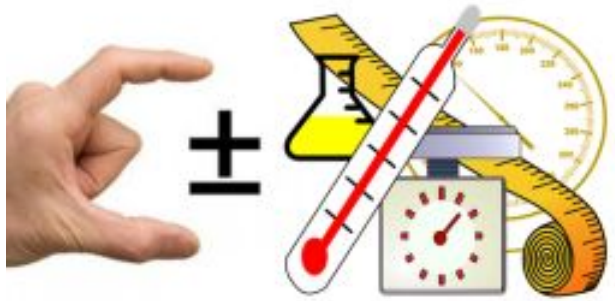
САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

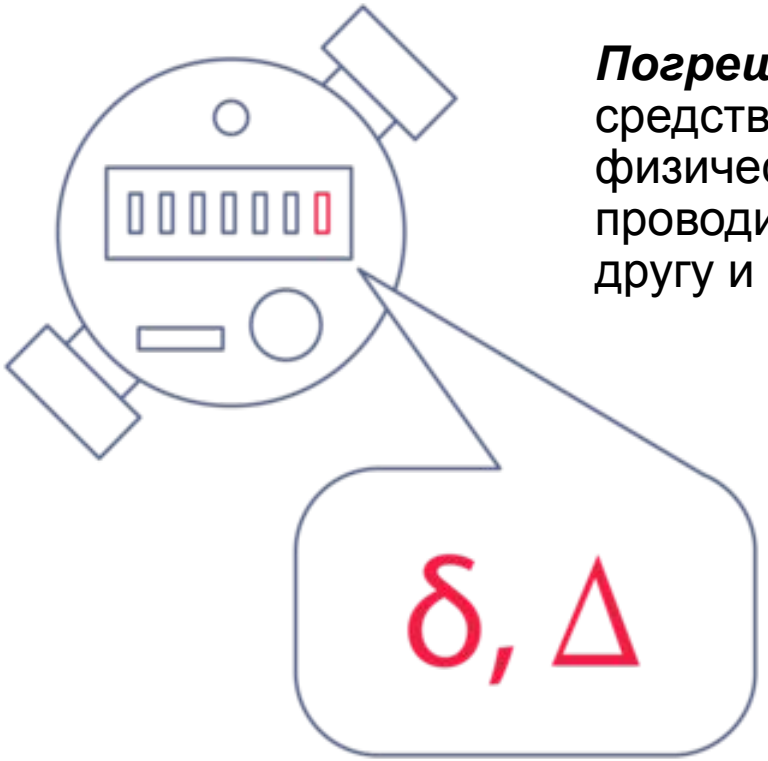


# Погрешности измерений

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

***Погрешность результата измерения*** — это отклонение результата измерений ($X_{изм}$) от истинного (действительного) значения ($X_{ист(действ)}$) измеряемой величины. Чаще всего она указывает границы неопределенности значения измеряемой величины.

***Погрешность средства измерения*** — это разность между показанием средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины. Она характеризует точность результатов измерений, проводимых данным средством. Эти два понятия во многом близки друг другу и классифицируются по одинаковым признакам.




?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

# ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ И СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

***По форме представления*** *(способу выражения)* :

- *абсолютная погрешность,* выраженная в единицах измеряемой величины

$$\Delta X = X_{\text{изм}} - X_{\text{ист(дейст)}}$$

- *относительная погрешность* — отношение абсолютной погрешности к истинному (действительному) значению измеряемой величины или принятому опорному значению (ГОСТ Р ИСО 5725-2002 )

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_{\text{ист (дейст)}}} = \frac{X_{\text{изм}} - X_{\text{ист (дейст)}}}{X_{\text{ист (дейст)}}},$$

?

Длинный подзаголовок

- *Погрешность средств измерений* вычисляется по формуле:

$$\Delta X_{п}=X_{п} - X_{ист(действ)},$$

где $X_{п}$ — показания прибора; -$X_{ист(действ)}$ — истинное (действительное) значение измеряемой величины.

- *Приведенная погрешность СИ* — это относительная погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона

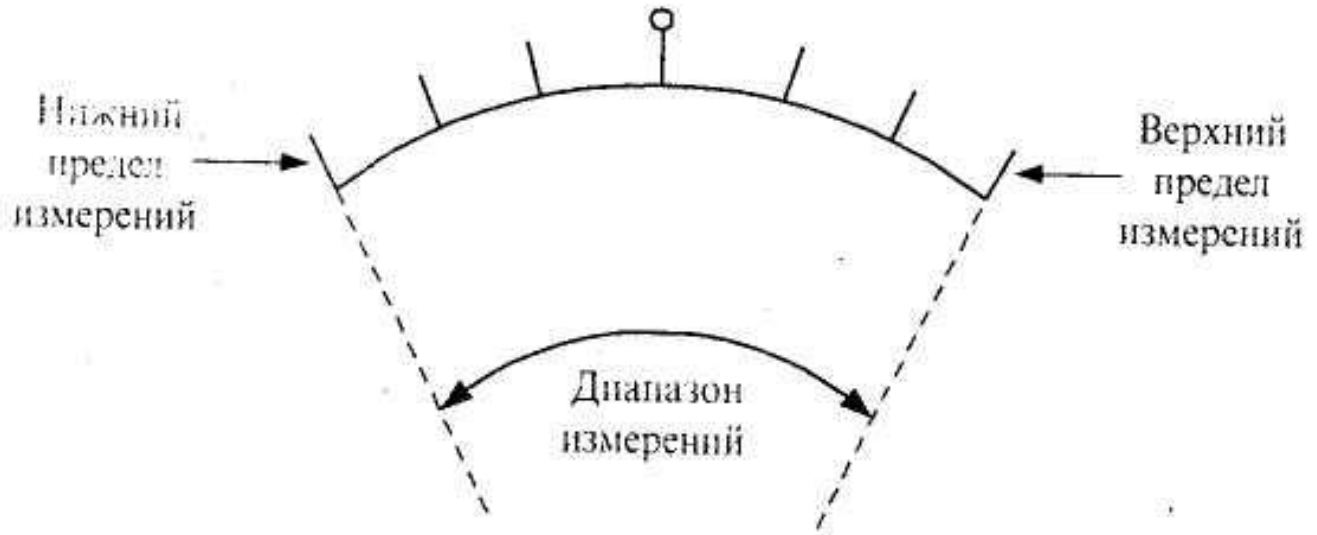
$$\nu = \pm \frac{\Delta X_{п}}{X_{н}} 100\ \%.$$

?

## Длинный подзаголовок

- $X_н$ - нормирующее значение.

Нормирующее значение прибора чаще всего принимается равным верхнему пределу измерений для данного средства измерений (в случае, если нижний предел — нулевое значение односторонней шкалы прибора). В случае двузначного отсчетного устройства (шкалы) прибора нормирующее значение отнесено к диапазону измерений.



САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

В качестве истинного значения при многократных измерениях одного и того же параметра используют среднее арифметическое значение *:*

$$X_{\text{ист}} \approx \bar{\bar{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

где $X_i$ — результат i-го единичного определения; *n* — число единичных измерений в ряду.

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

Величина *X*, полученная в одной серии измерений, является случайным приближением к $X_{ист}$. Для оценки ее возможных отклонений от $X_{ист}$ определяют среднюю квадратичную погрешность (СКП) которая получена из ряда равноточных измерений.

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n(n-1)}},$$

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

- Для оценки рассеяния единичных результатов измерений в ряду равноточных измерений одной и той же физической величины около среднего их значения используют среднюю квадратичную погрешность измерений (СКП):

при $n<20$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}},$$

?

Длинный подзаголовок

при $n > 20$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n}},$$

СКП из серии измерений всегда меньше, чем в каждом отдельном измерении, отсюда следует, что для повышения точности измерений необходимо увеличивать число измерений.

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

Длинный подзаголовок

***По характеру проявления погрешности*** делятся на систематические и случайные.

- *Систематическая погрешность* — одна из составляющих погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющейся при повторных измерениях одной и той же физической величины.

**Величина систематической погрешности характеризует** второй показатель качества – **правильность** полученного результата: чем меньше величина $\Delta_{сис}$, тем правильнее полученный результат.

?

Длинный подзаголовок

В зависимости от характера измерения систематические погрешности подразделяют на ***постоянные, прогрессивные, периодические и погрешности, изменяющиеся по сложному закону.***

- ***Постоянные погрешности,*** которые сохраняют свое значение в течение всего периода выполнения измерений. Эти погрешности, как правило, легко могут быть выявлены и учтены путем введения соответствующих поправок в результат измерения.

?

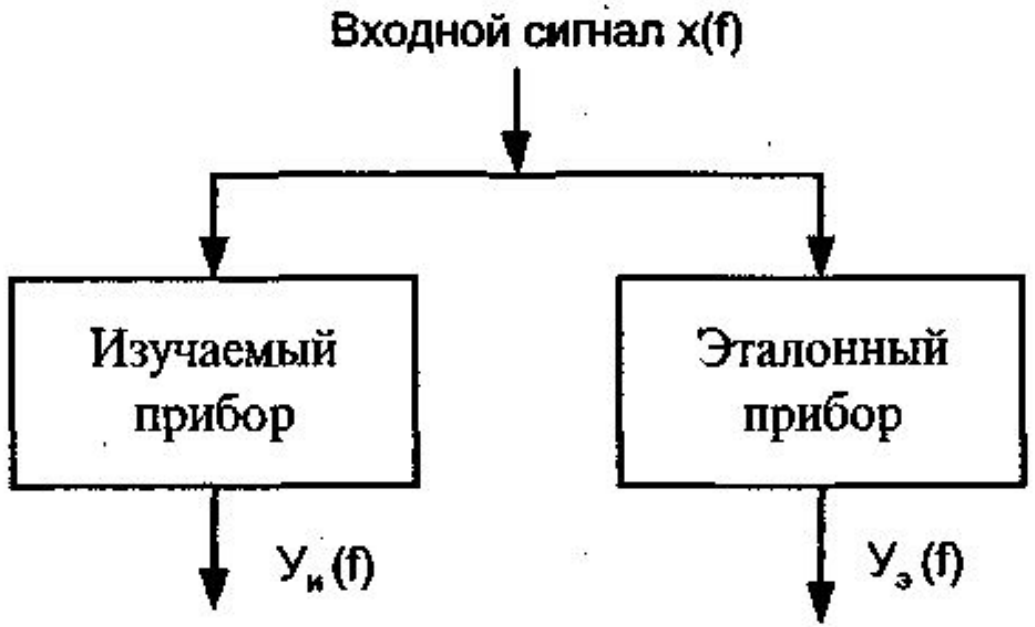
Длинный подзаголовок

- ***Прогрессивные погрешности*** — это непрерывно возрастающие или убывающие погрешности. Они вызываются процессами износа или старения узлов и деталей средств измерения. К ним могут относиться погрешности от износа контактирующих деталей средств измерения, старение отдельных элементов (конденсаторов, резисторов и т.д.) средств измерения.

- В ряде случаев погрешности могут меняться периодически во времени или при перемещении указателя измерительного прибора. Такие ***погрешности называются периодическими***. Обычно такие погрешности встречаются в угломерных приборах с круговой шкалой.

?

Длинный по




$$\Delta_C = y_и - y_э,$$

где $y_и$ — результат измерения изучаемого прибора; $y_э$ — результат измерения эталонного прибора.

?

## Длинный подзаголовок

- *Случайными называются погрешности,* изменяющиеся случайным образом (по знаку и значению) при одинаковых повторных измерениях одной и той же величины. Эти погрешности возникают в результате влияния на процесс измерения многочисленных случайных факторов, учесть которые практически невозможно.

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

**Величина случайной погрешности** $\Delta_{сл}$ характеризует третий показатель качества измерений – **сходимость результатов** при повторных измерениях одного и того же значения измеряемой ФВ, выполненных одним и теми же СИ, одними и тем же методом в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью.

К случайной погрешности, как правило, относится и ***промах*** (грубая погрешность измерений), характеризующийся тем, что погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

***По условиям проведения измерений*** **погрешности средств измерений** делятся *на основные* и *дополнительные.*

- *Основной называется погрешность* средства измерений, применяемого в нормальных условиях. Эти условия устанавливаются в нормативно-технических документах на данный вид или тип средств измерений (температура окружающей среды, влажность, давление, напряжение питающей электрической сети и др.) и при них нормируется его погрешность.

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

- Значения погрешностей средств измерений, эксплуатируемых в условиях, отличающихся от нормальных, будут различными и плохо контролируемыми. Составляющая погрешности средства измерений, возникающая дополнительно к основной погрешности вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от нормального его значения или вследствие ее выхода за пределы нормальной области значений, называется *дополнительной погрешностью.*

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

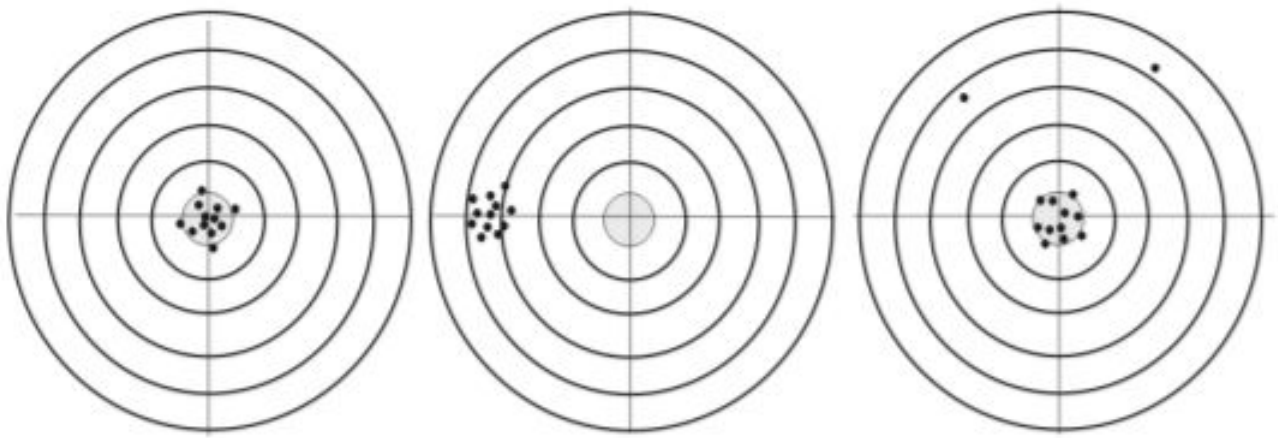
В большинстве нормативно-технических документов на средства измерений за нормальные значения принимаются следующие:

- температура окружающей среды (293±5) К;
- относительная влажность (65±15) % ;
- атмосферное давление (100+4) кПа (750+30 мм рт. ст.);
- напряжение питающей электрической сети (220+4,4) В с частотой (50+0,5)Гц.

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

# Длинный подзаголовок



(а) (б) (в)

Пример случайной (а), случайной и систематической (б), случайной и грубой (в) погрешностей

?

Длинный подзаголовок

***По причине возникновения погрешности*** разделяются *на инструментальные, методические и субъективные.*

- *Инструментальная погрешность* обусловлена несовершенством средств измерений и их конструктивными особенностями. Иногда эту погрешность называют приборной или аппаратурной.

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

- *Методическая погрешность* обусловлена несовершенством и недостатками применяемого в средстве измерений метода измерений и упрощений при разработке конструкции средства измерений, а также возможными недостатками методик измерений.

- *Субъективная (личная) погрешность* измерения обусловлена погрешностью отсчета оператором показаний по шкале средства измерений вследствие индивидуальных особенностей оператора (внимание, зрение, подготовка и др.). Эти погрешности практически отсутствуют при использовании автоматических или автоматизированных средств измерений.

?

Длинный подзаголовок

***По характеру измерения физической величины*** погрешности средства измерений разделяются на **статические и динамические**.

- Погрешность средства измерений, применяемого при измерении физической величины, которая за время измерений не изменяется, носит название **статической погрешности.**

- А погрешность, возникающая при измерении изменяющейся в процессе измерений физической величины, — **динамической погрешности**.

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

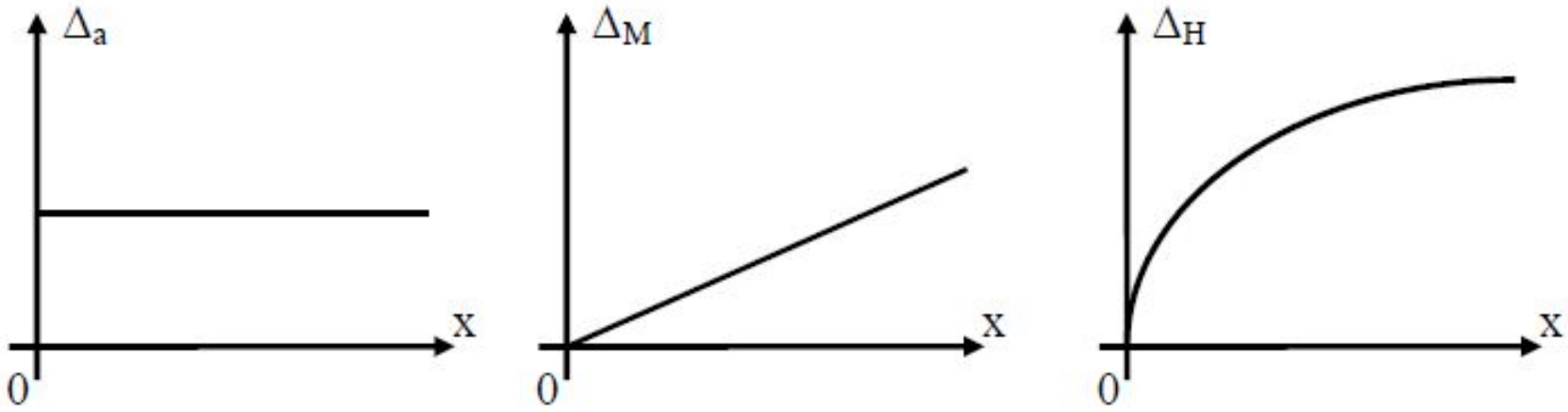
## Длинный подзаголовок

***По характеру зависимости от измеряемой величины*** $X$ различают погрешности *аддитивные* – не зависящие от $X$ (т.е. $\Delta X$=const для любых значений $X$ в пределах диапазона измерений) и *мультипликативные* – линейно или нелинейно зависящие от $X$ (в этом случае $\Delta X = f(X)$).

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

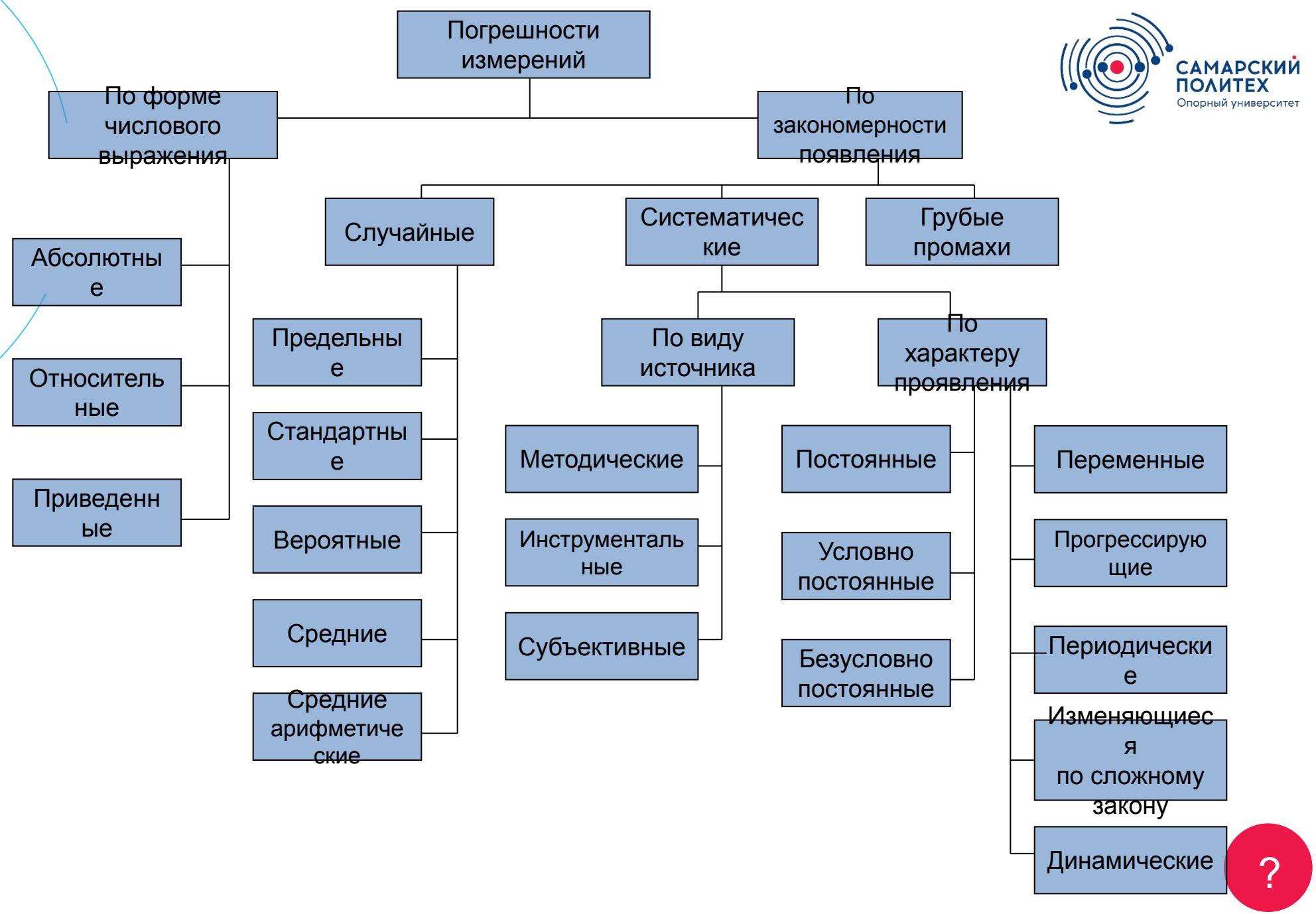
## Длинный подзаголовок




*а)* *б)* *в)*

*Аддитивная (а), мультипликативная (б) и нелинейная (в) погрешности*

?


Погрешности измерений
По форме числового выражения
По закономерности появления
Абсолютные
Относительные
Приведенные
Случайные
Систематические
Грубые промахи
Предельные
Стандартные
Вероятные
Средние
Средние арифметические
По виду источника
По характеру проявления
Методические
Инструментальные
Субъективные
Постоянные
Условно постоянные
Безусловно постоянные
Переменные
Прогрессирующие
Периодические
Изменяющиеся по сложному закону
Динамические
?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

***Правила суммирования составляющих погрешности.***

- Определение *суммарной систематической погрешности.*

$$\Delta X_{сис\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \Delta X_{СИСi}$$

Границы суммарной систематической погрешности определяют, задав желаемый уровень доверительной вероятности $P$ по формуле:

$$\pm \Delta X_{\Sigma сис.P} = K_P \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta X_{сис.i}^2}$$

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

Коэффициент $К_р$ зависит от доверительной вероятности $P$ и от числа суммируемых составляющих. На практике используют усреднённое значение коэффициента:

| $P$ | 0,9 | 0,95 | 0,98 | 0,99 |
|---|---|---|---|---|
| $K_p$ | 0,95 | 1,1 | 1,3 | 1,4 |

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

- Определение *суммарной случайной составляющей погрешности*. (В том случае, когда есть несколько независимых причин, вызывающих случайную погрешность, причем каждая составляющая, в общем случае, может иметь свой закон распределения).

  Если составляющие случайной погрешности известны и характеризуются СКП (средней квадратической погрешностью) $S_i$ , то суммарная СКП:

При независимых составляющих

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i-1}^{n} S_i^2}$$

При наличии корреляции

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_i^2 + 2\sum_{i \approx j}^{n} \rho_{ij} S_i S_j}$$

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

- Определение *общей погрешности результата измерений* с учетом суммарной систематической и суммарной случайной составляющих погрешности.
  (ГОСТ 8.207-76.)

1 Если отношение $K = \frac{\Theta_\Sigma}{S_\Sigma} < 0.8$

$$\Theta_\Sigma = K_P \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Theta_i^2}$$

где , $\Theta_i$ – не исключенные остатки систематических погрешностей

или - суммарная СКП

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i-1}^{n} S_i^2}$$

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_i^2 + 2\sum_{i \approx j}^{n} \rho_{ij} S_i S_j}$$

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

то неисключенными систематическими погрешностями ***пренебрегают*** и в качестве границ общей погрешности принимают границы доверительного интервала случайной погрешности:

$$\Delta X_{общ} = \pm \Delta X_{случ} = \pm t_p S_\Sigma$$

где $t_p$ – коэффициент Стьюдента,

$S_\Sigma$ –суммарная СКП.

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

- 2 Если отношение

$$K = \frac{\Theta_\Sigma}{S_\Sigma} \rangle 8$$

то ***пренебрегают случайной погрешностью*** и в качестве границ общей погрешности принимают границы суммарной систематической погрешности:

$$\Delta X_{общ} = \pm \Theta_{\Sigma(P_{дов})}$$

?

Длинный подзаголовок

3 Если же $0,8 \leq K \leq 8$, границы общей погрешности следует находить, пользуясь эмпирическими формулами

$$\Delta X_{общ(P_{дов})} = K_{P_{дов}} \left[ \Theta_{\Sigma(P_{дов})} + \Delta X_{случ(P_{дов})} \right]$$

- где $K_{P\ дов}$ - коэффициент, зависящий от доверительной вероятности и величины коэффициента

$$K = \frac{\Theta_{\Sigma}}{S_{\Sigma}}$$

**Окончательный результат представляется в виде**:

$X = Xизм \pm \Delta Xобщ;\ Pдов = A$

$Xизм - \Delta Xобщ \leq X \leq Xизм + \Delta Xобщ;\ Pдов = A$

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

# Обработка результатов измерений

**Целью** обработки результатов измерений (наблюдений) является установление значения измеряемой величины и оценка погрешности полученного результата измерения.

**Методы** обработки результатов наблюдений могут быть разными в зависимости от предварительной информации, которой располагает экспериментатор об источниках и характере проявления погрешностей, условиях эксперимента, свойствах используемых средств измерений, от вида измерений, числа выполненных наблюдений и других причин.

?

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

1. Исключить систематическую погрешность из каждого наблюдения, т.е. получить исправленный ряд $x_1, x_2, \ldots, x_n$

2. Найти действительное значение измеряемой величины – среднее арифметическое значение

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_n x_i}{n}$$

3. Найти случайные отклонения результатов наблюдения по формуле

$$\rho_1 = x_1 - x;\ \rho_2 = x_2 - x; \ldots; \rho_n = x_n - x$$

4. Проверить правильность нахождения $\bar{x}$ используя свойство случайных отклонений

$$\sum_n \rho_i = 0;$$

5. Определить дисперсию( или ее оценку) среднего арифметического по формулам

$$\sigma^2[x] = \frac{\sigma^2[x]}{n} \qquad S^2[x] = \frac{1}{n} S^2[x]$$

где $\sigma^2[x]$ дисперсия исправленного ряда наблюдений;

?

## Длинный подзаголовок

$S^2[\bar{x}]$ -оценка дисперсии исправленного ряда наблюдений, которая определяется по формуле

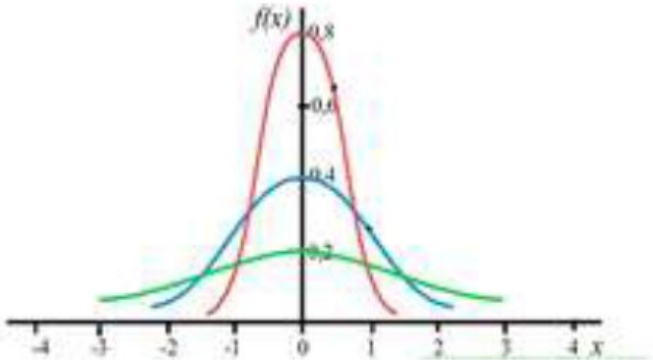
$$S^2[x] = \frac{1}{n-1}\sum_n \rho_i^2$$

6. Найти доверительный интервал погрешности измерения и записать результат измерения с доверительной вероятностью P в виде

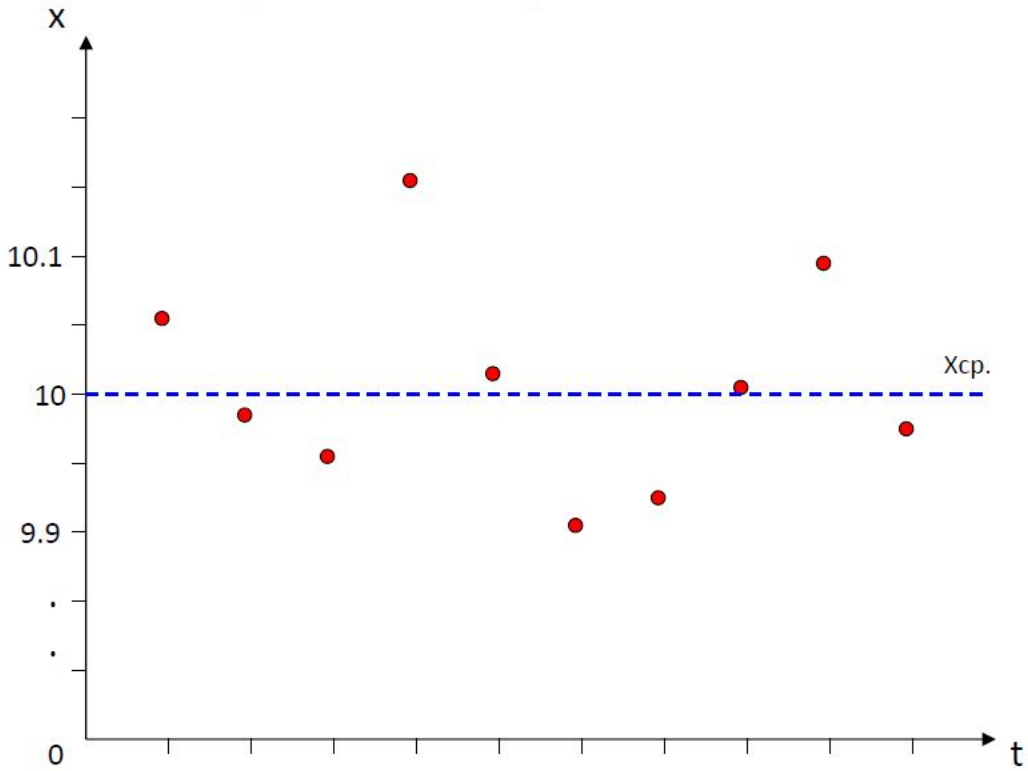
$$x_и = \bar{x} \pm z_p \frac{\sigma[x]}{\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad x_и = x \pm t_p(f)\frac{S[x]}{\sqrt{n}}$$

где $Z_p$ -коэффициент нормального закона распределения, зависящий от доверительной вероятности

$t_p(f)$ -коэффициент закона распределения Стьюдента, зависящий как от доверительной вероятности, так и от степени свободы $f = n-1$




Последние формулы получены в предположении, что закон распределения погрешностей нормальный. При n>30 коэффициенты нормального закона и закона Стьюдента становятся одинаковыми.



| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x,кОм | 10,06 | 9,98 | 9,95 | 10,15 | 10,02 | 9,90 | 9,92 | 10,01 | 10,1 | 9,97 |

## Длинный подзаголовок

1. Исключим систематическую погрешность из каждого наблюдения, т.е. получим исправленный ряд $x_1, x_2, \ldots, x_n$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9,90 | 9,92 | 9,95 | 9,97 | 9,98 | 10,01 | 10,02 | 10,06 | 10,1 | 10,15 |

2. Находим действительное значение измеряемой величины – среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_n x_i}{n} \qquad \bar{x} = 10{,}006$$

3. Находим случайные отклонения результатов наблюдения по формуле

$$\rho_1 = x_1 - \bar{x};\ \rho_2 = x_2 - \bar{x}; \ldots; \rho_n = x_n - \bar{x}$$

| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ | $p_7$ | $p_8$ | $p_9$ | $p_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -0,106 | -0,086 | -0,056 | -0,036 | -0,026 | -0,004 | 0,014 | 0,054 | 0,094 | 0,144 |

4. Проверяем правильность нахождения $\bar{x}$ используя свойство случайных отклонений

$$\sum_n \rho_i = 0; \qquad (-0{,}106)+(-0{,}086)+(-0{,}056)+(-0{,}036)+(-0{,}026)+(-0{,}004)+0{,}014+0{,}054+0{,}094+0{,}144=0$$

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

## Длинный подзаголовок

5. Находим оценку дисперсии исправленного ряда наблюдений, которая определяется по формуле $S^2[x] = \frac{1}{n-1}\sum_n \rho_i^2$

$$S^2[x] = \frac{1}{10-1}((-0{,}106)^2 + (-0{,}086)^2 + (-0{,}056)^2 + (-0{,}036)^2 + (-0{,}026)^2 + 0{,}004^2 + 0{,}014^2 + 0{,}054^2 + 0{,}094^2 + 0{,}144^2$$

$$S^2[x] = 0{,}00528$$

6. Находим доверительный интервал погрешности измерения и записать результат измерения с доверительной вероятностью P в виде

$$x_и = \bar{x} \pm t_p(f)\frac{S[x]}{\sqrt{n}}$$

при P=0,95

$$x_и = (10{,}006 \pm 0{,}051)кОм$$

?

СПАСИБО