Лекция 2

Игры с природой

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней *сознательно* действует только один из участников, в большинстве случаев называемый **игроком 1**.

Игрок 2 (природа) сознательно против **игрока 1** не действует, а выступает как *не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные «ходы» партнер* по игре.

Поэтому термин **«природа»** характеризует некую объективную действительность, которую не следует понимать буквально, хотя вполне могут встретиться ситуации, в которых «игроком» 2 действительно может быть природа (например, обстоятельства, связанные с погодными условиями или с природными стихийными силами).

Задача

Необходимо закупить уголь для обогрева дома. Количество хранимого угля ограничено и в течение холодного периода должно быть полностью израсходовано. Предполагается, что неизрасходованный зимой уголь в лето пропадает. Покупать уголь можно в любое время, однако летом он дешевле, чем зимой. Неопределенность состоит в том, что не известно, какой будет зима: суровой, тогда придется докупать уголь, или мягкой, тогда часть угля может остаться неиспользованной. Очевидно, что у природы нет злого умысла и она ничего против человека «не имеет». С другой стороны, долгосрочные прогнозы, составляемые метеорологическими службами, неточны и поэтому могут использоваться в практической деятельности только как ориентировочные при принятии решений.

Организация и аналитическое представление игры с природой

Пусть игрок 1 имеет m возможных стратегий: A_1, A_2, ..., A_m, а у природы имеется n возможных состояний (стратегий): $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$, тогда условия игры с природой задаются матрицей $\boldsymbol{A}$ выигрышей игрока 1:

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & П_1 & П_2 & \dots & П_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right)$$

Платит, естественно, не природа, а некая третья сторона (или совокупность сторон, влияющих на принятие решений игроком 1 и объединенных в понятие «природа»).

Возможен и другой способ задания матрицы игры с природой: не в виде матрицы выигрышей, а в виде так называемой матрицы рисков $\boldsymbol{R = ||r_{ij}||_{m,n}}$ или матрицы упущенных возможностей. Величина риска - это размер платы за отсутствие информации о состоянии среды. Матрица R может быть построена непосредственно из условий задачи или на основе матрицы выигрышей A.

Риском $\boldsymbol{r_{ij}}$ игрока при использовании им стратегии A_i и при состоянии среды $П_j$ будем называть разность между выигрышем, который игрок получил бы, если бы он знал, что состоянием среды будет $П_j$, и выигрышем, который игрок получит, не имея этой информации.

Зная состояние природы (стратегию) $П_j$, игрок выбирает ту стратегию, при которой его выигрыш максимальный, т.е. $r_{ij} = \beta_j – a_{ij}$ при заданном j. Например, для матрицы выигрышей

$$A = \begin{array}{c|cccc} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ \hline A_1 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ A_2 & 3 & 8 & 4 & 3 \\ A_3 & 4 & 6 & 6 & 2 \end{array}$$

$\beta_1 = 4,\ \beta_2 = 8,\ \beta_3 = 6,\ \beta_4 = 9.$

Согласно введенным определениям r_{ij} и β_j получаем матрицу рисков

$$R = \begin{array}{ccccc} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ A_1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ A_2 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ A_3 & 0 & 2 & 0 & 7 \end{array}.$$

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

- Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состоянии среды (природы), называют «безнадежной» или «дурной».
- В таких случаях для определения наилучших решений используются следующие критерии:
- **максимакса,**
- **Вальда,**
- **Сэвиджа,**
- **Гурвица.**

Критерий максимакса

- С его помощью определяется стратегия, максимизирующая максимальные выигрыши для каждого состояния природы. Это критерий крайнего оптимизма. Наилучшим признается решение, при котором достигается максимальный выигрыш, равный .
- Нетрудно увидеть, что для матрицы *A* наилучшим решением будет A_1, при котором достигается максимальный выигрыш - 9.
- Следует отметить, что ситуации, требующие применения такого критерия, в экономике в общем нередки, и пользуются им не только безоглядные оптимисты, но и игроки, поставленные в безвыходное положение, когда они вынуждены руководствоваться принципом «или пан, или пропал».

Максиминный критерий Вальда

- С позиций данного критерия природа рассматривается как агрессивно настроенный и сознательно действующий противник типа тех, которые противодействуют в стратегических играх. Выбирается решение, для которого достигается значение

$$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

- Для платежной матрицы *A* (3.1) нетрудно рассчитать:
- для первой стратегии ($i = 1$) ;
- для второй стратегии (i=2) ;
- для третьей стратегии (i=3) .

Тогда W=3 , что соответствует второй стратегии A_2 игрока 1.

- В соответствии с критерием Вальда из всех самых неудачных результатов выбирается лучший (W = 3). Это перестраховочная позиция крайнего пессимизма, рассчитанная на худший случай. Такая стратегия приемлема, например, когда игрок не столь заинтересован в крупной удаче, но хочет себя застраховать от неожиданных проигрышей. Выбор такой стратегии определяется отношением игрока к риску.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа

- Выбор стратегии аналогичен выбору стратегии по принципу Вальда с тем отличием, что игрок руководствуется не матрицей выигрышей *A* , а матрицей рисков *R* :

$$S = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}$$

- Для матрицы *R* нетрудно рассчитать:
- • для первой стратегии (i=1) ;
- • для второй стратегии (i=2) ;
- • для третьей стратегии (i=3) .
- Минимально возможный из самых крупных рисков, равный 4, достигается при использовании первой стратегии A_1.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

- Этот критерий при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом, характеризующим состояние между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом. Согласно этому критерию стратегия в матрице *A* выбирается в соответстви

$$H_A = \max_{1 \le i \le m} \left\{ p \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-p) \max_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\},$$

- При $p = 0$ критерий Гурвица совпадает с максимаксным критерием, а при $p = 1$ - с критерием Вальда. Покажем процедуру применения данного критерия для матрицы *A* при $p = 0,5$:

- для первой стратегии

$$(i=1) \quad 0{,}5\left(\min_{1\le j\le 4} a_{ij} + \max_{1\le j\le 4} a_{ij}\right) = 0{,}5(1+9) = 5;$$

- для второй стратегии

$$(i=2) \quad 0{,}5\left(\min_{1\le j\le 4} a_{ij} + \max_{1\le j\le 4} a_{ij}\right) = 0{,}5(3+8) = 5{,}5;$$

- для третьей   стратегии

$$(i=3) \quad 0{,}5\left(\min_{1\le j\le 4} a_{ij} + \max_{1\le j\le 4} a_{ij}\right) = 0{,}5(2+6) = 4.$$

- Применительно к матрице рисков *R* критерий пессимизма-оптимизма Гурвица имеет вид:
- $$H_R = \min_{1 \le i \le m} \left\{ p \max_{1 \le j \le n} r_{ij} + (1-p) \min_{1 \le j \le n} r_{ij} \right\}.$$
- При *p* = 0 выбор стратегии игрока 1 осуществляется по условию наименьшего из всех возможных рисков ( ); при *p* = 1 - по критерию минимаксного риска Сэвиджа.

Задача

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & П_1 & П_2 & П_3 & П_4 \\
\hline
A_1 & & & & \\
A_2 & & \begin{pmatrix} 20 & 30 & 15 & 15 \\ 75 & 20 & 35 & 20 \\ 25 & 80 & 25 & 25 \\ 85 & 5 & 45 & 5 \end{pmatrix} & & \\
A_3 & & & & \\
A_4 & & & &
\end{array}
$$

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

- Когда состояниям природы поставлены в соответствие вероятности, заданные экспертно либо вычисленные, решение обычно принимается на основе критерия максимума ожидаемого среднего выигрыша или минимума ожидаемого среднего риска
- Если для некоторой игры с природой, задаваемой платежной матрицей $A = ||a_{ij}||_{m,n}$, стратегиям природы $П_j$ соответствуют вероятности p_j, то лучшей стратегией игрока 1 будет та, которая обеспечивает ему максимальный средний выигрыш, т.е.

$$\max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} p_j \, a_{ij}.$$

- Применительно к матрице рисков (матрице упущенных выгод) лучшей будет та стратегия игрока, которая обеспечивает ему минимальный средний риск:

$$\min_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} p_j \, r_{ij} \, .$$