

Математические кривые в повседневной жизни



Проект выполнили:
Чежегов Александр, Мартьянов Иван,
8 класс МБОУ ФМЛ

г. Глазов
2012



Цель работы

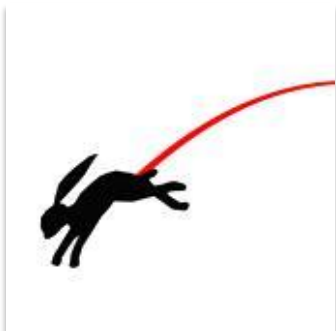
– создать анимационные модели графиков (параболы, синусоиды, циклоиды, архимедовой и логарифмической спиралей).

Задачи проекта:

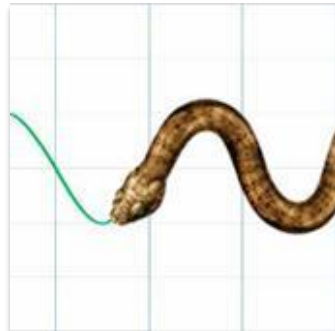
- **изучить** проявления данных кривых в природе,
- **выяснить**, как кривые применяются в технике,
- **смоделировать** рост, деформацию и траектории тел по кривым в редакторах «Gimp» и «Power Point»,
- **обеспечить** легкое внедрение анимационных модулей в учебные презентации,
- **заинтересовать** учащихся исследованием графиков функций.

Вся анимация сделана авторами проекта и не имеет аналогов. Это:

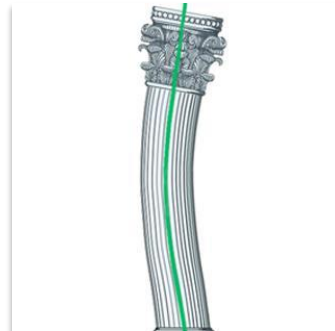
- gif-анимация на основе фото и рисунков,
 - Power Point-анимация,
 - gif-анимация на основе видео с сайта etudes.ru.
- Анимация может быть использована учителями на уроках физики, географии, биологии и математики.
- Фотографии кривых в быту и технике (Приложение 1) сделаны самостоятельно.
-



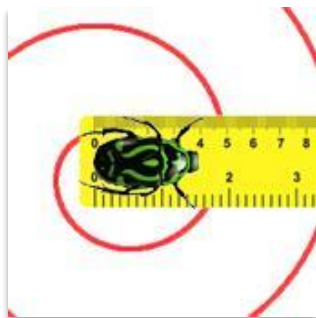
парабола



синусоида



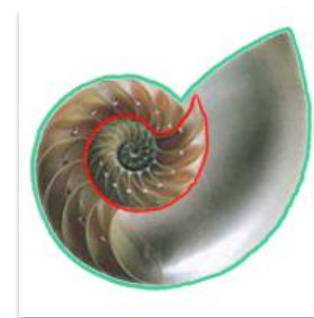
циклоида



архимедова спираль



логарифмическая спираль



Приложение 1

Приложение 2

Приложение 3



Парабола

$$y = ax^2 + bx + c$$

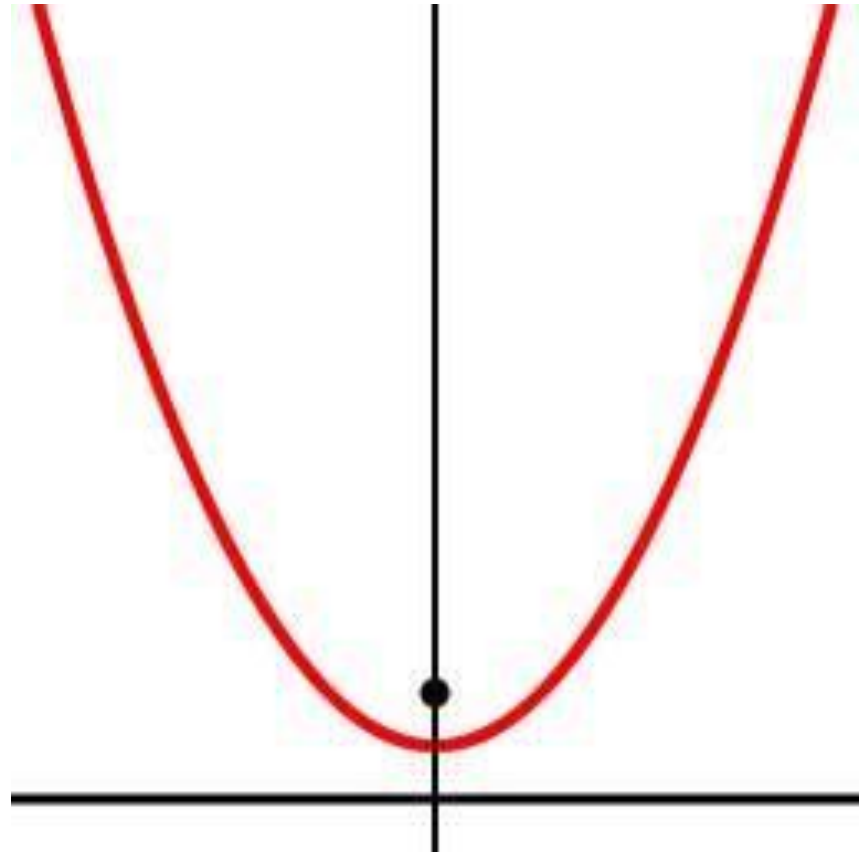


- Квадратичная функция

Параболой называется график квадратичной функции.

- Коническое сечение

Ещё Аполлоний Пергский, живший за 200 лет до н. э., назвал параболой одно из сечений конуса.





■ Свободное падение

Любой предмет, брошенный под углом к горизонту, падает по параболе.

■ Действие атмосферы

В земных условиях мы вряд ли увидим идеальную траекторию параболы из-за торможения воздухом. На других планетах, где нет атмосферы, предмет летит по идеальной параболе. При сопротивлении атмосферы чем больше масса тела, тем траектория ближе к параболе.

■ Струя и гравитация

Струи жидкости под воздействием гравитации принимают параболическую форму.





■ Баллистика

В баллистике часто используется закон полета тела по параболе. Известно, что траектория наибольшей дальности полета достигается при выстреле под углом примерно 45° к горизонту.

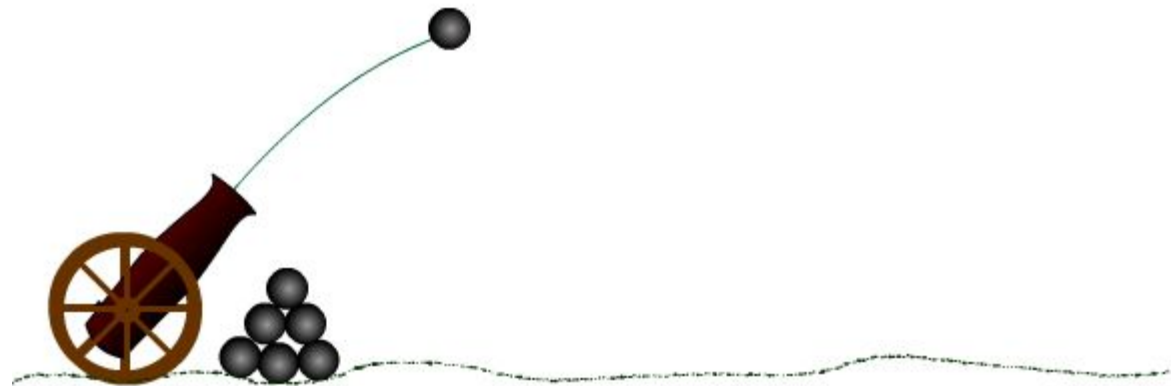
■ Прыжок

Кроме того, любое животное совершает прыжок по параболе.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t \cos \alpha, \\ y = y_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Анимация создана
на основе
видео etudes.ru

Траектория наибольшей дальности полета



$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$t = \frac{y}{v_0 \cos \alpha}$$



Синусоида

$$y = a + b \sin(cx + d)$$



$$y = a + b \sin(cx + d)$$

■ Движение змеи

Синусоиду часто можно видеть в рисунках, образуемых природой. След-синусоида остаётся после движения змеи по песку.

■ Волны жидкости

Существует множество видов волн. К ним относятся и морские волны. При небольшой амплитуде колебаний в поперечном разрезе они действительно представляют собой синусоиду. При возрастании амплитуды синусоида искажается за счет возмущений-солитонов. Поэтому в морской волне трудно угадать идеальную синусоиду.

■ Прогиб опоры

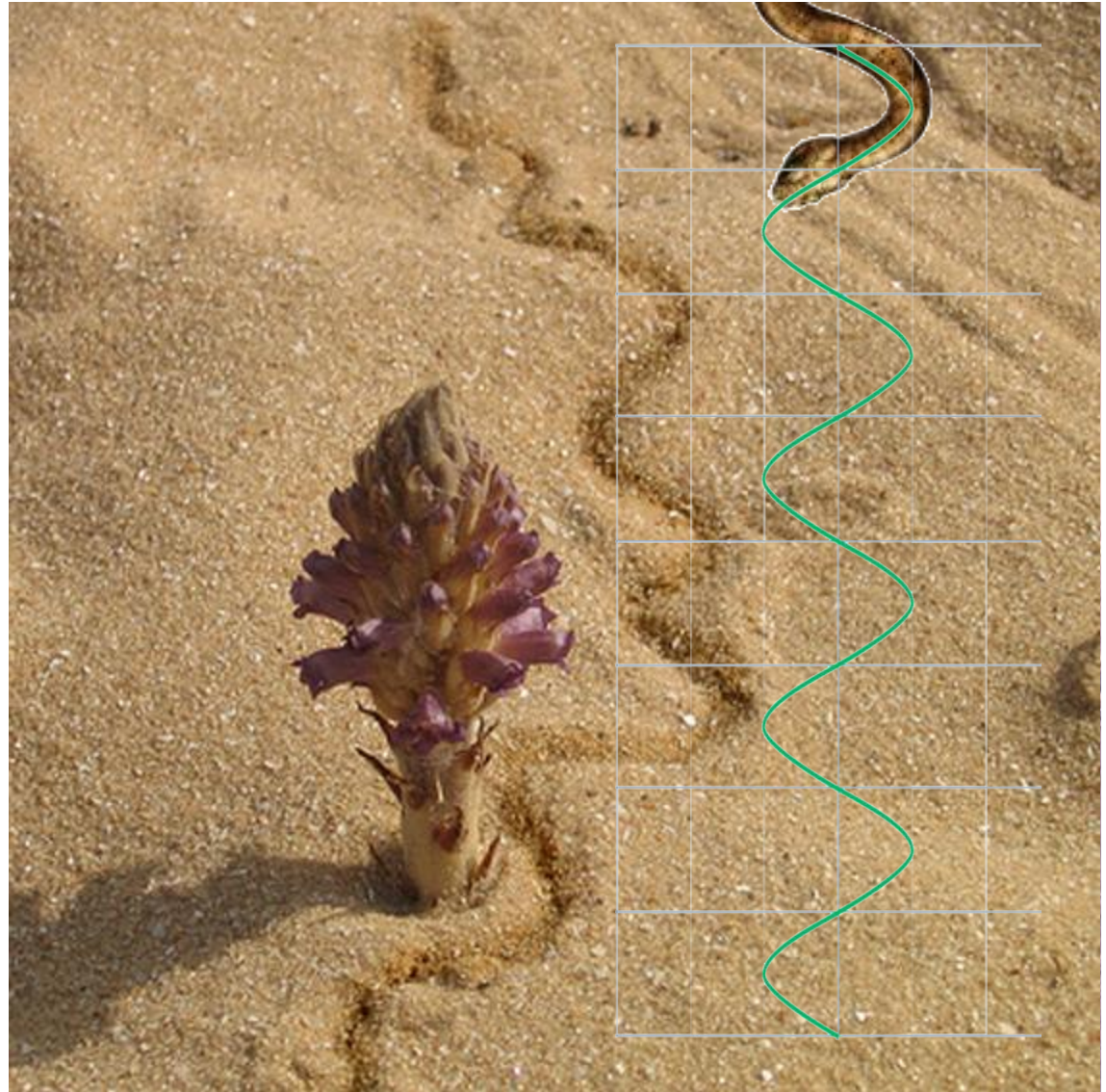
По синусоиде могут изгибаться вертикальные опоры при критических нагрузках.

■ Виды волн

Волны могут быть и невидимыми: свет, звук, радиоволна. Можно сказать, что гармонические волны, распространяющиеся по синусоиде, пронизывают наш мир.

■ Биение сердца

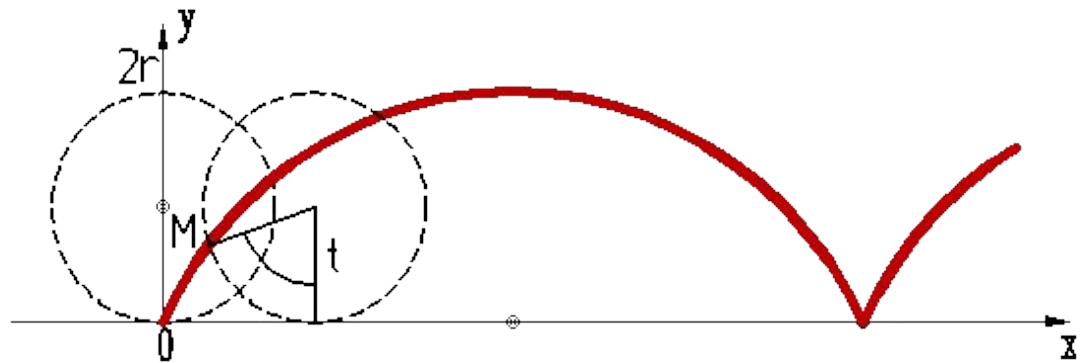
Биение сердца отражается на кардиограмме сложением нескольких синусоид.





Циклоида

$$x = r \arccos (r - y) / r - \sqrt{(2r y - r^2)}$$



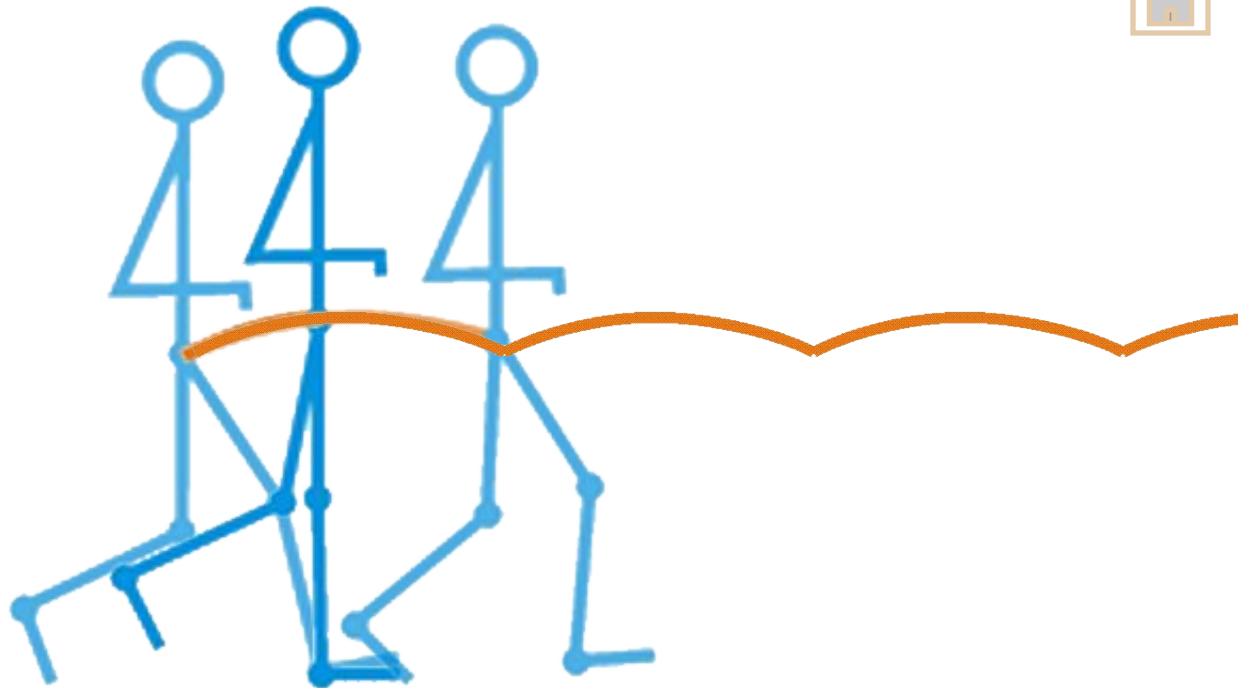


■ Точки на поверхности

Циклоиду может описывать точка на поверхности круглого предмета, катящегося по прямой без проскальзывания.

■ Центр тяжести человека

При ходьбе центр тяжести человека описывает циклоиду, радиусом которой является выпрямленная опорная нога идущего.



$$x = r \arccos (r - y) / r - \sqrt{(2r y - r^2)}$$





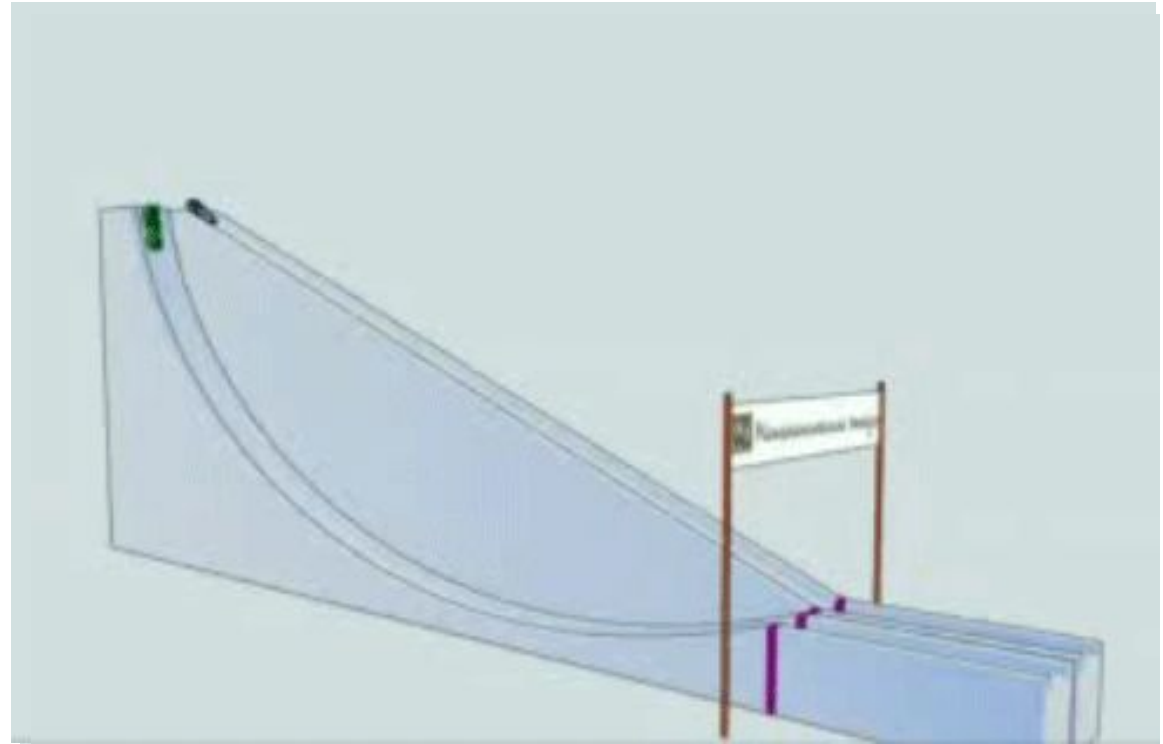
Кривая кратчайшего спуска

Среди многих замечательных свойств циклоиды отметим одно, из-за которого она заслужила мудреное название: «брахистохрона». Это название составлено из двух греческих слов, означающих «кратчайший» и «время». Это кривая наикратчайшего спуска. Предметы скатываются по ней быстрее, чем по прямой или по сектору окружности. Свойства брахистохроны используют в трассах для бобслея.

Таутохрона

Сделаем три одинаковые горки с профилем в виде циклоиды, так, чтобы конец горки приходился в вершину циклоиды. Поставим три боба на разные высоты и дадим отмашку. Удивительнейший факт — все бобы приедут вниз одновременно! Поэтому кривая скольжения называется таутохроной, то есть, «одновременной».

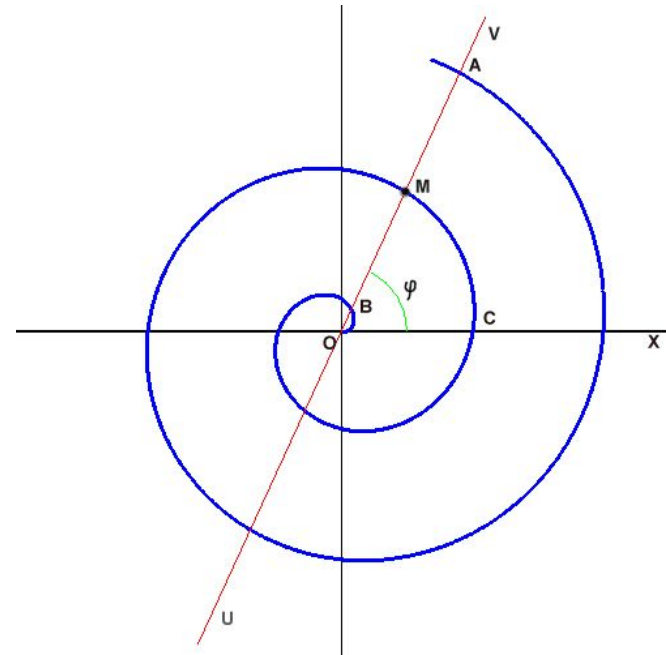
Анимация создана
на основе
видео etudes.ru





Архимедова спираль

$$r = a k$$





$$r = \alpha k$$

■ Построение спирали

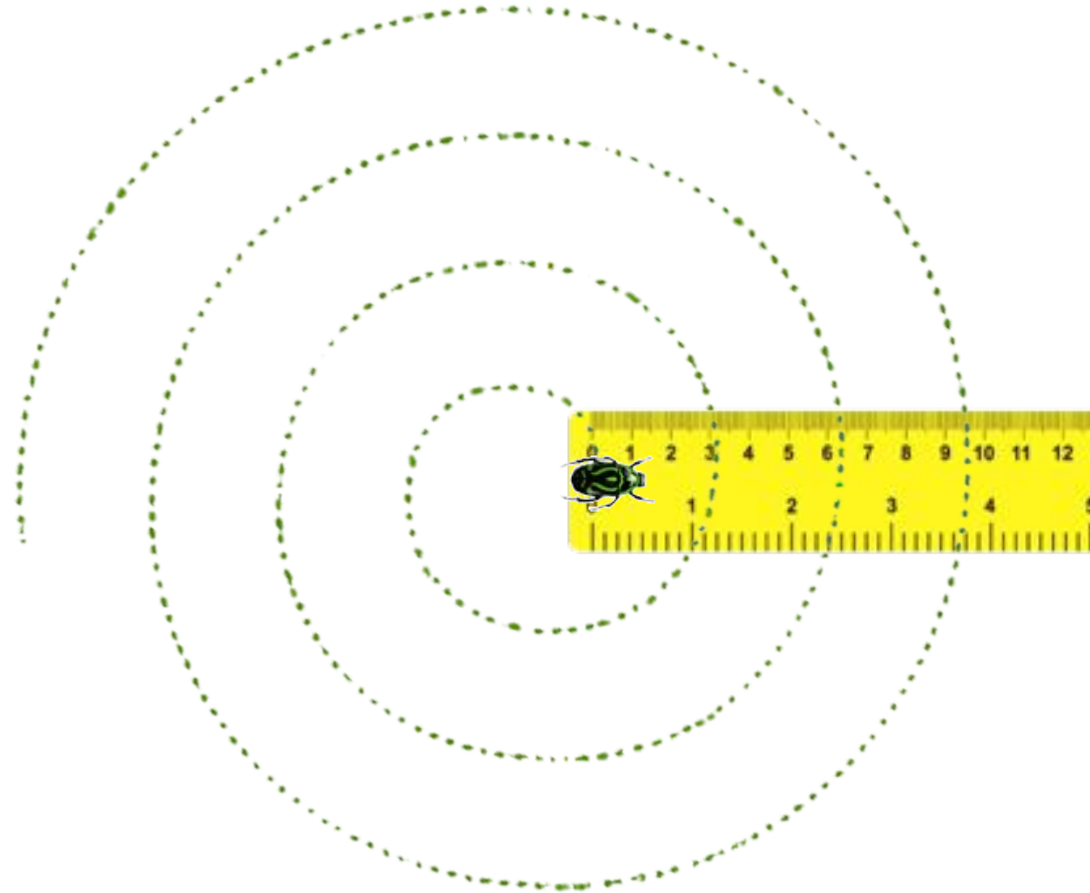
Архимедова спираль – это кривая, образованная точкой, равномерно движущейся по радиус-вектору, который в то же время равномерно вращается вокруг неподвижной точки.

■ Планорбис, улитка человеческого уха

Архимедова спираль крайне редка в природе. Что-то подобное вы можете видеть на раковине пресноводного моллюска Планорбис, который часто обитает в домашних аквариумах. Улитка человеческого уха по форме приближена к архимедовой спирали.

■ Грампластинка и компакт-диск

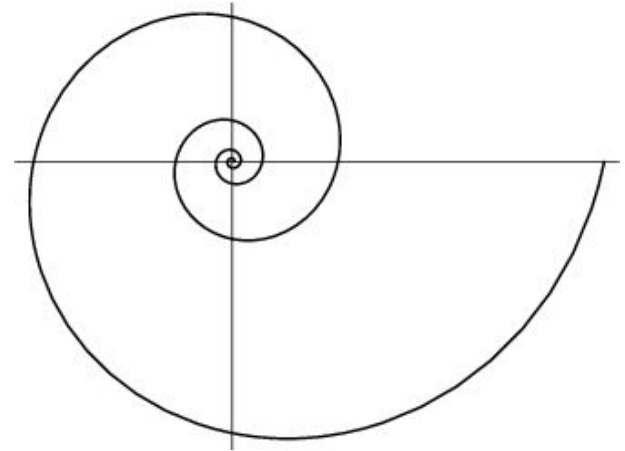
В области техники спираль Архимеда находит широкое применение: это звуковая дорожка на грампластинке или дорожка на компакт-диске.





Логарифмическая спираль

$$\ln r = \alpha k$$





■ Построение с помощью подобных треугольников

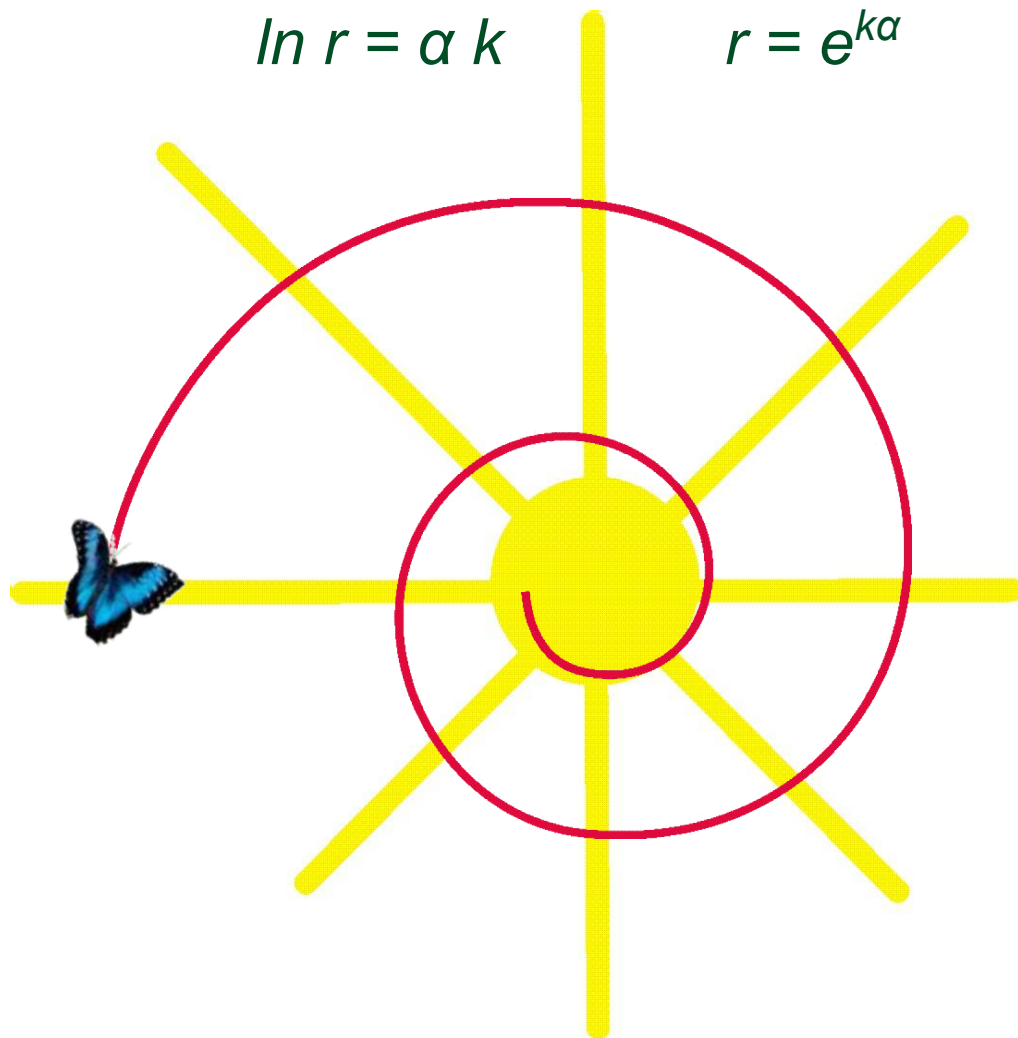
Если при построении архимедовой спирали точка будет двигаться с ускорением, мы получим логарифмическую спираль. Также её можно построить, поворачивая вокруг полюса треугольник, растущий по логарифмической зависимости.

■ Менотаксис

На приведенном примере удобно объяснить менотаксис – явление, когда насекомые движутся под определенным углом к лучам света. Логарифмическая спираль неизбежно приводит насекомое к источнику света.

$$\ln r = \alpha k$$

$$r = e^{k\alpha}$$





- **Раковина аммонита,
рога архара**

Раковины и рога архаров растут в виде логарифмической спирали. Можно сказать, что эта спираль является математическим символом соотношения формы и роста.

- **Подсолнух, ананас,
шишка**

В подсолнухе семечки расположены по дугам, близким к логарифмической спирали, то же самое можно сказать о строении шишки, ананаса, многих других растений.

- **Циклоны,
водовороты, смерчи**

Гидродинамические и аэродинамические завихрения имеют в основе логарифмическую спираль.





■ Полет семени

Самой маленькой аэродинамической спиралью можно считать микроторнадо, которое создает кленовое семя, вращаясь вокруг оси.

■ Образование циклона

Огромные облачные вихри 800 км в диаметре образуются при сближении холодного и теплого фронтов воздуха. Появляется волна, расширяющаяся в сторону холодного фронта. Так постепенно формируется вихревая структура циклона.

■ Рост раковины

Все сегменты раковины подобны друг другу, поэтому добавление нового сегмента не изменяет форму раковины. Самая большая спираль в живом мире - раковина вымерших моллюсков аммонитов (до 2 метров в диаметре).

■ Галактики

По логарифмическим спиральям закручены и многие галактики, в частности галактика Млечный путь, которой принадлежит Солнечная система.





Выводы

- В природе траектории тел, их деформация и рост связаны с математическими кривыми.
- Кривые используются в технике.
- Анимация помогает понять связь между математикой и жизнью.
- В будущем мы планируем изучить такие кривые, как гипербола, эллипс, эволюта, эвольвента, цепная линия, лемниската Бернулли.



**Спасибо
за внимание!**

Приложение 1.

Примеры кривых в быту

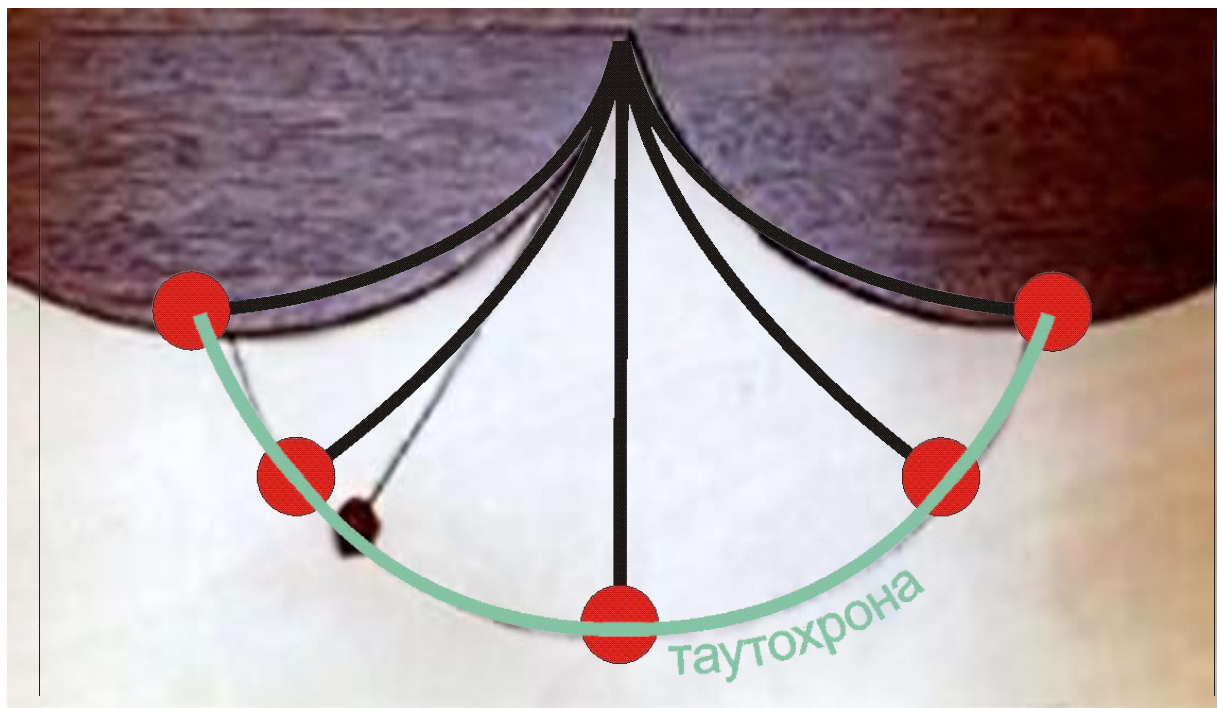
Посмотрите на сделанные нами снимки. Какие кривые вы на них узнаете?





Циклоидный маятник

- Гюйгенс нашел так называемую таутохрону, т.е. кривую, по которой тела скатываются вниз за одно и то же время с любой высоты в отсутствие трения.
- Гюйгенс сконструировал «щеки» в форме таутохроны, которые ограничивают качание подвеса и регулируют эффективную длину нити. При этом шарик движется точно по циклоиде, и на какой бы угол ни отклонили шарик, он будет доходить до центра таутохроны за одно и то же время.





Формулы

- Траектория полета

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t \cos \alpha, \\ y = y_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases}$$

где v_0 – начальная скорость, α – угол начальной скорости.

- Максимальные дальность и время полета

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad t = \frac{y}{v_0 \cos \alpha},$$

где v_0 – начальная скорость, α – угол начальной скорости.

- Радиус архимедовой спирали

$$r = \alpha k, \text{ где } r \text{ – радиус спирали, } \alpha \text{ – угол поворота радиуса, } k \text{ – произвольная постоянная.}$$

- Радиус логарифмической спирали

$$\ln r = \alpha k, \text{ то есть } r = e^{k\alpha}$$

где r – радиус спирали, α – угол поворота радиуса, k – произвольная постоянная.