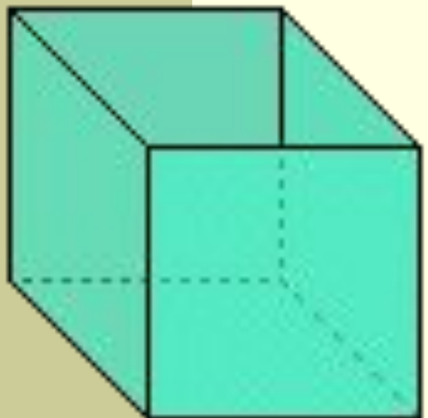
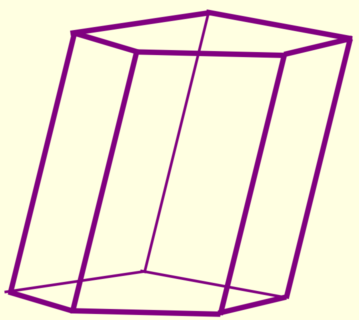


Призма

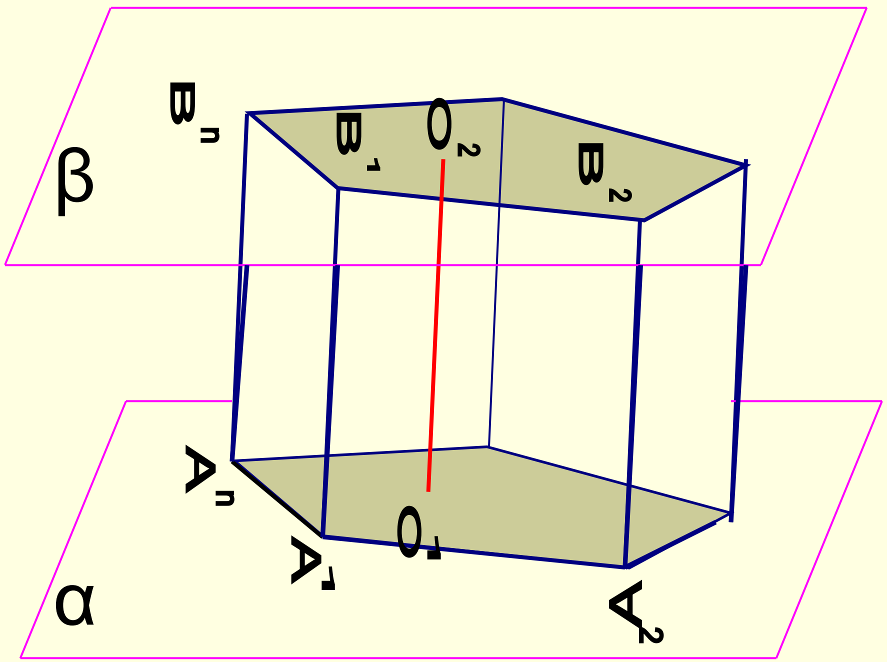


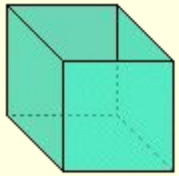
Введение

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется призмой.

Введение





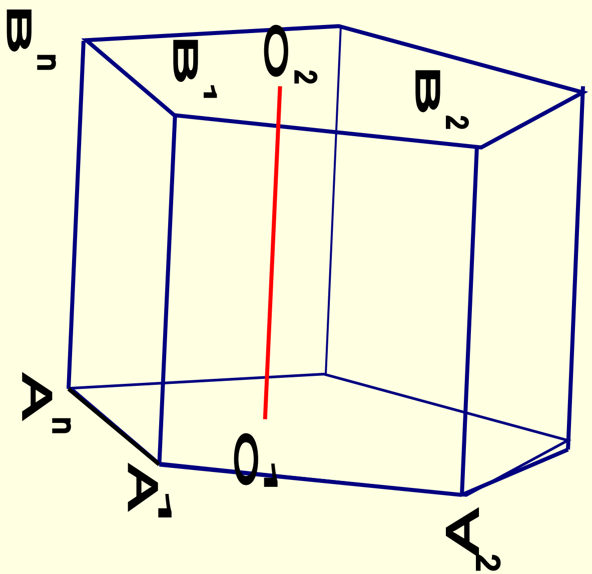
Призма в геометрии

Призма – многогранник, который состоит из двух плоских равных многоугольников с соответственно параллельными сторонами и отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины, – боковыми рёбрами призмы. Все боковые грани призмы – параллелограммы.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой.

Призма в геометрии

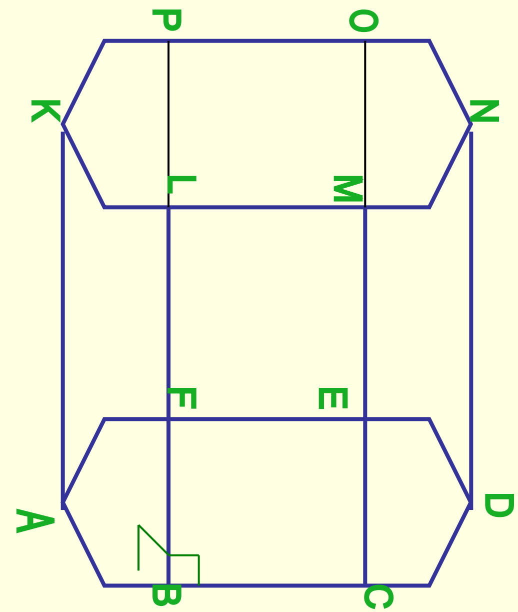


- ***$A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$ – призма***
- ***Многоугольники $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ – основания призмы***
- ***Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$ – боковые грани призмы***
- ***Отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_nB_n - боковые ребра призмы***
    - ***Отрезок O_1O_2 - высота призмы***

Призма в геометрии

***<u>Прямая призма</u>* – призма, у которой боковое ребро перпендикулярно основанию.**

ABCDEFKLMNOP- прямая правильная призма



Призма в геометрии

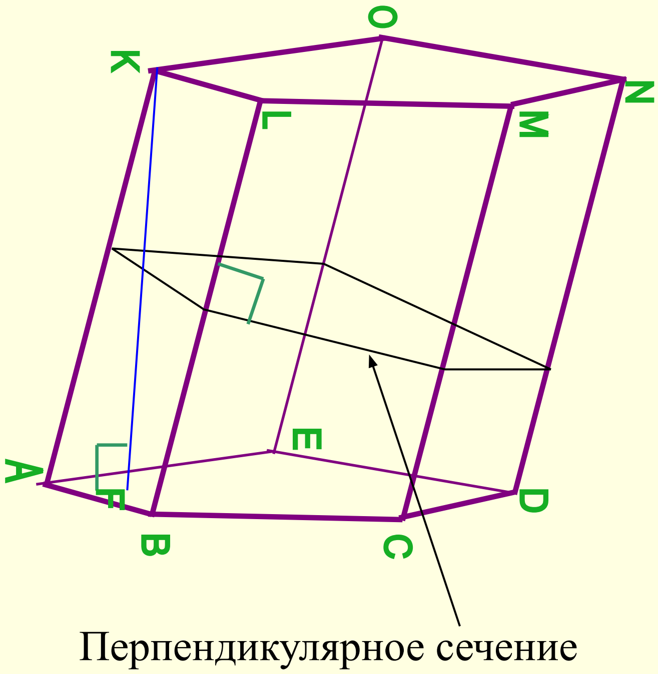
Прямая призма, основанием которой служит правильный многоугольник, называется <u>правильной призмой</u>.

Боковое ребро прямой призмы, в том числе и правильной, есть ее высота. Отрезок, концы которого - две вершины, не принадлежащие одной грани призмы, называют ее <u>диагональю</u>. Сечение призмы с плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, называют <u>диагональным сечением</u> призмы.

Призма в геометрии

***<u>Наклонная призма-</u>* призма, у которой боковое ребро не перпендикулярно основанию.**

- ***ABCDEKLMNO- наклонная призма***
- ***KF- высота***

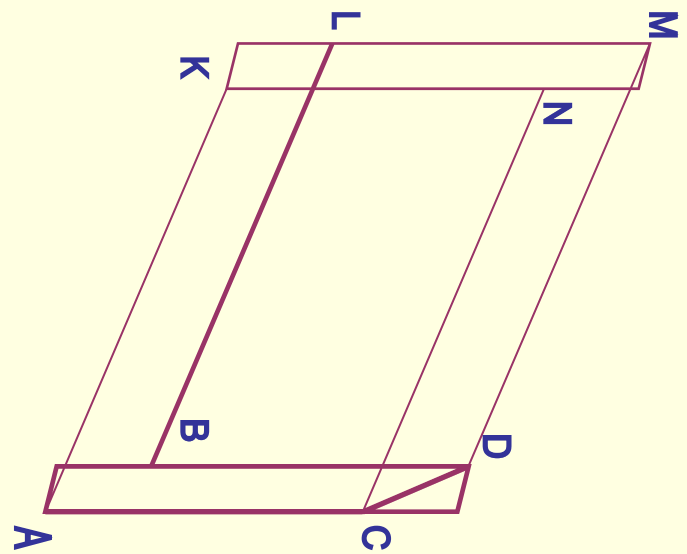


Призма в геометрии

Призма, основание которой - параллелограмм, называется <u>параллелепипедом</u>.

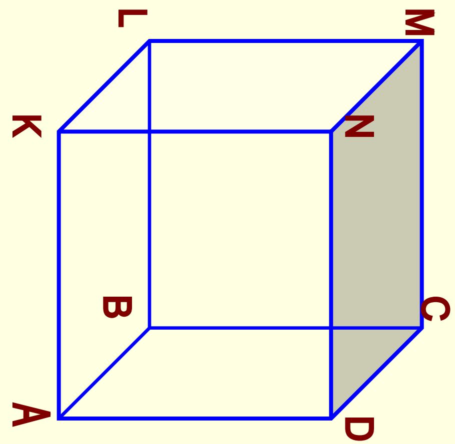
В соответствии с определением параллелепипед - это четырехугольная призма, все грани которой – параллелограммы. Параллелепипеды, как и призмы, могут быть <u>прямыми и наклонными</u>.

ABCDKLMN- параллелепипед



Призма в геометрии

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называют <u>прямоугольным параллелепипедом</u>. У прямоугольного параллелепипеда все грани - прямоугольники. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, имеющих общий конец, называют его измерениями. <u>Куб</u> - прямоугольный параллелепипед с равными измерениями. Все



ABCDKLMN- куб

Призма в геометрии

- ***Призма:***

$S_{бок}=P_{\perp}l$

$S_{полн}=2S_о+S_{бок}$

$V=S_оl$

Прямая призма:

$S_{бок}=P_оl(l=h)$

- ***Параллелепипед:***

$S_{полн}=2(ab+bc+ac)$

$V=abc$

$d^2=a^2+b^2+c^2$

- ***Куб:***

$S_{полн}=6a^2$

$V=a^3$

$d^2=3a^2$

Обозначения:

- V- ***объем;***
- $S_{полн}$- ***площадь полной поверхности;***
- $S_{бок}$- ***площадь боковой поверхности;***
- $S_о$- ***площадь основания;***
- $P_о$- ***периметр основания;***
- $P_{\perp}$ - ***периметр перпендикулярного сечения;***
- l- ***длина ребра;***
- h- ***высота.***

Теоремы

I. **Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.**

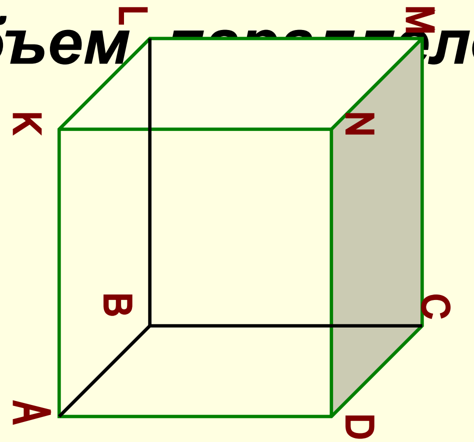
II. **Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.**

III. **Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения и длины бокового ребра.**

IV. **Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.**

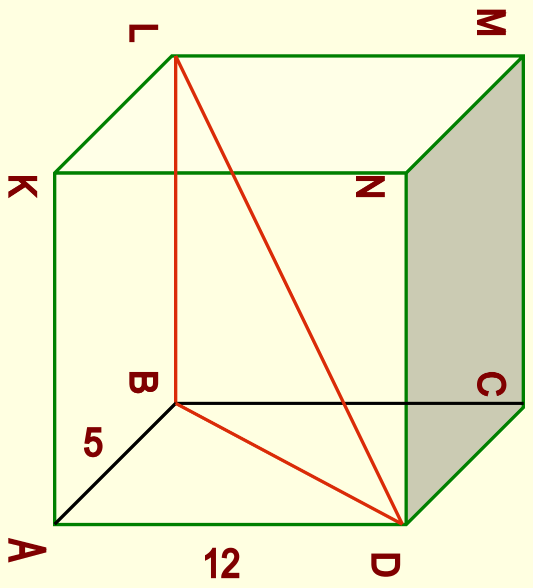
Задача №1

В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12м и 5м. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда. Найдите площадь боковой поверхности, объем параллелепипеда.



Задача №1

Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABD$

По теореме Пифагора:

$$BD^2=AD^2+AB^2$$

$$BD=\sqrt{(AD^2+AB^2)}=13$$

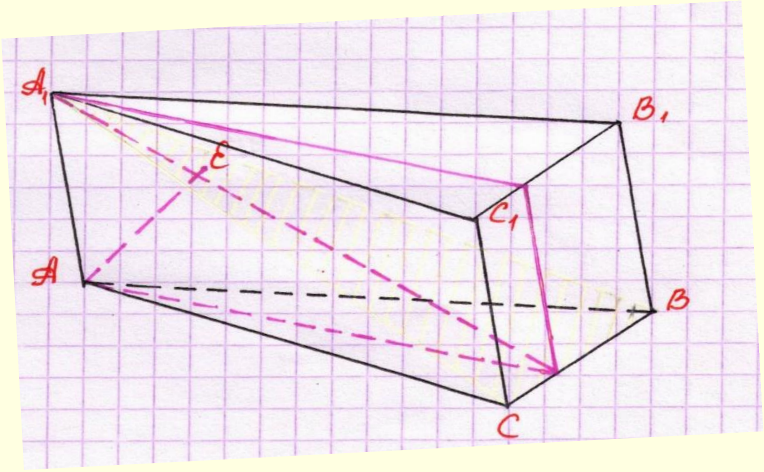
Рассмотрим $\triangle BLD$- прямоугольный, равнобедренный, значит

$$BL=BD=13\text{см}$$

Ответ: $BL=13$см

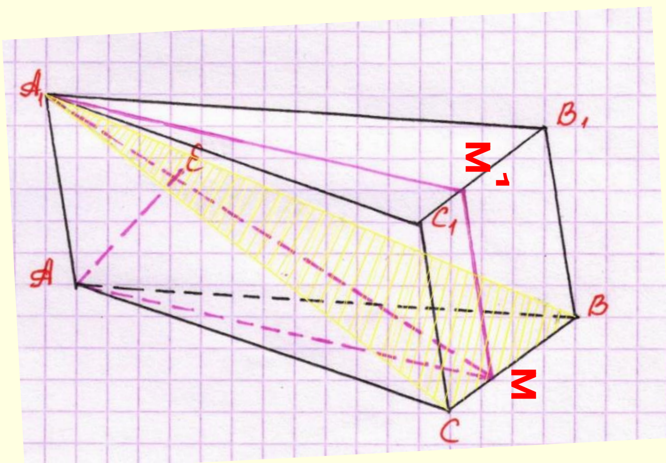
Задача №2

Высота прямой треугольной призмы $ABCA_1B_2C_3$ равна 10. Расстояние от вершины A до плоскости A_1BC равно 6. Найдите площадь сечения призмы плоскостью A_1BC, если BC равен 16.



Задача №2

- Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

Сечение A_1BC разбивает призму $ABCA_1B_1C_1$ на две пирамиды AA_1BC и$A_1BB_1C_1C$. Пусть V– объем призмы, V_1- объем пирамиды AA_1BC_1, V_2 - объем пирамиды $A_1BB_1C_1C$. По свойству $V=V_1+V_2$ (1)

Проведем AM перпендикулярную BC, тогда A_1M перпендикулярен BC. Обозначим $AM=h$, $A_1M=\sqrt{100+h^2}$. Проведем MM_1 AA_1, тогда AM перпендикулярен MM_1, значит AM перпендикулярен BB_1C_1, A_1M_1 AM $\to$ A_1M_1 перпендикулярен BB_1C, $A_1M_1=AM=h$

Задача №2

Найдем V, V_1, V_2.

$V=S_{ABC}\bullet AA_1=\frac{1}{2}\bullet 16\bullet h\bullet 10=80h$

$V_1=\frac{1}{3}\bullet S_{A1BC}\bullet AE= =\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}\bullet 16\bullet(\sqrt{100+h^2})\bullet 6=16\bullet(\sqrt{100+h^2})$

$V_2=\frac{1}{3}\bullet S_{BB1C1C}\bullet A_1M_1=\frac{2}{3}\bullet 16\bullet h\bullet 10=160/3h$

Найденные значения подставим в формулу(1):

$80h=16\bullet(\sqrt{100+h^2})+160/3h$

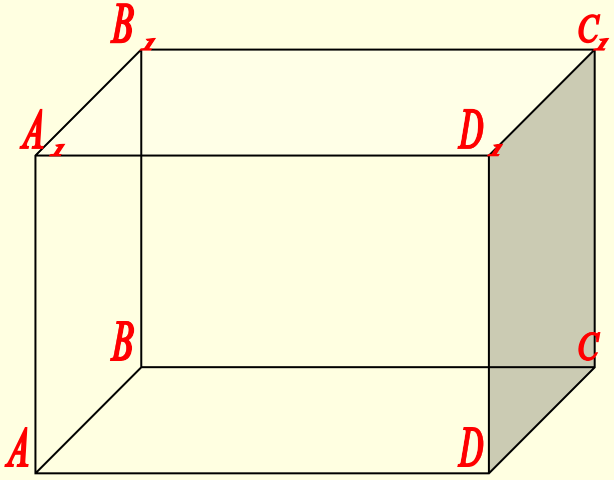
$h=7,5$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\bullet BC\bullet A_1M=\frac{1}{2}\bullet 16\bullet(\sqrt{100+56,25})=100$

Ответ: $S=100$

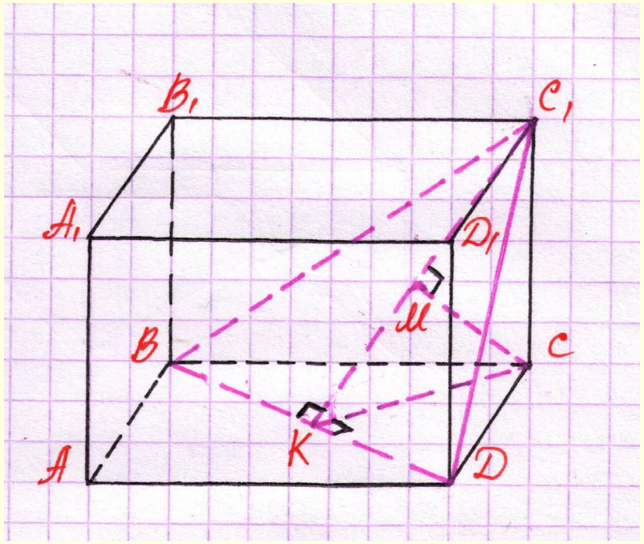
Задача №3

Дана прямая четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Расстояние от точек C до плоскости BC_1D равно $3\sqrt{2}$. Плоскость BC_1D наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите сторону основания призмы.



Задача №3

Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

Пусть CM- перпендикуляр, проведенный из точки C к плоскости BC_1D. Так как BC=CD и $BC_1=C_1D$, то высота C_1K (она же медиана) ΔBC_1D проходит через точку M.

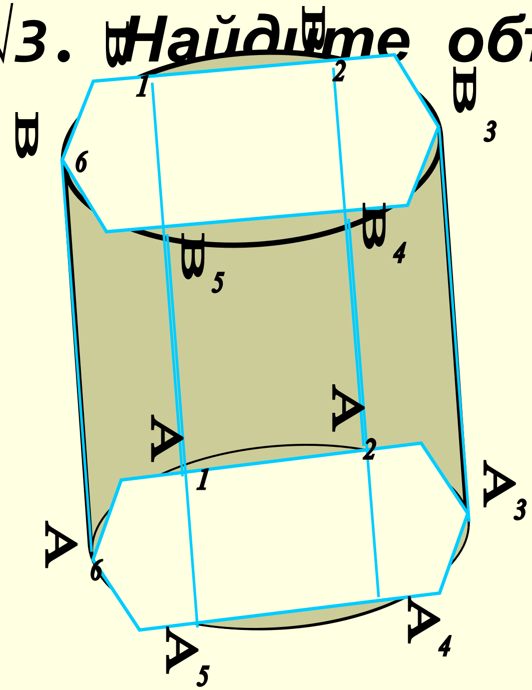
В ΔKMC: $KC=CM/SIN\angle MKC=3\sqrt{2}/\sin 30^\circ=6\sqrt{2}$, так как ABCD- квадрат, то KC=KD, и из ΔKCD имеем $CD^2=(6\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2})^2=144$,

CD=12

Ответ: CD=12

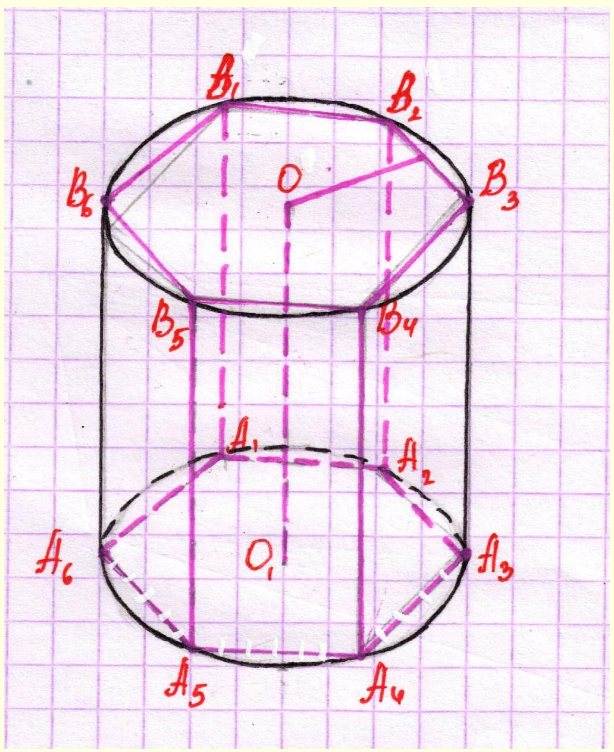
Задача №4

Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16П√3. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно 2√3. Найдите объем призмы.



Задача №4

Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

По формуле $S_{б\,ц}=2ПRH=16П\sqrt{3}$. Отсюда $RH=8\sqrt{3}$. Расстояние $d=2\sqrt{3}$ есть расстояние между осью цилиндра и плоскостью боковой грани призмы (так как $\| OO_1$ $A_2A_3B_3B_2$). А это есть радиус вписанного в шестиугольник круга:

$$d=r=R\sqrt{3}/2=2\sqrt{3}$$

Отсюда $R=4$

Сторона основания правильной шестиугольной призмы $A_2A_3=R=4$. Высоту призмы H найдем из равенства $RH=8\sqrt{3}$; $H=2\sqrt{3}$

$S_{осн}=6S_{\triangle OA_2A_3}=6\bullet(4^2\bullet\sqrt{3}|4)=24\sqrt{3}$

$V_{пр}=S_{осн}\bullet H=24\sqrt{3}\bullet 2\bullet\sqrt{3}=144$

Ответ: $V_{пр}=144$