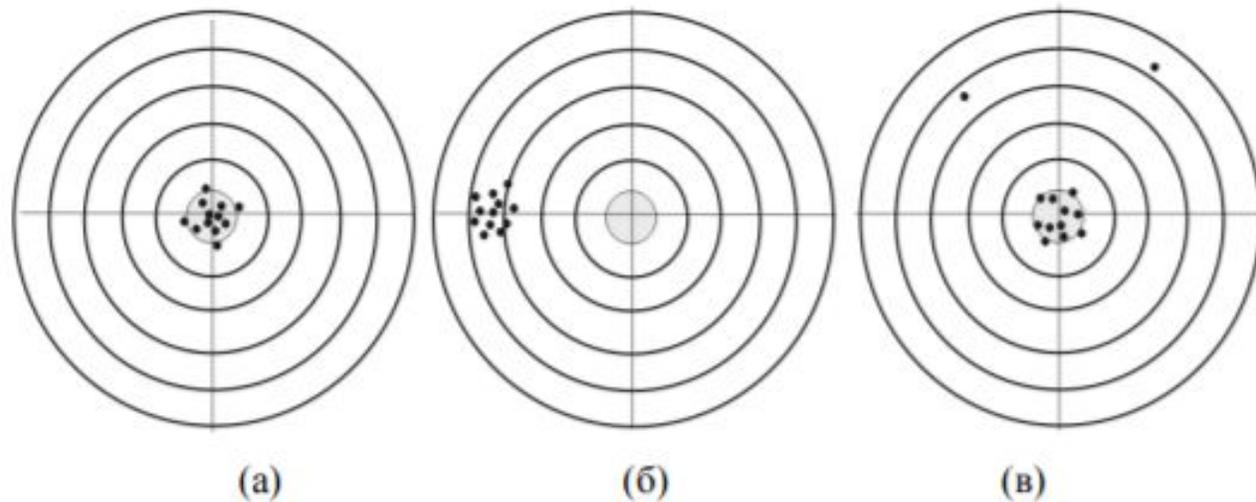
- Значения погрешностей средств измерений, эксплуатируемых в условиях, отличающихся от нормальных, будут различными и плохо контролируруемыми. Составляющая погрешности средства измерений, возникающая дополнительно к основной погрешности вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от нормального его значения или вследствие ее выхода за пределы нормальной области значений, называется *дополнительной погрешностью*.

## Длинный подзаголовок

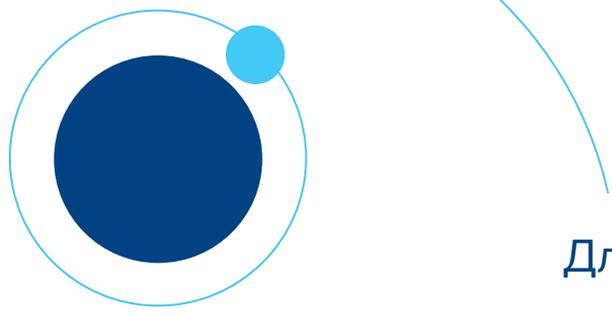
В большинстве нормативно-технических документов на средства измерений за нормальные значения принимаются следующие:

- температура окружающей среды  $(293 \pm 5)$  К;
- относительная влажность  $(65 \pm 15)$  % ;
- атмосферное давление  $(100 + 4)$  кПа ( $750 + 30$  мм рт. ст.);
- напряжение питающей электрической сети  $(220 + 4,4)$  В с частотой  $(50 + 0,5)$  Гц.

Длинный подзаголовок



Пример случайной (а), случайной и систематической (б), случайной и  
грубой (в) погрешностей



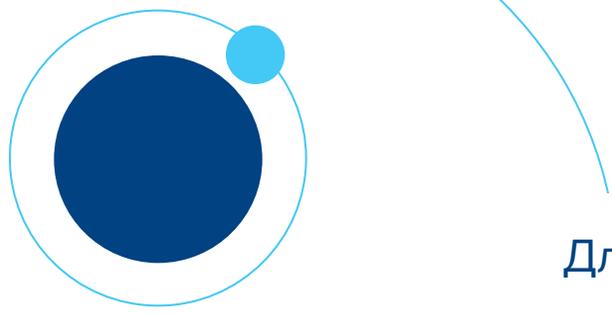
Длинный подзаголовок

*По причине возникновения погрешности  
разделяются на инструментальные,  
методические и субъективные.*

- *Инструментальная погрешность обусловлена несовершенством средств измерений и их конструктивными особенностями. Иногда эту погрешность называют приборной или аппаратурной.*

## Длинный подзаголовок

- *Методическая погрешность* обусловлена несовершенством и недостатками применяемого в средстве измерений метода измерений и упрощений при разработке конструкции средства измерений, а также возможными недостатками методик измерений.
- *Субъективная (личная) погрешность* измерения обусловлена погрешностью отсчета оператором показаний по шкале средства измерений вследствие индивидуальных особенностей оператора (внимание, зрение, подготовка и др.). Эти погрешности практически отсутствуют при использовании автоматических или автоматизированных средств измерений.



Длинный подзаголовок

*По характеру измерения физической величины*  
погрешности средства измерений разделяются на  
**статические и динамические.**

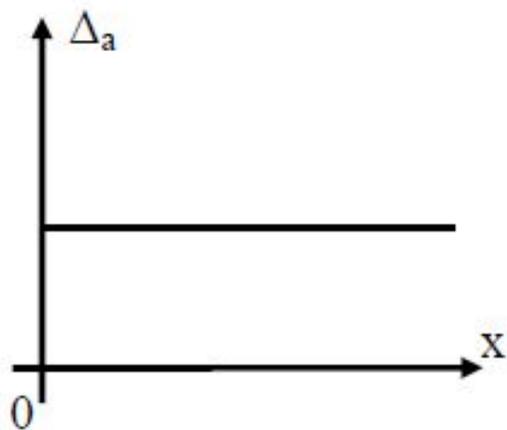
- Погрешность средства измерений, применяемого при измерении физической величины, которая за время измерений не изменяется, носит название **статической погрешности.**
- А погрешность, возникающая при измерении изменяющейся в процессе измерений физической величины, — **динамической погрешности.**



Длинный подзаголовок

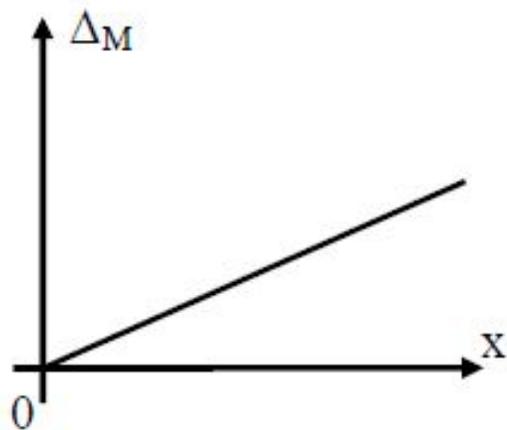
*По характеру зависимости от измеряемой величины  $X$  различают погрешности **аддитивные** – не зависящие от  $X$  (т.е.  $\Delta X = \text{const}$  для любых значений  $X$  в пределах диапазона измерений) и **мультипликативные** – линейно или нелинейно зависящие от  $X$  (в этом случае  $\Delta X = f(X)$ ).*

## Длинный подзаголовок

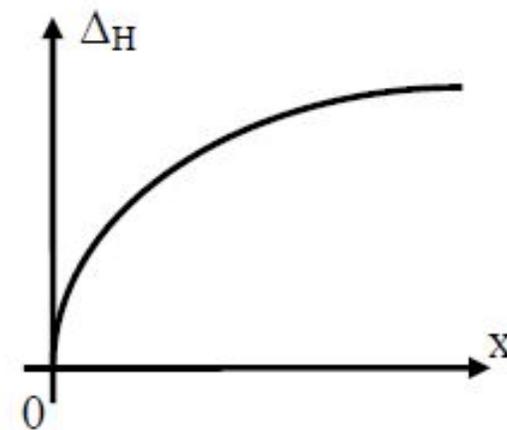


*a)*

*Аддитивная (a), мультипликативная (б) и нелинейная (в)  
погрешности*

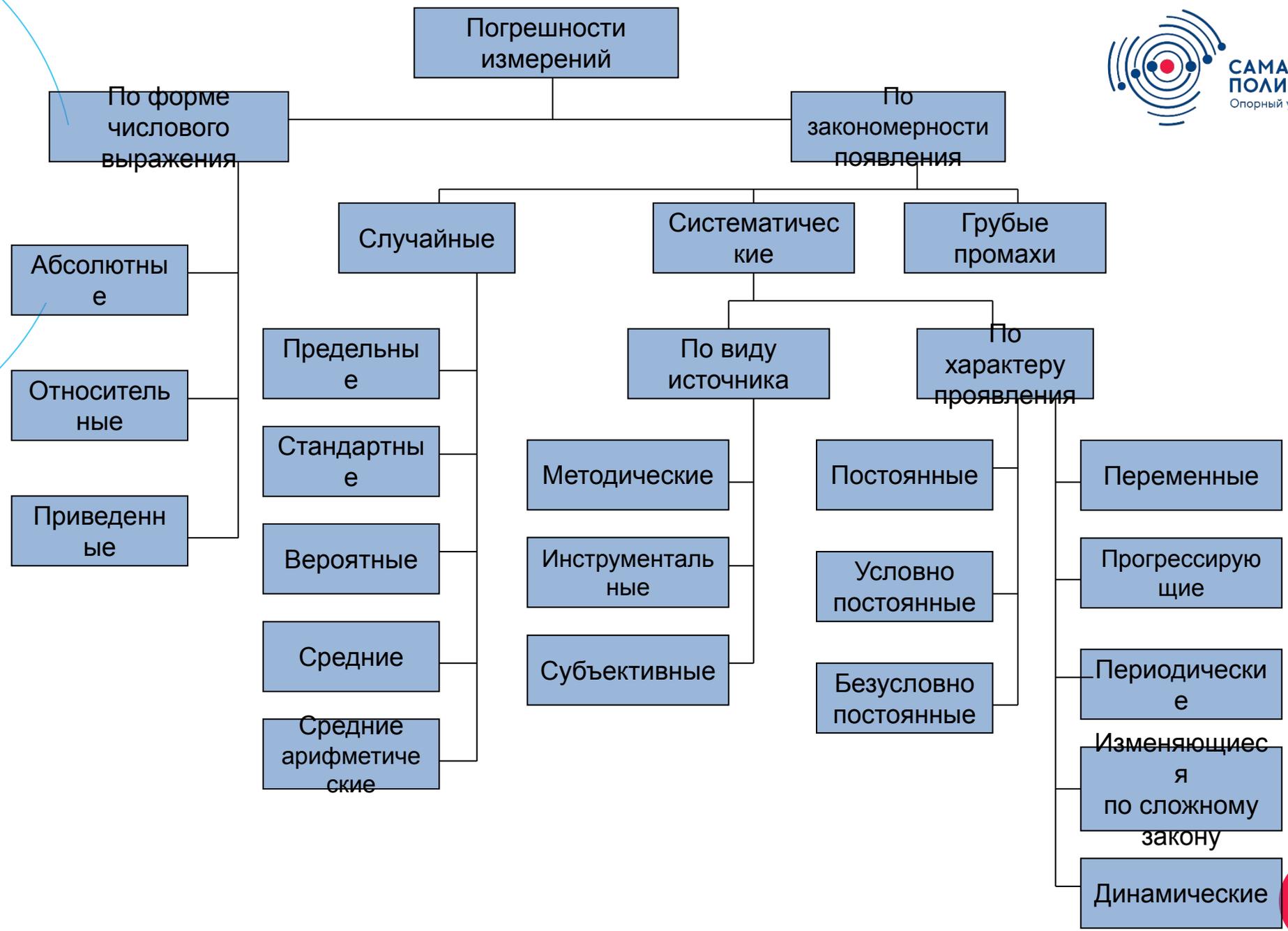


*б)*



*в)*





Длинный подзаголовок

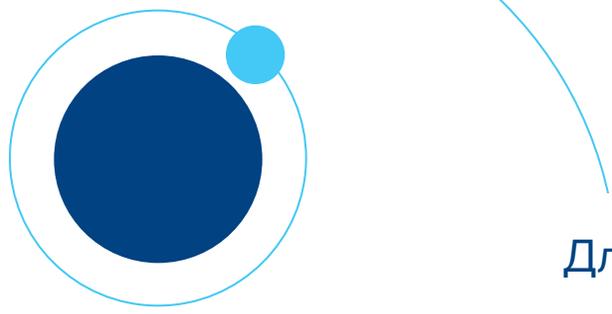
*Правила суммирования составляющих погрешности.*

- *Определение суммарной систематической погрешности.*

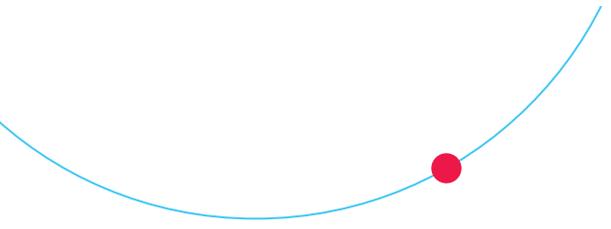
$$\Delta X_{\text{сис}\Sigma} = \sum_{i=1}^n \Delta X_{\text{сис}i}$$

Границы суммарной систематической погрешности определяют, задав желаемый уровень доверительной вероятности  $P$  по формуле:

$$\pm \Delta X_{\Sigma \text{сис}.P} = K_P \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta X_{\text{сис}.i}^2}$$



## Длинный подзаголовок



Коэффициент  $K_p$  зависит от доверительной вероятности  $P$  и от числа суммируемых составляющих. На практике используют усреднённое значение коэффициента:

$P$	0,9	0,95	0,98	0,99
$K_p$	0,95	1,1	1,3	1,4

## Длинный подзаголовок

- Определение суммарной случайной составляющей погрешности. (В том случае, когда есть несколько независимых причин, вызывающих случайную погрешность, причем каждая составляющая, в общем случае, может иметь свой закон распределения).

Если составляющие случайной погрешности известны и характеризуются СКП (средней квадратической погрешностью)  $S_i$ , то суммарная СКП:

При независимых составляющих

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2}$$

При наличии корреляции

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2 + 2 \sum_{i \approx j} \rho_{ij} S_i S_j}$$

## Длинный подзаголовок

- Определение *общей погрешности результата измерений* с учетом суммарной систематической и суммарной случайной составляющих погрешности.  
(ГОСТ 8.207-76.)

1 Если отношение

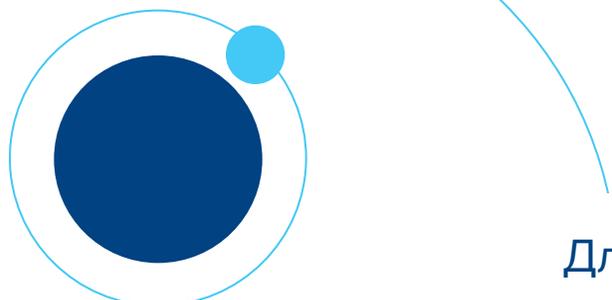
$$K = \frac{\Theta_{\Sigma}}{S_{\Sigma}} < 0.8$$

$$\Theta_{\Sigma} = K_P \sqrt{\sum_{i=1}^n \Theta_i^2}$$

где  $\Theta_i$  – не исключенные остатки систематических погрешностей  
или  $\Theta_i$  – суммарная СКП

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2}$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2 + 2 \sum_{i \approx j} \rho_{ij} S_i S_j}$$



Длинный подзаголовок

то неисключенными систематическими погрешностями *пренебрегают* и в качестве границ общей погрешности принимают границы доверительного интервала случайной погрешности:

$$\Delta X_{\text{общ}} = \pm \Delta X_{\text{случ}} = \pm t_p S_{\Sigma}$$

где  $t_p$  – коэффициент Стьюдента,  
 $S_{\Sigma}$  – суммарная СКП.

Длинный подзаголовок

- 2 Если отношение

$$K = \frac{\Theta_{\Sigma}}{S_{\Sigma}} \gg 8$$

то *пренебрегают случайной погрешностью* и в качестве границ общей погрешности принимают границы суммарной систематической погрешности:

$$\Delta X_{\text{общ}} = \pm \Theta_{\Sigma}(P_{\text{дов}})$$

### Линный ползаголовок

3 Если же  $0,8 \leq K \leq 8$ , границы общей погрешности следует находить, пользуясь эмпирическими формулами

$$\Delta X_{\text{общ}}(P_{\text{дов}}) = K_{P_{\text{дов}}} \left[ \Theta_{\Sigma}(P_{\text{дов}}) + \Delta X_{\text{случ}}(P_{\text{дов}}) \right]$$

- где  $K_{P_{\text{дов}}}$  - коэффициент, зависящий от доверительной вероятности и величины коэффициента

$$K = \frac{\Theta_{\Sigma}}{S_{\Sigma}}$$

**Окончательный результат представляется в виде:**

$$X = X_{\text{изм}} \pm \Delta X_{\text{общ}}; P_{\text{дов}} = A$$

$$X_{\text{изм}} - \Delta X_{\text{общ}} \leq X \leq X_{\text{изм}} + \Delta X_{\text{общ}}; P_{\text{дов}} = A$$

# Обработка результатов измерений

**Целью** обработки результатов измерений (наблюдений) является установление значения измеряемой величины и оценка погрешности полученного результата измерения.

**Методы** обработки результатов наблюдений могут быть разными в зависимости от предварительной информации, которой располагает экспериментатор об источниках и характере проявления погрешностей, условиях эксперимента, свойствах используемых средств измерений, от вида измерений, числа выполненных наблюдений и других причин.

## Длинный подзаголовок

1. Исключить систематическую погрешность из каждого наблюдения, т.е. получить исправленный ряд  $x_1, x_2, \dots, x_n$

2. Найти действительное значение измеряемой величины – среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

3. Найти случайные отклонения результатов наблюдения по формуле

$$\rho_1 = x_1 - \bar{x}; \rho_2 = x_2 - \bar{x}; \dots; \rho_n = x_n - \bar{x}$$

4. Проверить правильность нахождения  $\bar{x}$  используя свойство случайных отклонений

$$\sum_n \rho_i = 0;$$

5. Определить дисперсию (или ее оценку) среднего арифметического по формулам

$$\sigma^2[\bar{x}] = \frac{\sigma^2[x]}{n} \quad S^2[\bar{x}] = \frac{1}{n} S^2[x] \quad \text{где } \sigma^2[x] \text{ дисперсия исправленного ряда наблюдений;}$$

### Длинный ползаголовок

$S^2[\bar{x}]$  - оценка дисперсии исправленного ряда наблюдений, которая определяется по формуле

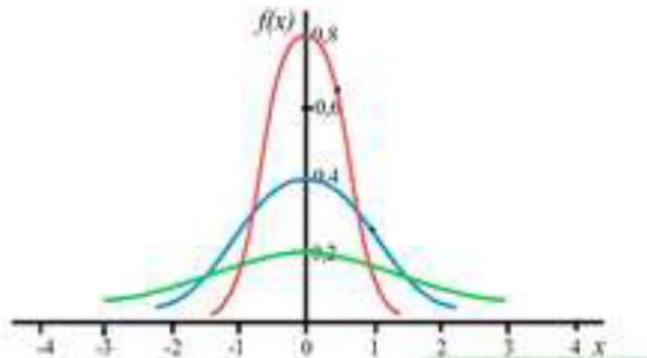
$$S^2[x] = \frac{1}{n-1} \sum_n \rho_i^2$$

6. Найти доверительный интервал погрешности измерения и записать результат измерения с доверительной вероятностью  $P$  в виде

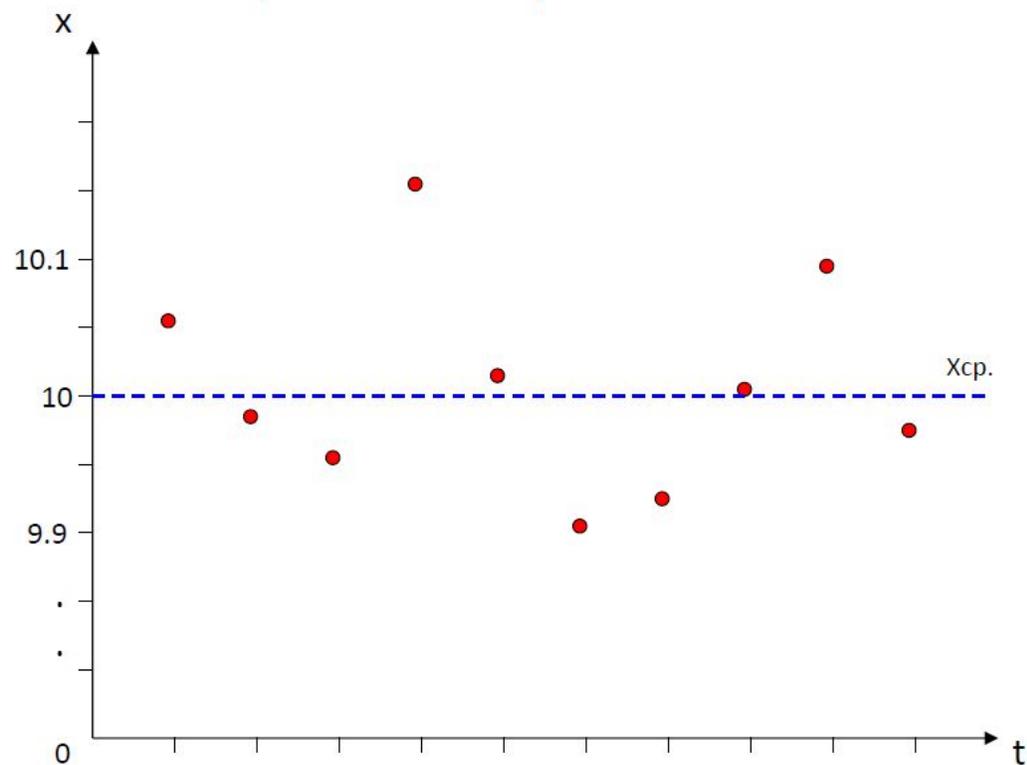
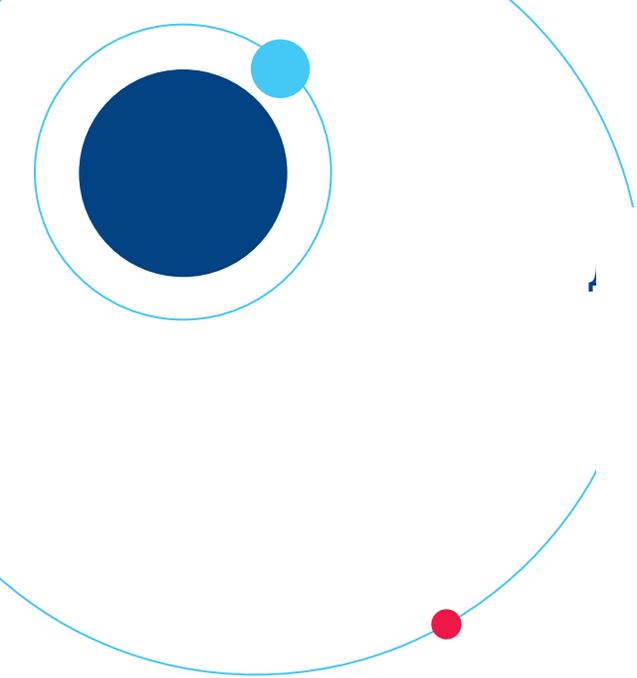
$$x_{\text{и}} = \bar{x} \pm z_p \frac{\sigma[x]}{\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad x_{\text{и}} = \bar{x} \pm t_p(f) \frac{S[x]}{\sqrt{n}}$$

где  $Z_p$  - коэффициент нормального закона распределения, зависящий от доверительной вероятности

$t_p(f)$  - коэффициент закона распределения Стьюдента, зависящий как от доверительной вероятности, так и от степени свободы  $f = n - 1$



Последние формулы получены в предположении, что закон распределения погрешностей нормальный. При  $n > 30$  коэффициенты нормального закона и закона Стьюдента становятся одинаковыми.



№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X, кОм	10,06	9,98	9,95	10,15	10,02	9,90	9,92	10,01	10,1	9,97



## Длинный ползаголовок

1. Исключим систематическую погрешность из каждого наблюдения, т.е. получим исправленный ряд  $x_1, x_2, \dots, x_n$

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
9,90	9,92	9,95	9,97	9,98	10,01	10,02	10,06	10,1	10,15

2. Находим действительное значение измеряемой величины – среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \bar{x} = 10,006$$

3. Находим случайные отклонения результатов наблюдения по формуле

$$\rho_1 = x_1 - \bar{x}; \quad \rho_2 = x_2 - \bar{x}; \dots; \rho_n = x_n - \bar{x}$$

p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10
-0,106	-0,086	-0,056	-0,036	-0,026	-0,004	0,014	0,054	0,094	0,144

4. Проверяем правильность нахождения  $\bar{x}$  используя свойство случайных отклонений

$$\sum_n \rho_i = 0; \quad (-0,106) + (-0,086) + (-0,056) + (-0,036) + (-0,026) + (-0,004) + 0,014 + 0,054 + 0,094 + 0,144 = 0$$

## Длинный подзаголовок

5. Находим оценку дисперсии исправленного ряда наблюдений, которая определяется по формуле

$$S^2[x] = \frac{1}{n-1} \sum_n \rho_i^2$$

$$S^2[x] = \frac{1}{10-1} ((-0,106)^2 + (-0,086)^2 + (-0,056)^2 + (-0,036)^2 + (-0,026)^2 + 0,004^2 + 0,014^2 + 0,054^2 + 0,094^2 + 0,144^2)$$

$$S^2[x] = 0,00528$$

6. Находим доверительный интервал погрешности измерения и записать результат измерения с доверительной вероятностью P в виде

$$x_{\text{н}} = \bar{x} \pm t_p(f) \frac{S[x]}{\sqrt{n}}$$

при P=0,95

$$x_{\text{н}} = (10,006 \pm 0,051) \text{кОм}$$

СПАСИБО

х

τ

π

≡

