

**Биомеханика** – раздел естественных наук, изучающий на основе моделей и методов механики механические свойства живых тканей, отдельных органов, или организма в целом, а также происходящие в них механические явления

Биомеханика человека – составная часть прикладных наук – изучает статику и движения человека

1. Клиническая биомеханика
2. Инженерная биомеханика
3. Спортивная биомеханика (Биомеханика спорта)
4. Биомеханика трудовых действий и рабочих поз
5. Теоретическая биомеханика – компьютерная биомеханика
6. Театральная биомеханика

**Метод биомеханики** – системный анализ и системный синтез движений на основе количественных характеристик, в частности кибернетическое моделирование движений.

Биомеханика, в

эмпирическая,

опирается на

При помощи

приборов регистра-

характеристики,

например траек-

., позволяющие

различать дви-

между собой.

Рассматривая

расчленяют

систему движений на составные части – устанавливают её состав. В этом – суть системного анализа.

*Система движений как целое – не просто сумма её составляющих частей. Части системы объединены многочисленными взаимосвязями, придающими ей новые, не содержащиеся в её частях качества (системные свойства). Необходимо представлять это объединение, устанавливать способ взаимосвязи частей в системе – её структуру. В этом – суть системного синтеза. Системный анализ и системный синтез неразрывно связаны друг с другом, они взаимно дополняются в системно-структурном исследовании.*

*При изучении движений в процессе развития системного анализа и синтеза в последние годы все шире применяется метод кибернетического моделирования – построение управляемых моделей (электронных, математических, физических и др.) движений и м*



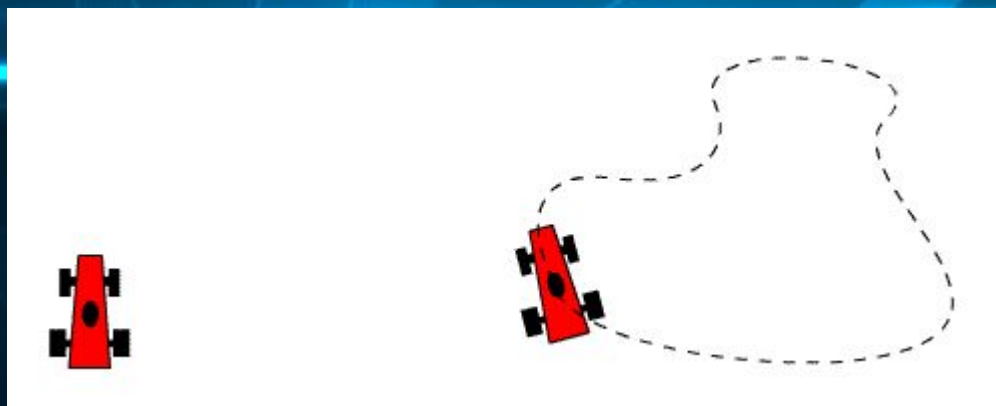
# *КИНЕМАТИКА*

The background is a dark blue gradient with several horizontal glowing cyan lines. A faint, stylized graphic of a ribbon or film strip is visible, looping across the center of the image.

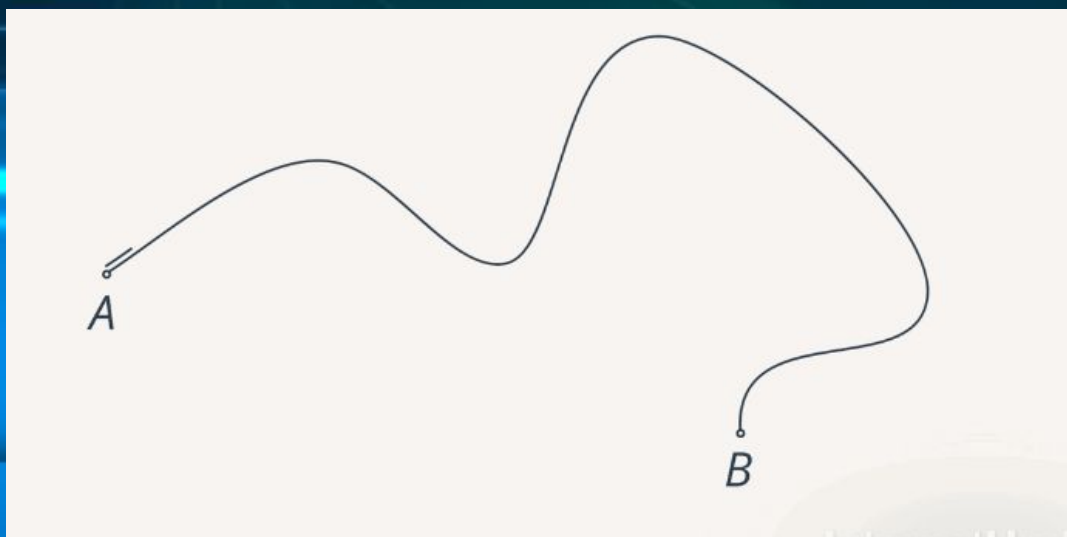
# *Относительность движения*



*Траекторией точки называется линия, описываемая этой точкой при ее движении относительно выбранной системы отсчета*



*Путь – длина траектории*



*Перемещение – вектор, проведенный из начальной в конечную точку движения*

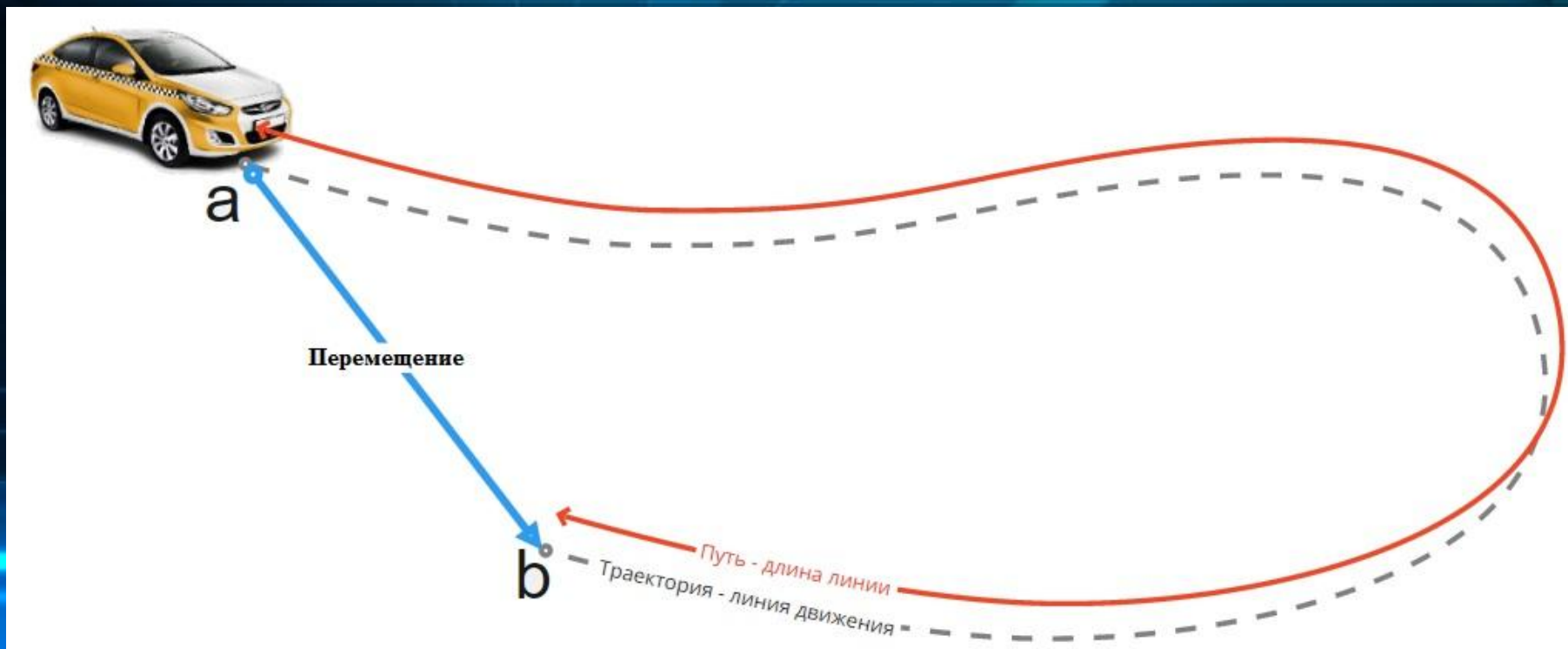


**a**

Перемещение

**b**

Путь - длина линии  
Траектория - линия движения





*В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движения точки*



*В общем случае траектория точки представляет собой пространственную кривую*

# Скорость

Для характеристики направления и быстроты движения в механике вводится векторная физическая величина, называемая скоростью

**Средней скоростью точки** в промежутке времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  называется вектор  $\langle \vec{v} \rangle$ , равный отношению приращения  $\Delta \vec{r}$  радиуса-вектора точки за этот промежуток времени к его продолжительности  $\Delta t$

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Знак равенства соответствует движению точки в течении времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  вдоль прямолинейной траектории в одном и том же направлении

**Средней скоростью** направлена так же, как вектор перемещения  $\Delta\vec{r}$ .

Так как  $|\Delta\vec{r}| \leq \Delta S$ , где  $\Delta S$  – длина пути точки за рассматриваемый промежуток времени, то

$$|\langle\vec{v}\rangle| \leq \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

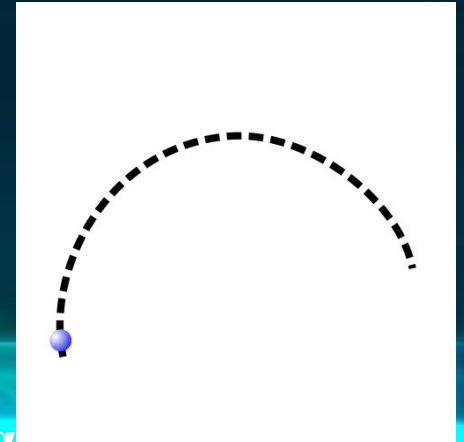
Вектор скорости можно разложить по базису  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  т.е. на три составляющие (проекции скорости –  $v_x, v_y, v_z$ ) на по осям прямоугольной декартовой системы координат

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

**Мгновенная линейная скорость** – физическая величина равная пределу, к которому стремится отношение элементарного перемещения  $\Delta \vec{r}$  за промежутку времени  $\Delta t$  в течение которого совершается это перемещение, при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

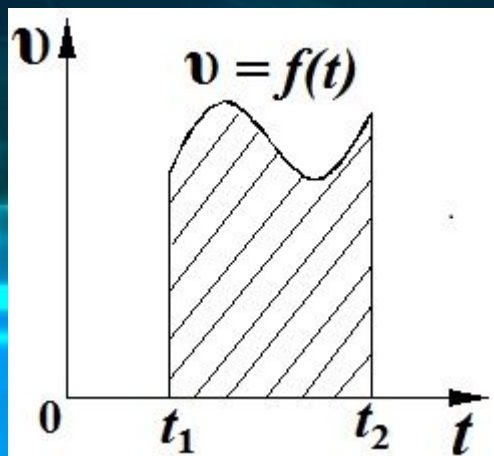
$$\langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



**Мгновенная скорость** – векторная величина, имеющая тоже направление, что и касательная к траектории в сторону движения точки



*Величину пройденного точкой пути можно представить графически площадью фигуры ограниченной кривой  $v = f(t)$  прямыми  $t = t_1$  и  $t = t_2$  и осью времени на графике скорости.*





# Прямолинейное равномерное движение

Прямолинейным равномерным движением называется движение при котором материальная точка, двигаясь по прямой, за любые равные промежутки времени проходит одинаковый путь

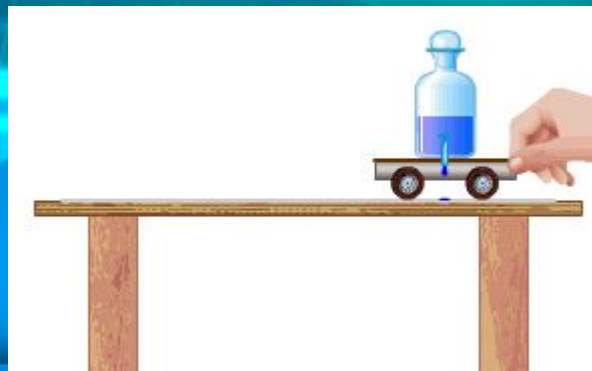
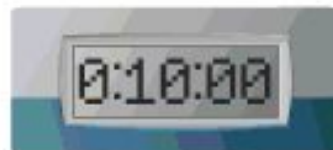
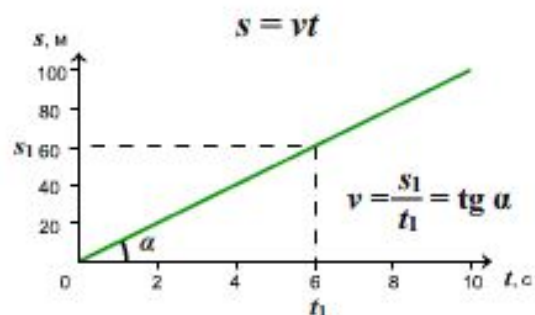




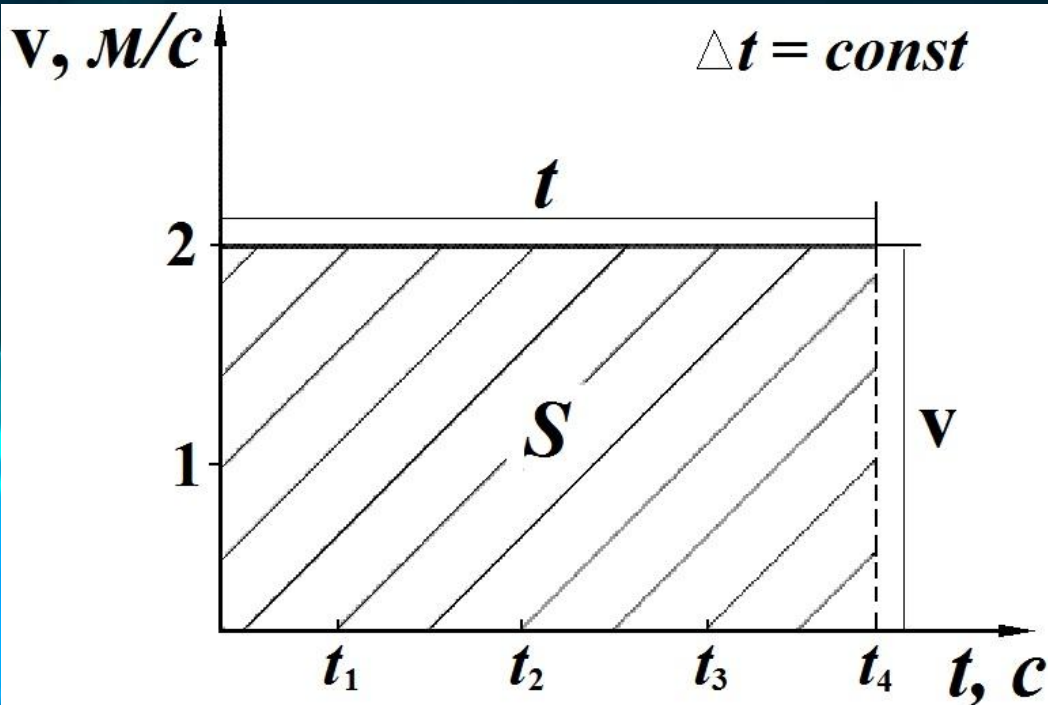
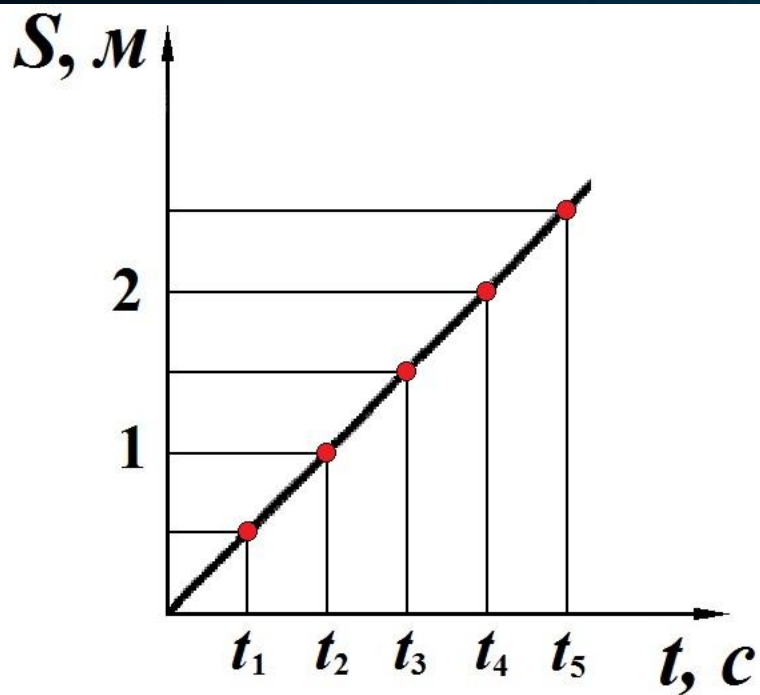
График зависимости пути,  
пройденного телом, от времени



При прямолинейном равномерном движении модуль вектора скорости численно равен тангенсу угла наклона графика перемещения к оси времени.

При равномерном движении точки остается постоянным модуль ее скорости, а путь, пройденный точкой за промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$

$$\Delta S = v \cdot \Delta t$$



# Ускорение

Быстроту изменения скорости характеризует ускорение. Если в начальный момент времени  $t_0 = 0$  тело имеет начальную скорость  $\vec{v}_0$ , а через некоторое время  $t$  его скорость равна  $\vec{v}$ , то вектор ускорения  $\vec{a}$  прямолинейного равнопеременного движения можно определить по формуле

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

Равнопеременным называется такое движение тела, при котором ускорение постоянно, т.е.  $a = \text{const}$



*При движении точки мгновенная скорость может меняться как по величине, так и по направлению.*

*Вектор  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ , при  $\Delta t \rightarrow 0$  стремится к некоторому пределу, называемому линейным ускорением*

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

*Разложение вектора ускорения по базису и проекциям на оси координат  $a_x, a_y, a_z$*

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

*Ускорение точки*

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



$$s_x = x - x_0$$

$$\rightarrow x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$



# *Прямолинейное равнопеременное движение*

*Движение материальной точки, при котором ее скорость за любые промежутки времени увеличивается или уменьшается на одну и ту же величину, называется равнопеременным.*

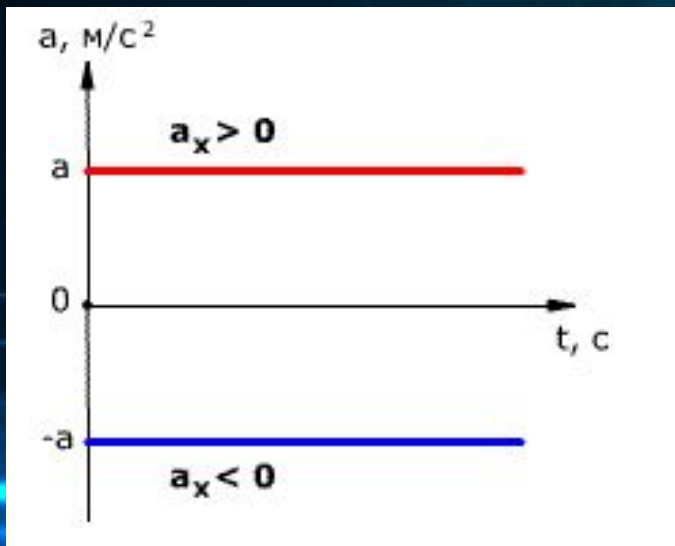
*Если скорость за любые одинаковые промежутки времени увеличивается на одну и ту же величину, то такое движение называется равноускоренным.*

*Если скорость за любые одинаковые промежутки времени уменьшается на одну и ту же величину, то такое движение называется равнозамедленным.*

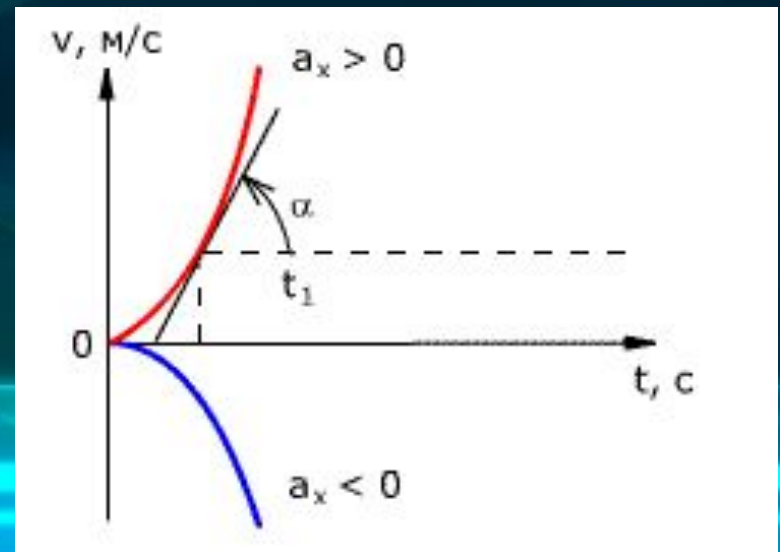
$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

$$\vec{a}t = \vec{v} - \vec{v}_0$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$



*при равнопеременном движении ускорение является постоянным ( $a = const$ ), график ускорения – это прямая, параллельная оси  $0t$*



*График зависимости перемещения от времени при  $v_0 = 0$*

*Перемещение численно равно площади фигуры  $Oabc$*

*Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин её оснований на высоту. Основания трапеции  $Oabc$  численно равны:  $Oa = v_0$  и  $bc = v$ . Высота трапеции равна  $t$ . Таким образом, площадь трапеции, а значит, и проекция перемещения на ось  $Ox$  равна:*

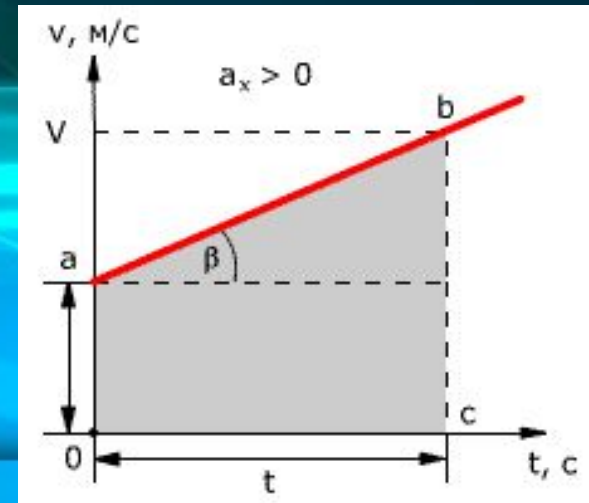
$$S_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t$$

$$S_x = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} t$$

$$S_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$S_x = v_{0x} t - \frac{a_x t^2}{2}$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$





*Так как положение материальной точки (тела) в любой момент времени определяется суммой начальных координат и проекции перемещения, то уравнение движения тела будет выглядеть следующим образом:*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

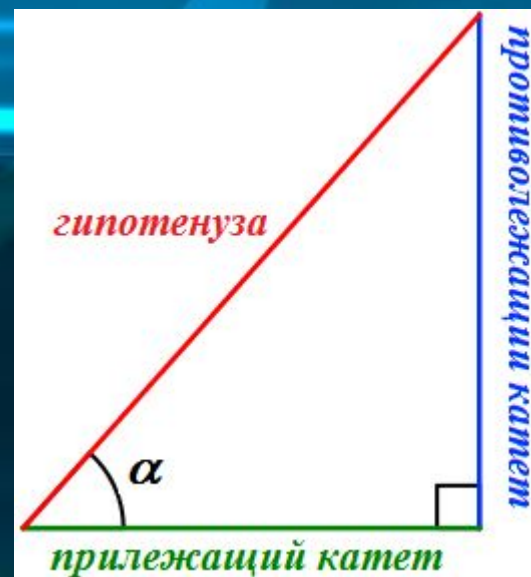
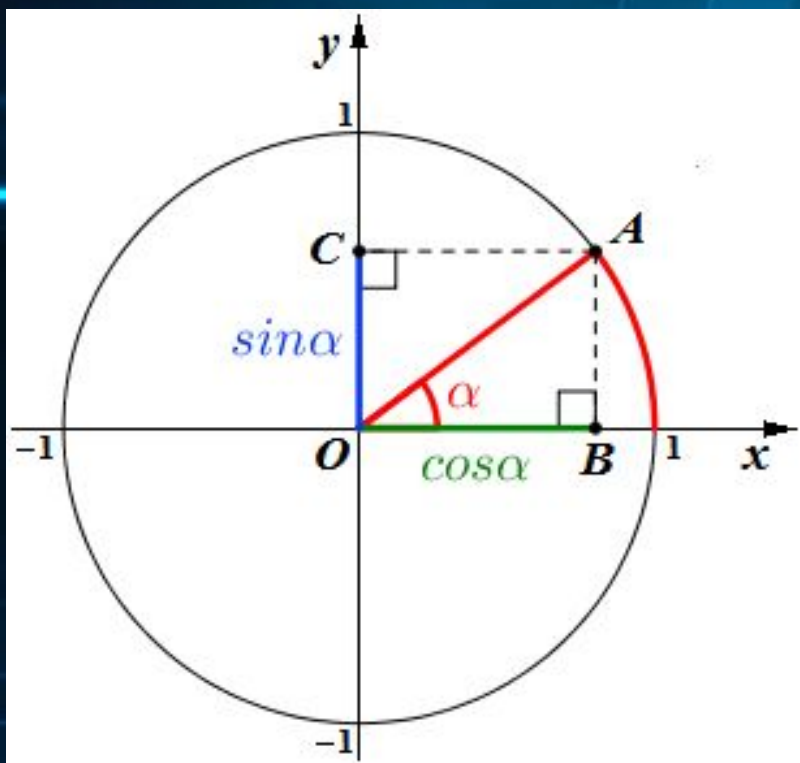


Существует несколько удобных соотношений, описывающих движение тела с постоянным ускорением. Пусть составляющая скорости в направлении этого ускорения будет  $v_0$  в начальный момент времени равный 0, а в момент времени  $t$  —  $v$ . Пусть тело за это время пройдет в указанном направлении путь  $S$ . Тогда

$$\begin{aligned} S &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t + \frac{(v - v_0) t^2}{2t} = \\ &= v_0 t + \frac{vt}{2} - \frac{v_0 t}{2} = \frac{v_0 t}{2} + \frac{vt}{2} = \frac{(v_0 + v) t}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^2 &= (v_0 + at)^2 = v_0^2 + 2v_0 at + (at)^2 = \\ &= v_0^2 + 2a \left( v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) = v_0^2 + 2aS \end{aligned}$$

**Тригонометрический круг** – это окружность единичного радиуса с центром в начале координат



**Синус угла** – отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = AB/OA = OC/OA$$

**Косинус угла** – отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = OB/OA = AC/OA$$

# Некоторые математические операции над векторами

Пусть  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – два вектора, приложенные к одной точке тела под некоторым углом  $\alpha$ , тогда результирующий вектор будет

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

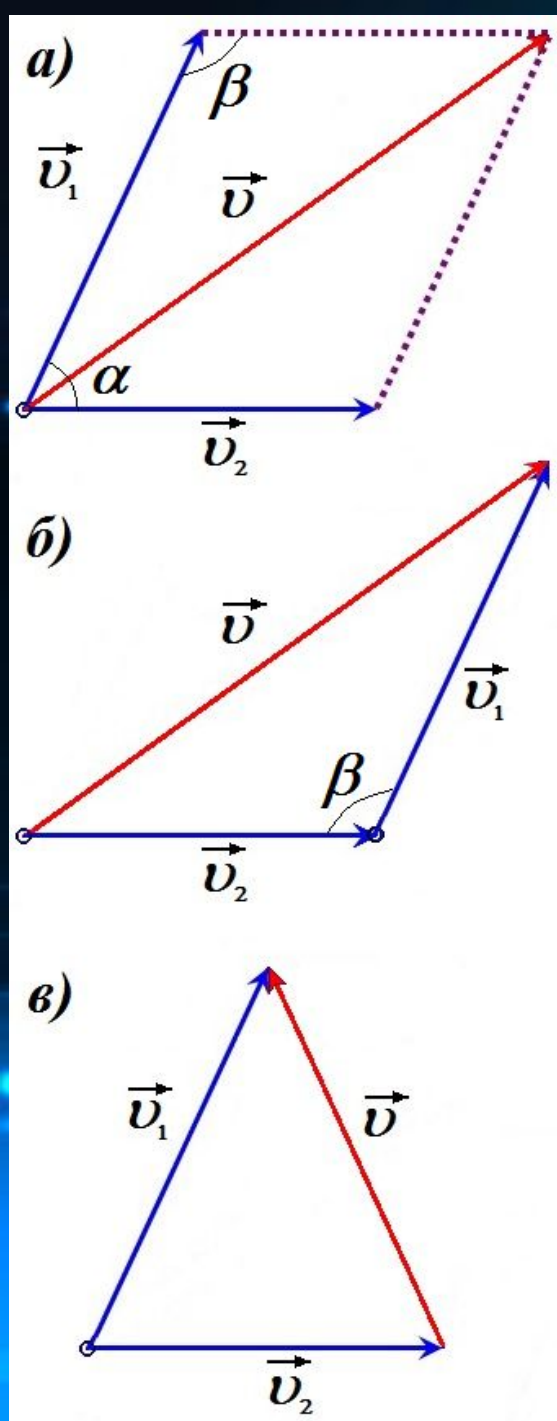
**Правило параллелограмма** состоит в том, что результирующий вектор изображается по модулю и направлению диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах как на сторонах.

**Правило треугольника:**

- сложение двух векторов – если из конца вектора  $\vec{v}_1$  отложить вектор  $\vec{v}_2$  и соединить начало вектора  $\vec{v}_1$  с концом вектора  $\vec{v}_2$ , то получится результирующий вектор;

- разность двух векторов – совмещают начала уменьшаемого  $\vec{v}_1$  и вычитаемого  $\vec{v}_2$  векторов, результирующий вектор  $\vec{v}$  проводят от конца  $\vec{v}_2$  к концу  $\vec{v}_1$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$





Скалярное произведение двух векторов, например векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , называется скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов, умноженному на косинус угла между ними:

$$\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \rightarrow a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

Скалярное произведение – алгебраическая величина. Ее знак зависит от угла между векторами-множителями. Если угол  $\alpha$  острый, то скалярное произведение положительно, если угол тупой – отрицательно.

Векторное произведение двух векторов

$$\vec{d} = [\vec{a} \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}] \rightarrow a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Направление результирующего вектора находят по правилу буравчика. Если рукоятку буравчика поворачивать по кратчайшему пути в направлении от вектора указанного первым в векторном произведении, ко второму вектору, то направление поступательного движения острия буравчика укажет направление векторного произведения



$Y \uparrow$ *По горизонтали (вдоль оси X)*

- начальное положение  $x_0 = 0$ ,
- начальная скорость

$$v_x = v_{0x} = \text{const} = v_0 \cdot \cos \alpha,$$

- ускорение  $a_x = 0$ ,

- закон движения  $x = v_0 t \cdot \cos \alpha$

$$0 = v_0 \cdot \sin \alpha - gt,$$

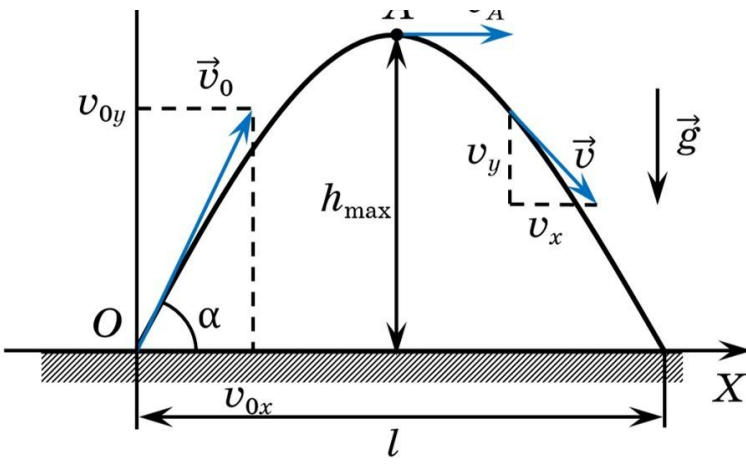
откуда время подъема  
тела

$$t = v_0 \cdot \sin \alpha / g$$

Верхняя точка подъема  
– максимальная высота

$$y = h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

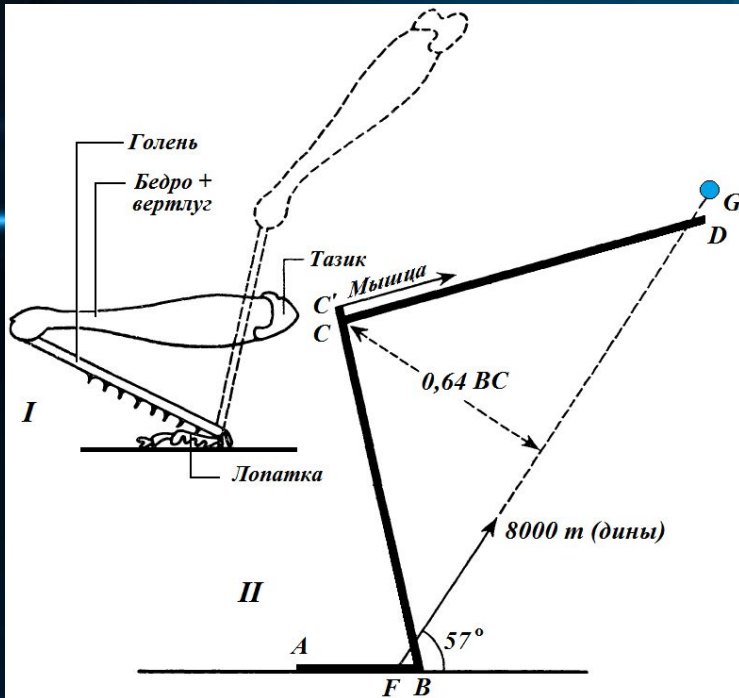


*По вертикали (вдоль оси Y)*

- начальное положение  $y_0 = 0$ ,
- начальная скорость  $v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - gt$ ,
- ускорение  $a_y = -g$ ,
- закон движения  $y = v_0 t \cdot \sin \alpha - gt^2/2$

При достижении максимальной  
высоты подъема – у составляющая  
скорости тела обращается в нуль

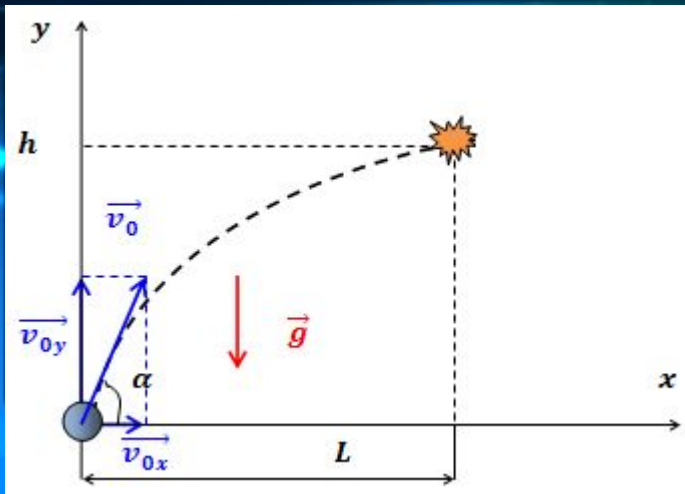
# Прыжок саранчи



$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

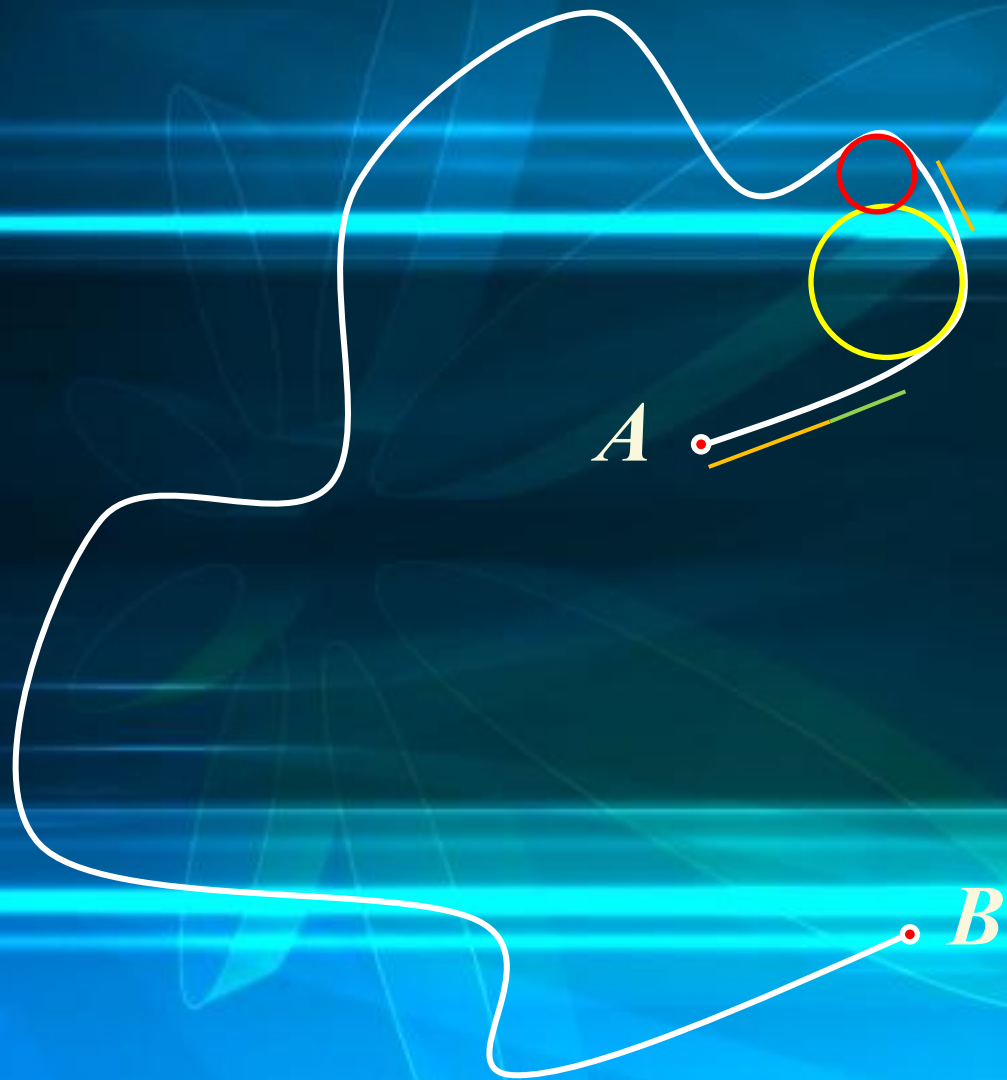
$$80 = \frac{v_0^2}{g}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2aS$$



$$340^2 = 2a \cdot 4$$

$$a = 14500 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$



# Криволинейное движение.

## Движение по окружности.

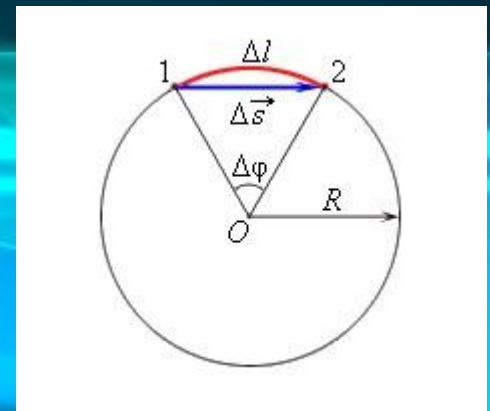
Движение по окружности – простейший случай

криволинейного движения тела. Когда тело движется вокруг некоторой точки, наряду с вектором перемещения удобно ввести угловое перемещение  $\Delta\varphi$  (угол поворота относительно центра окружности), измеряемое в радианах.

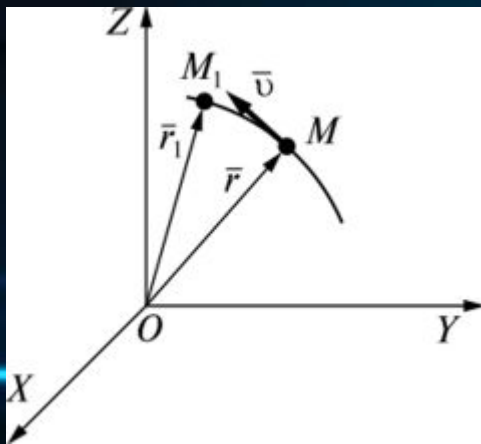
Зная угловое перемещение, можно вычислить длину дуги окружности (путь), которую прошло тело.

$$\Delta l = R\Delta\varphi$$

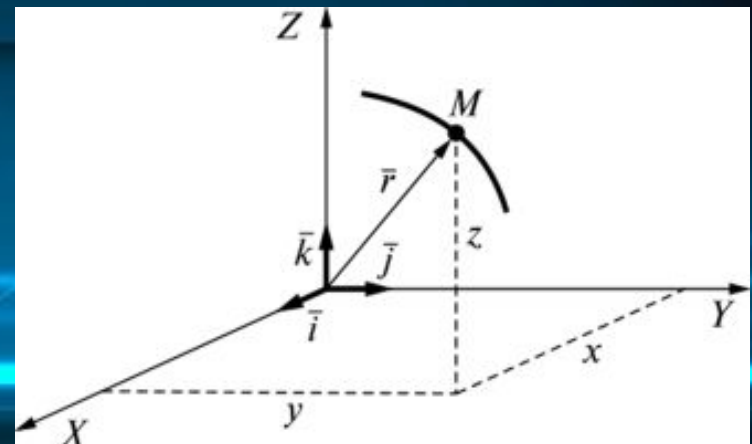
Если угол поворота мал, то  $\Delta l \approx \Delta s$ .







$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



*Движение точки по траектории может быть:*

- ускоренным, если модуль скорости возрастает с течением времени;*
- равноускоренным, если  $\Delta v / \Delta t = \text{const} > 0$ ;*
- замедленным, если модуль скорости при движении точки уменьшается;*
- равнозамедленным при  $\Delta v / \Delta t = \text{const} < 0$ ;*
- равномерным при  $\Delta v / \Delta t = 0$ .*

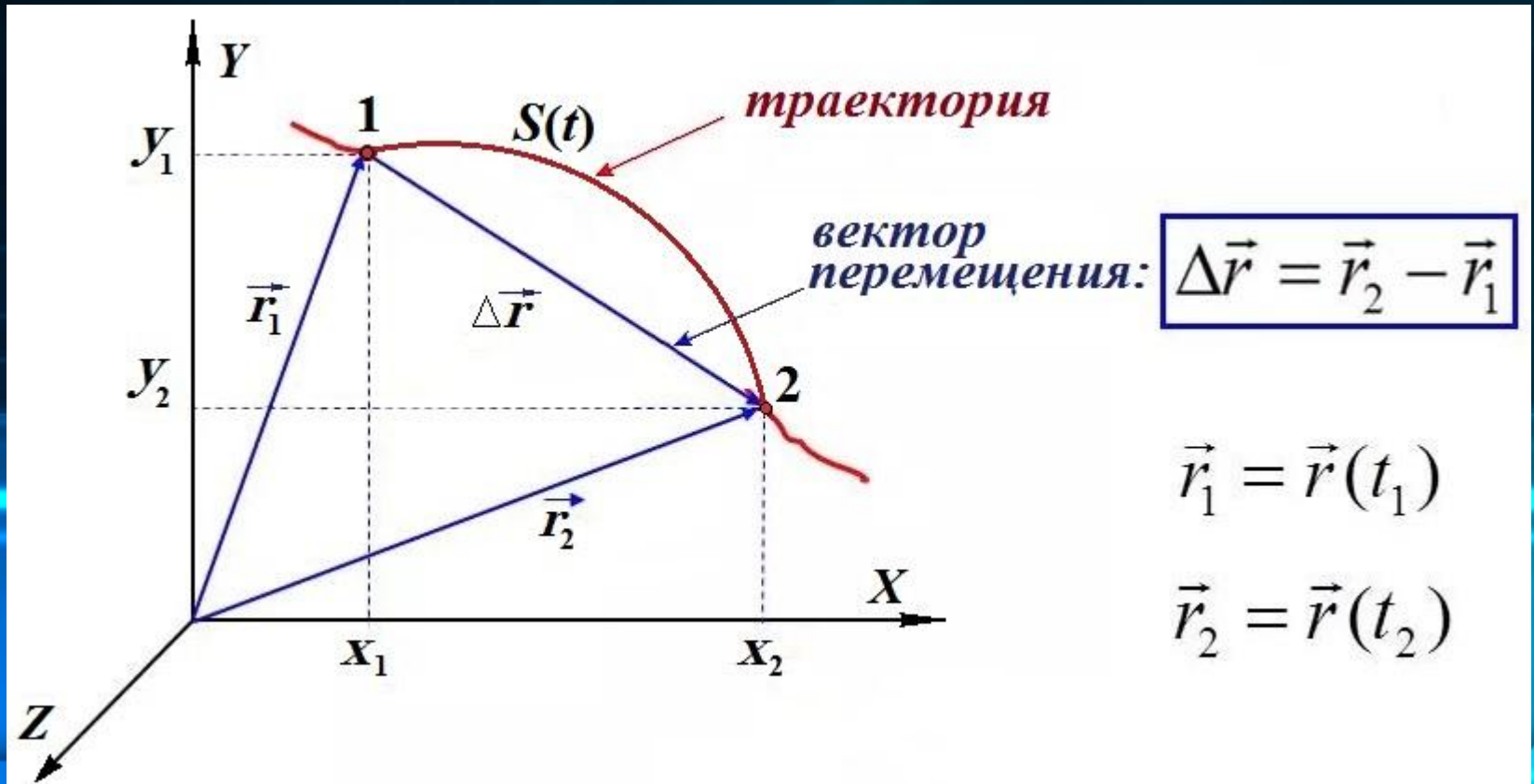
*Движение точки задается векторным, координатным и естественным способом.*

*При векторном способе движение точки задается законом изменения радиуса-вектора во времени*

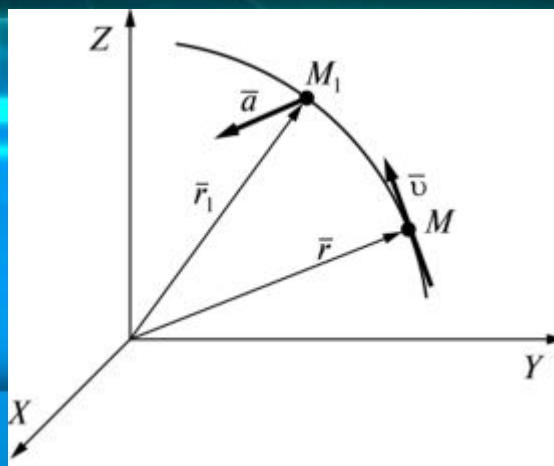
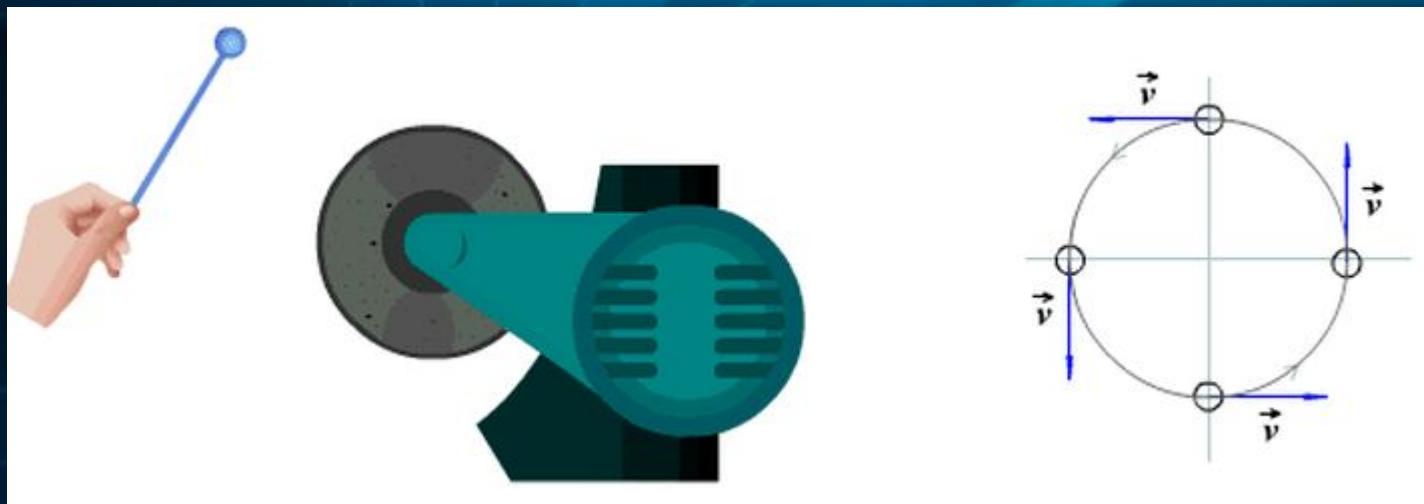
*При координатном способе движение точки задается координатами как функциями времени*

*При естественном способе известны начало отсчета на траектории, направление движения и закон движения точки вдоль траектории*

Вектором перемещения точки за промежуток времени от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  называется приращение радиуса вектора  $\vec{r}$  этой точки за рассматриваемый промежуток времени



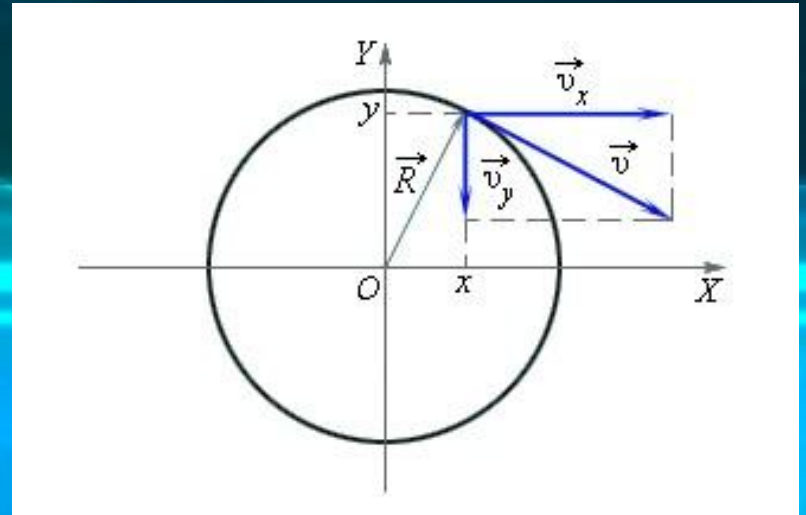
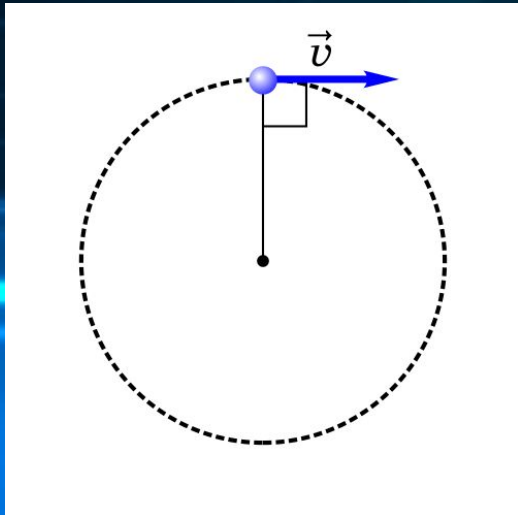
*Линейной скоростью называется скорость, с которой точка движется по окружности.*

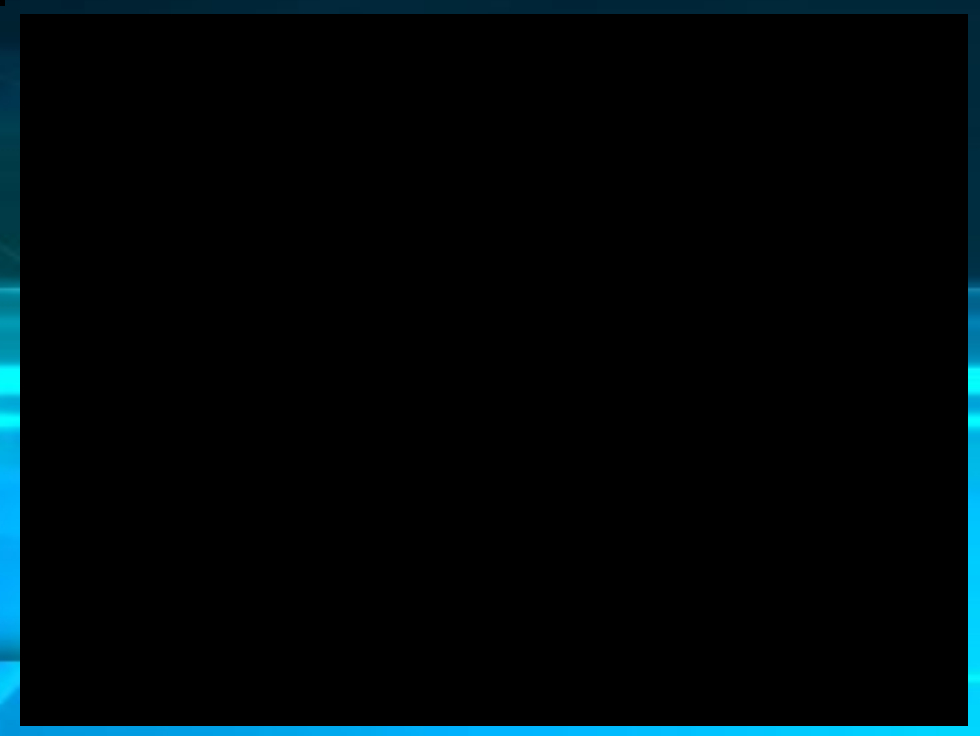
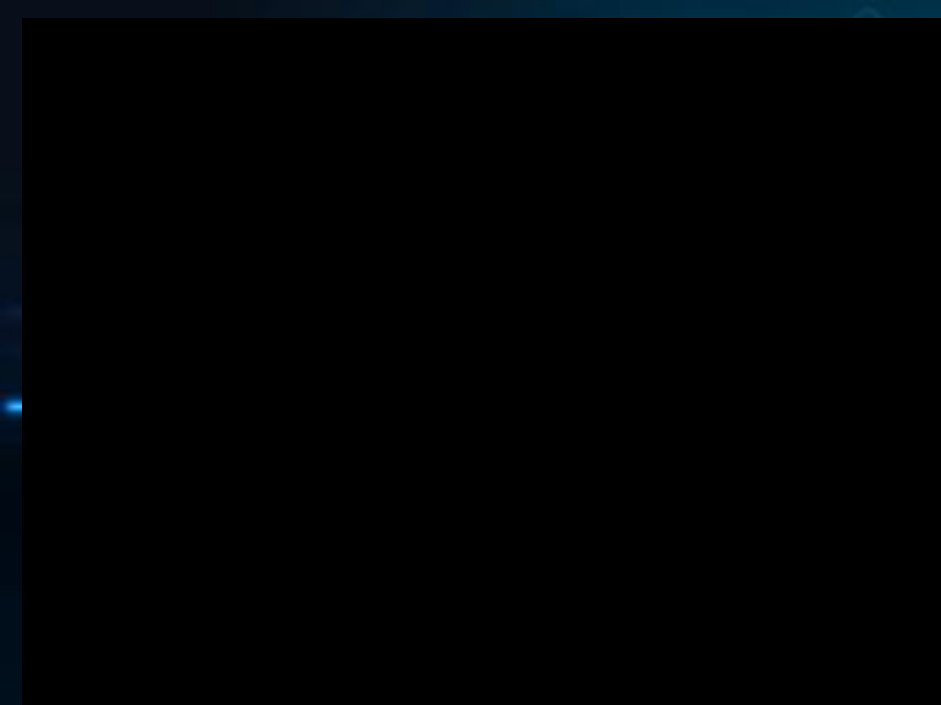




*Движение по окружности в плоскости можно описывать при помощи двух координат:  $x$  и  $y$ . В каждый момент времени скорость тела можно разложить на составляющие  $v_x$  и  $v_y$ .*

*Если движение равномерное, величины  $v_x$  и  $v_y$  а также соответствующие координаты будут изменяться во времени по гармоническому закону с периодом  $T = 2\pi R / v = 2\pi / \omega$*





## Угловая скорость

При криволинейном движении вводится понятие угловой скорости  $\omega$ , то есть скорости изменения угла поворота.

Угловая скорость в данной точке траектории – предел отношения углового перемещения  $\Delta\phi$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за которое оно произошло, при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

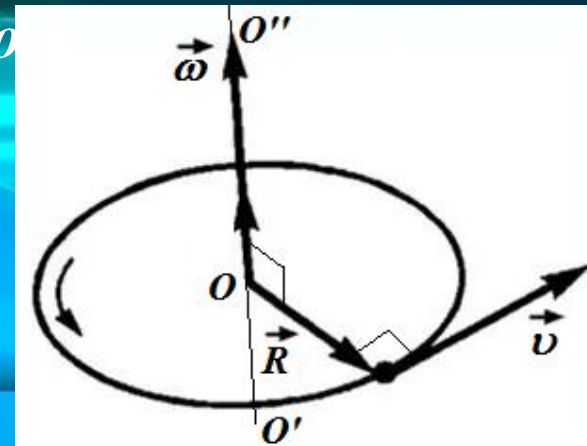
$$\omega = \Delta\phi / \Delta t$$

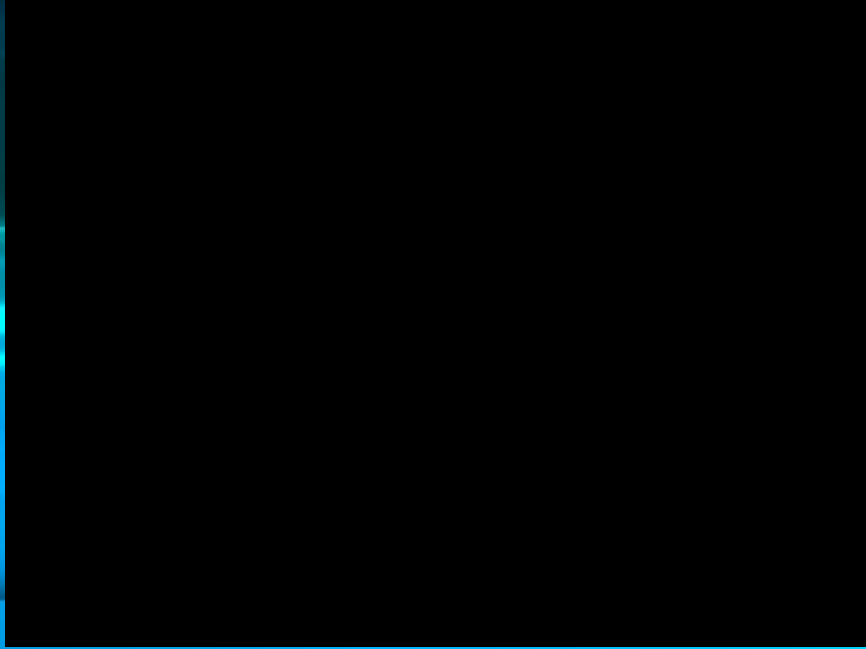
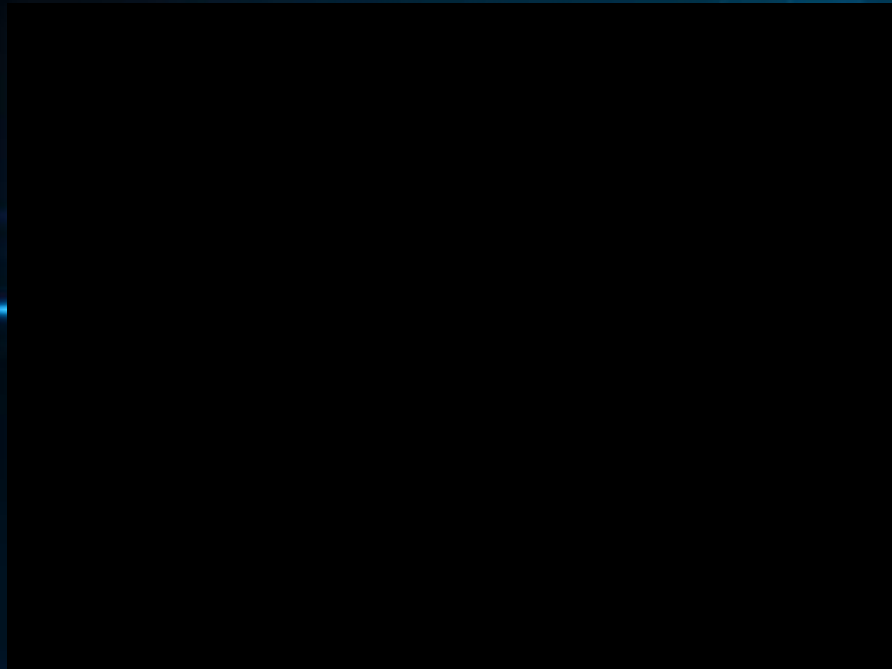
Единица измерения угловой скорости – радиан в секунду (рад/с).

Существует связь между угловой и линейной скоростью при движении по окружности.

Формула для нахождения угловой скорости:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}] \longrightarrow v = \omega R \sin\alpha = \omega R$$







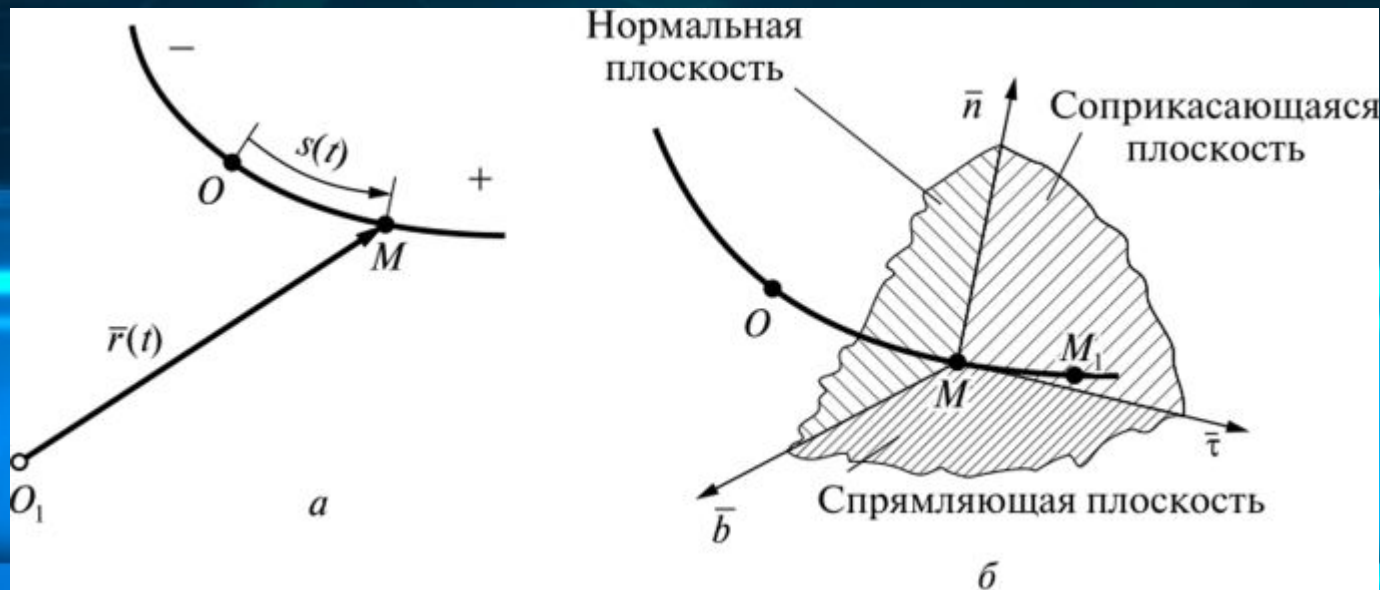
*Промежуток времени в течении которого материальная точка (тело), равномерно вращаясь с угловой скоростью  $\omega$  совершает один оборот, т.е. поворачивается на угол  $\varphi = 2\pi$ , называется периодом  $T$*

*Частота вращения показывает, сколько оборотов совершает за единицу времени материальная точка (тело), равномерно вращающееся с угловой скоростью  $\omega$*

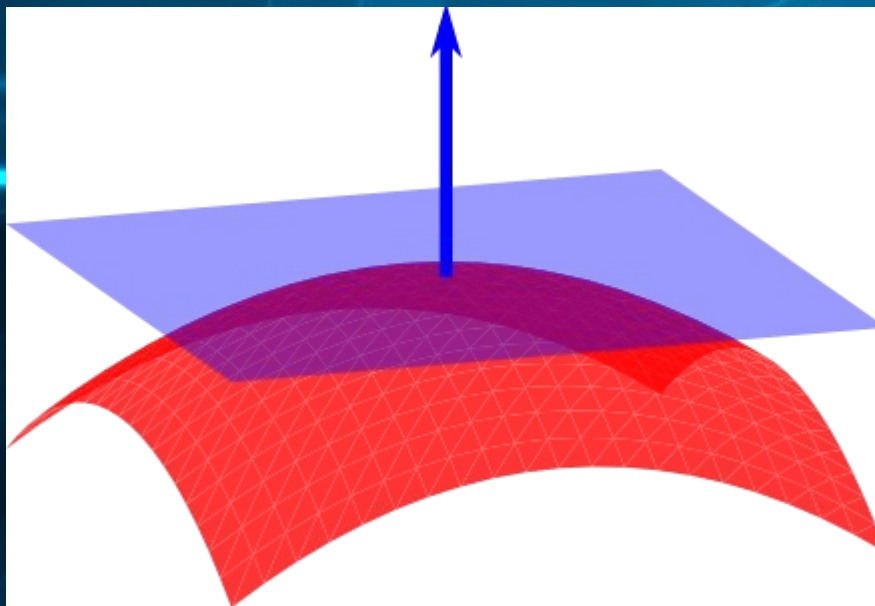
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

*В общем случае траектория точки – пространственная кривая, а ускорение  $\vec{a}$  лежит в соприкасающейся плоскости.*

*Плоскость, проходящую через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называют соприкасающейся плоскостью*



*Нормаль – прямая, перпендикулярная касательной прямой к кривой, касательной плоскости к поверхности*



*Вектор нормали  $\vec{n}$  к поверхности в данной точке – единичный вектор, приложенный к данной точке и параллельный направлению нормали. Для каждой точки гладкой поверхности можно задать два нормальных вектора, отличающихся направлением.*

## *Координатный способ задания движения точки*

*При координатном способе находим:*

- разложение вектора скорости на координатные оси*

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

- скорость точки*

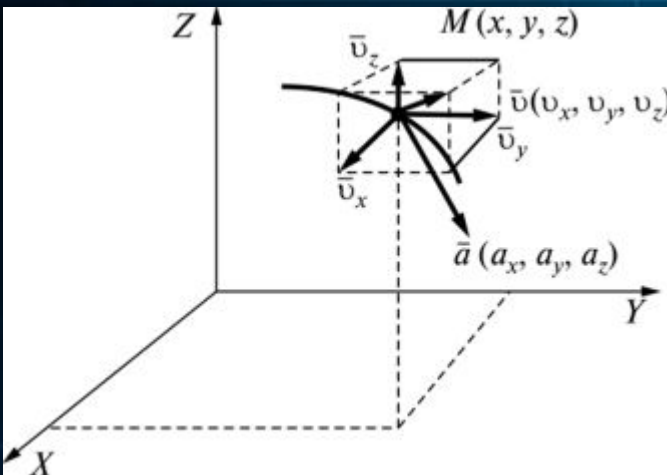
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- Разложение вектора ускорения на оси координат*

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

- ускорение точки*

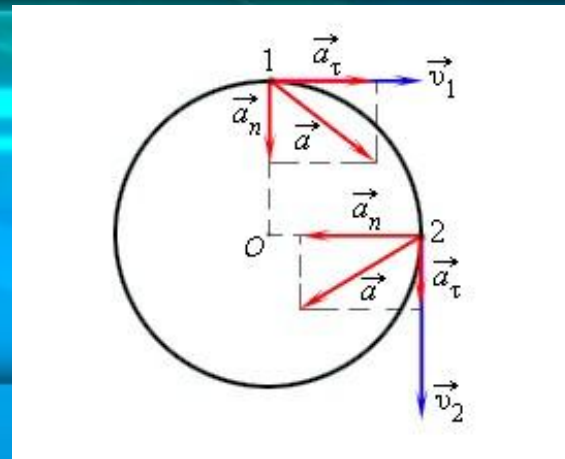
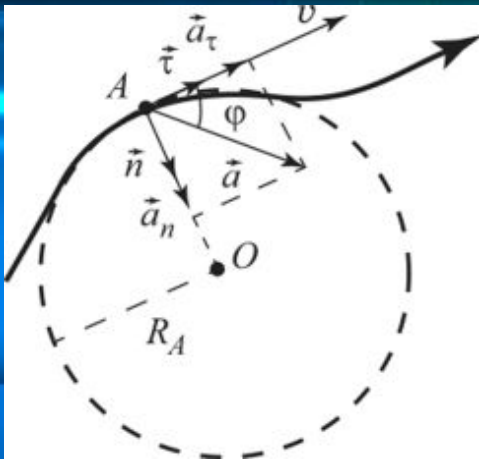
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

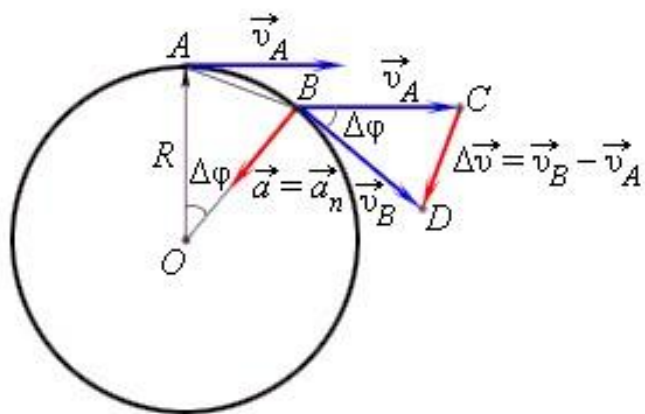




*В общем случае ускорение не совпадает по направлению с вектором скорости. Вектор ускорения  $\vec{a}$  может быть представлен в виде 2-х взаимно перпендикулярных векторов:*

- $\vec{a}_n$  – нормального ускорения,*
- $\vec{a}_\tau$  – тангенциального ускорения направленного вдоль касательной к траектории движения ( $\tau$  – единичный вектор, направленный по линейной скорости движения)*





$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$$\vec{a} = a_n \vec{n} + a_\tau \vec{\tau}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

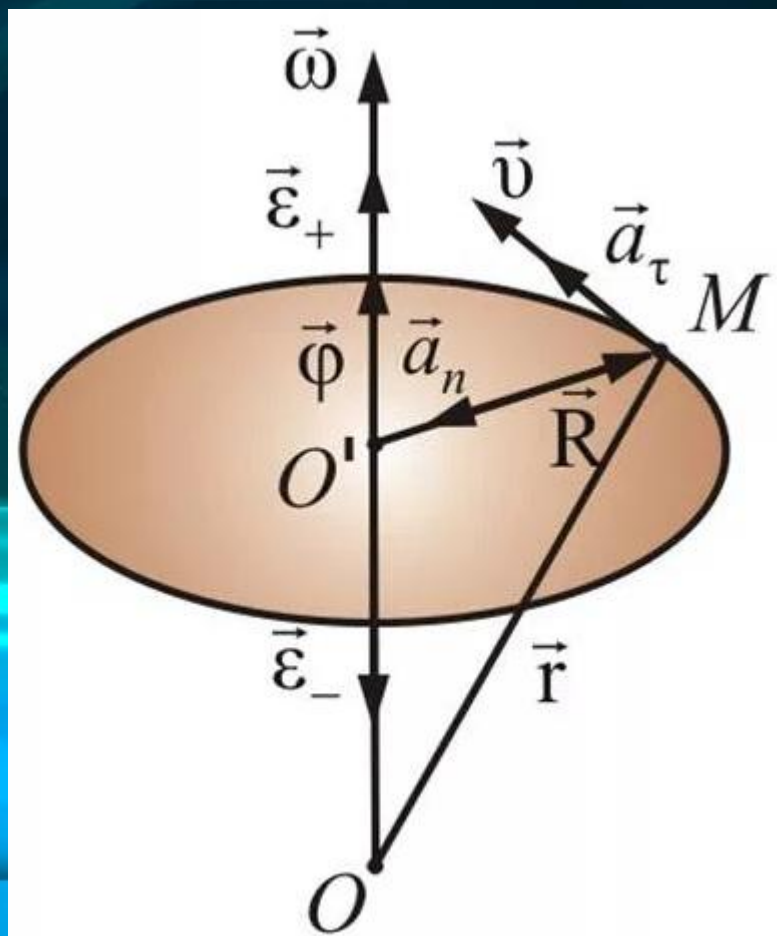
$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$$

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} = R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = R \varepsilon$$

$$\varepsilon = \text{const}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$



Равномерное  
прямолинейное  
движение

Равноускоренное  
прямолинейное  
движение

Свободное  
падение тела

Равномерное  
движение по  
окружности

Кинематика

изучает

Механическое движение – изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени

характеризуется

Координаты  
Система координат  
Система отсчета  
Траектория  
Пройденный путь  
Перемещение  
Скорость  
Ускорение

различается

По траектории

Прямолинейное



Криволинейное



По скорости

Равномерное

$$v = \text{const}$$

Неравномерное

$$v \neq \text{const}$$

По движению точек  
тела

Поступательное



Вращательное



изучаем

Равномерное прямолинейное  
движение тела. Достаточно знать:  
 $x_0, v_0$

Равнопеременное прямолинейное  
движение тела. Достаточно знать:  
 $x_0, v_0, a$

Равномерное движение тела по  
окружности. Достаточно знать:  
 $R, T$

Основная задача – найти  $x$  и  $v$  в любой момент времени, зная  $x_0, v_0, a$



Равномерное  
прямолинейное  
движение

Равноускоренное  
прямолинейное  
движение

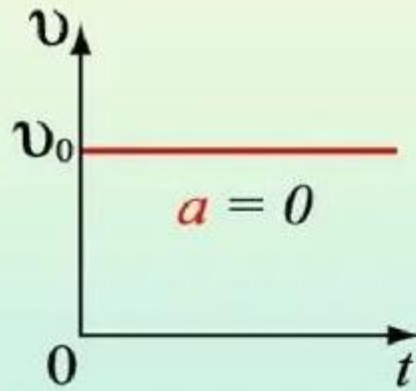
Свободное  
падение тела

Равномерное  
движение по  
окружности

## Прямолинейное движение

Равномерное движение

$$\vec{v} = \text{const}$$

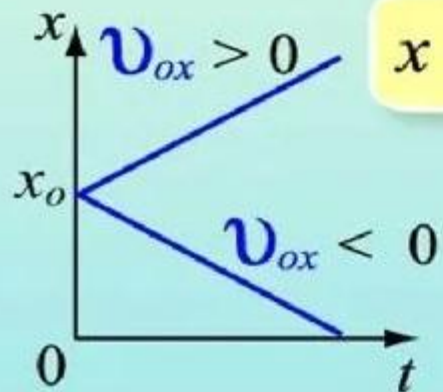
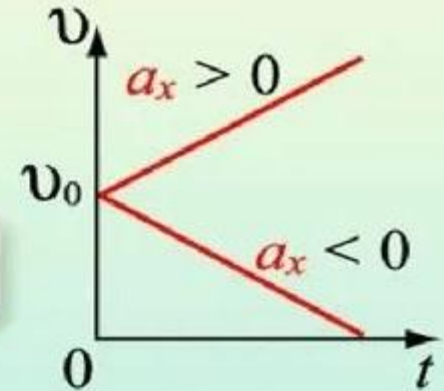


$$\vec{v} = \vec{v}_0$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

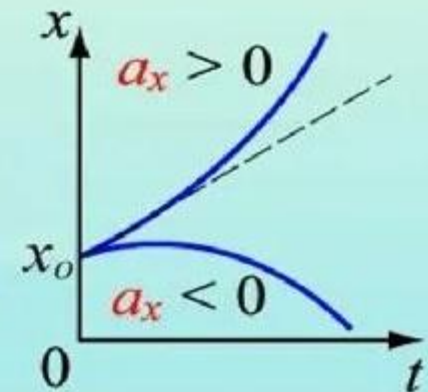
Равнопеременное движение

$$\vec{a} = \text{const}$$



$$x = x_0 + v_{ox}t$$

$$x = x_0 + v_{ox}t + \frac{a_x t^2}{2}$$





Равномерное  
прямолинейное  
движение

$$s = vt$$

$$x = x_0 + vt$$

$$x = x_0 - vt$$

$$v = \text{const}$$

$$a = 0$$

Равноускоренное  
прямолинейное  
движение

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$$

$$x = x_0 - v_0t - \frac{at^2}{2}$$

$$v = v_0 + at$$

$$v = v_0 - at$$

$$a = \text{const}$$

Свободное  
падение тела

$$y = y_0 + v_0t + \frac{gt^2}{2}$$

$$y = y_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v = v_0 + gt$$

$$v = v_0 - gt$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$v_0 = 0$$

$$L = vt$$

$$H = \frac{gt^2}{2}$$

Равномерное  
движение по  
окружности

$$a = \frac{v^2}{r} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$v = \omega r$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad \varphi = \frac{s}{r}$$

$$T = \frac{t}{N} \quad \nu = \frac{N}{t}$$

$$T = \frac{1}{\nu} \quad \nu = \frac{1}{T}$$

*Точка движется по оси  $Ox$  по закону*

$$x = 5 + 4t - 2t^2 \text{ (м).}$$

*Определить координату, в которой скорость точки равна нулю.*

- 1) 5 м;
- 2) 10 м;
- 3) -10 м;
- 4) 7 м.

*Частица движется вдоль  $Ox$  по закону*

$$x = 5 + 3t + 2t^2,$$

*где  $x$  – координата частицы в метрах;  $t$  – время в секундах.*

*Определить модуль ускорения частицы.*

- 1) 2 м/с<sup>2</sup>;
- 2) 4 м/с<sup>2</sup>;
- 3) 1 м/с<sup>2</sup>;
- 4) 5 м/с<sup>2</sup>.

*Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг максимальной высоты 4 м. Сколько времени прошло от броска до того момента, когда вектор его скорости стал направлен горизонтально?*

- 1) 0,5 с;*
- 2) 0,6 с;*
- 3) 0,9 с;*
- 4) 1 с.*

*Колесо велосипеда имеет радиус 40 см. С какой скоростью едет велосипедист, если колесо делает 100 об/мин?*

- 1) 4,2 м/с;*
- 2) 2,1 м/с;*
- 3) 10,5 м/с;*
- 4) 6,28 м/с.*