***Биомеханика* – раздел естественных наук, изучающий на основе моделей и методов механики механические свойства живых тканей, отдельных органов, или организма в целом, а также происходящие в них механические явления**

***Биомеханика человека* – составная часть прикладных наук – изучает статику и движения человека**

1. ***Клиническая биомеханика***
2. ***Инженерная биомеханика***
3. ***Спортивная биомеханика (Биомеханика спорта)***
4. ***Биомеханика трудовых действий и рабочих поз***
5. ***Теоретическая биомеханика – компьютерная биомеханика***
6. ***Театральная биомеханика***

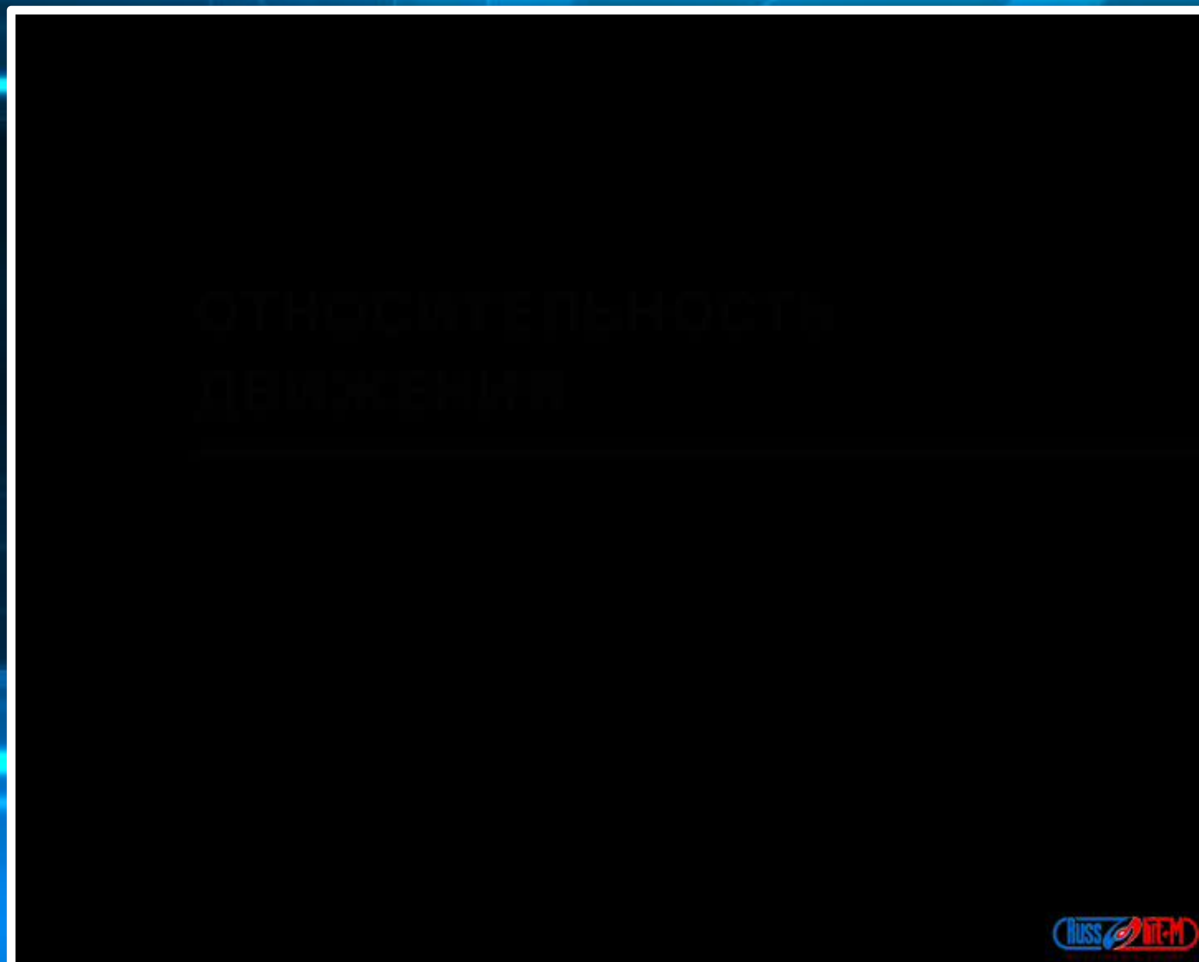
***Метод биомеханики** – системный анализ и системный синтез движений на основе количественных характеристик, в частности кибернетическое моделирование движений. Биомеханика, к [redacted] эмпирическая, опирается на [redacted] При помощи приборов регис[redacted]рактеристики, например траек[redacted]., позволяющие различать дв[redacted]ежду собой. Рассматривая [redacted] расчленяют систему движений на составные части – устанавливают её состав. В этом – суть системного анализа.*

Система движений как целое *– не просто сумма её составляющих частей. Части системы объединены многочисленными взаимосвязями, придающими ей новые, не содержащиеся в её частях качества (системные свойства). Необходимо представлять это объединение, устанавливать способ взаимосвязи частей в системе – её структуру. В этом – суть системного синтеза. Системный анализ и системный синтез неразрывно связаны друг с другом, они взаимно дополняются в системно-структурном исследовании.*

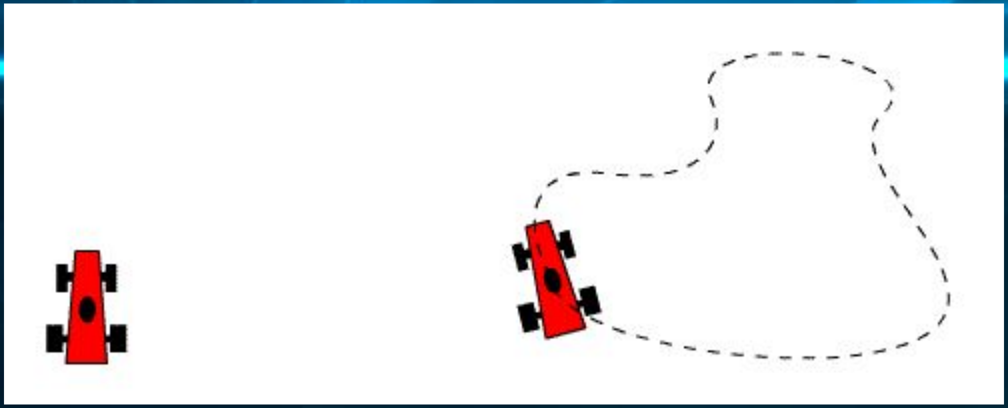
При изучении движений в процессе развития системного анализа и синтеза в последние годы все шире применяется метод кибернетического моделирования – построение управляемых моделей (электронных, математических, физических и др.) движений и м [redacted]

КИНЕМАТИКА

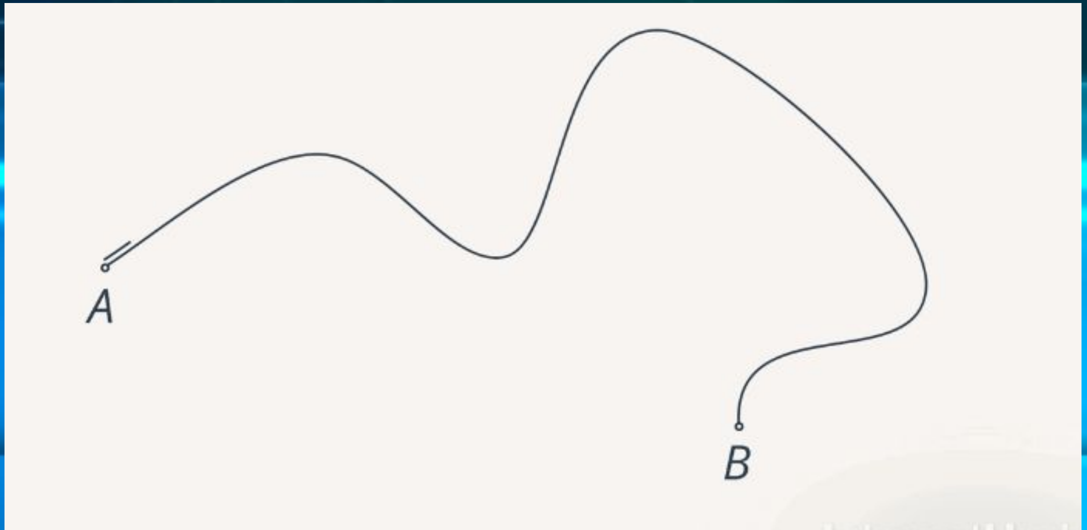
Относительность движения



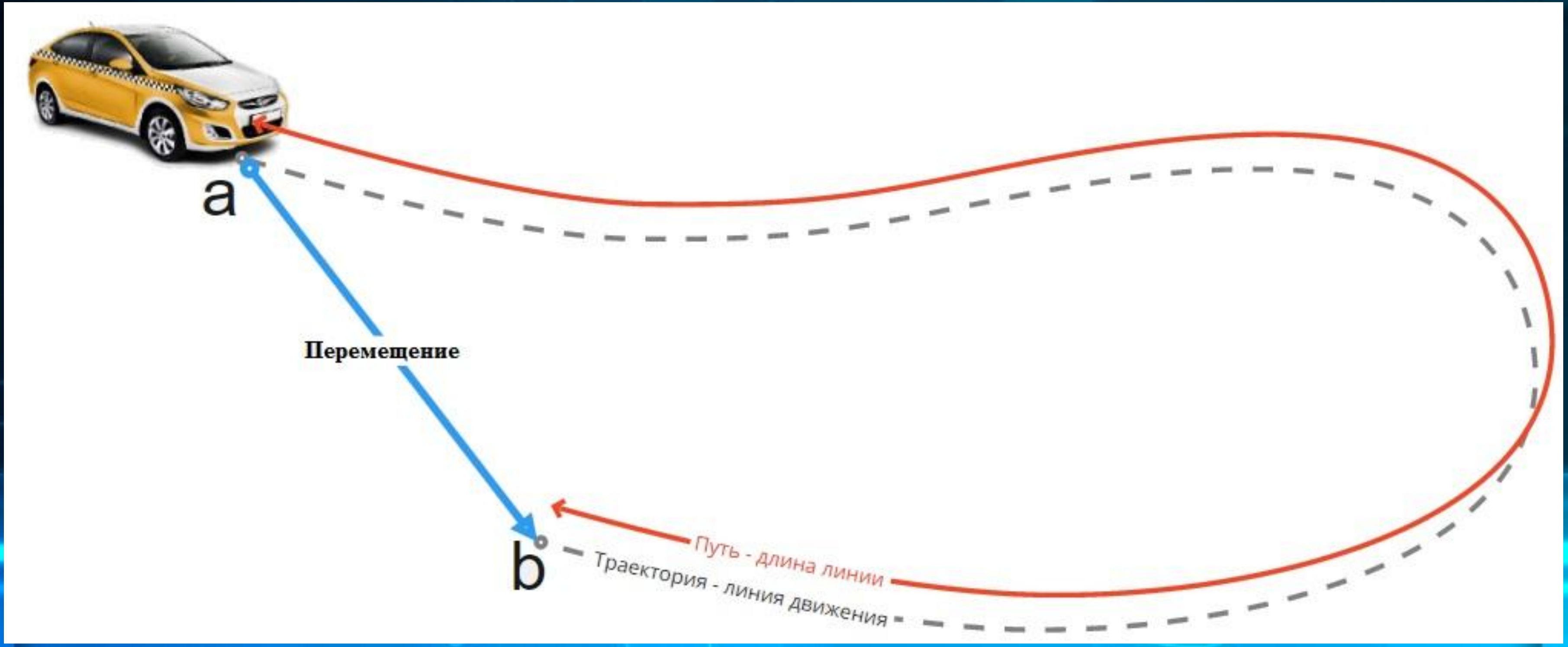
Траекторией точки называется линия, описываемая этой точкой при ее движении относительно выбранной системы отсчета



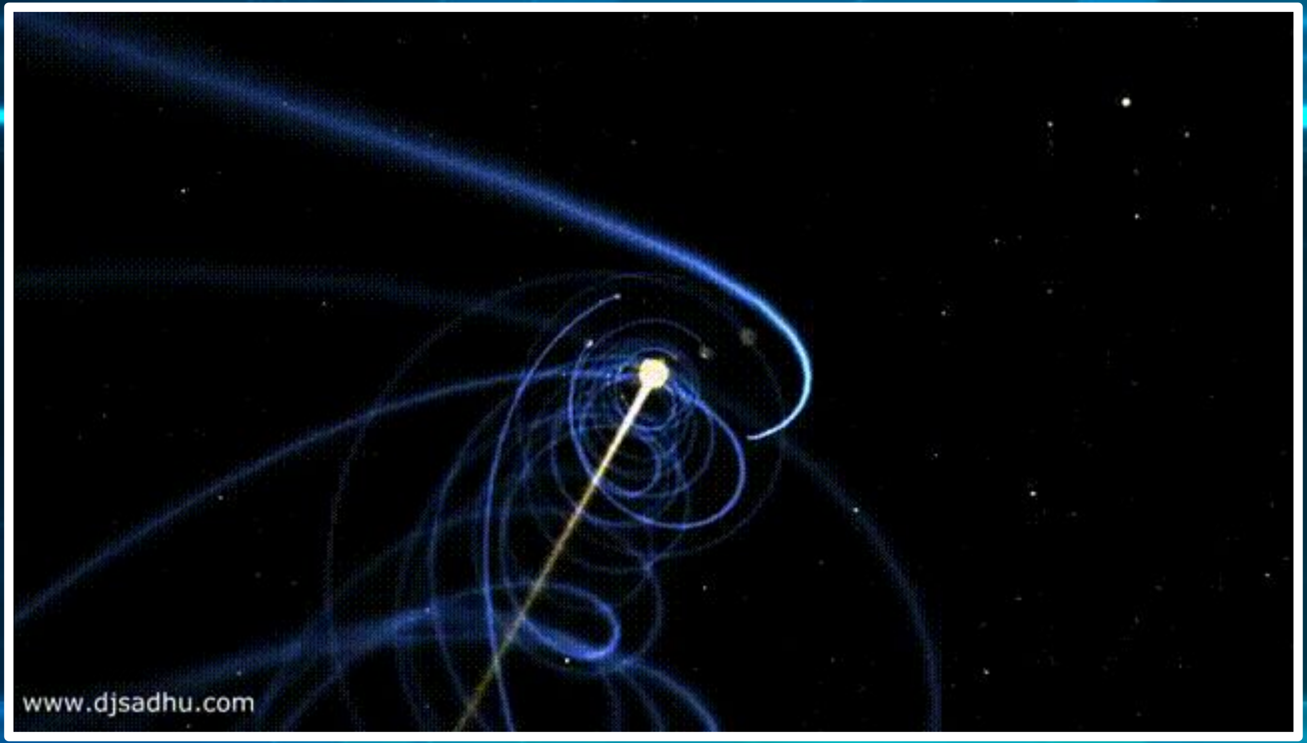
Путь – длина траектории



Перемещение − вектор, проведенный из начальной в конечную точку движения



В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движения точки



В общем случае траектория точки представляет собой пространственную кривую

Скорость

Для характеристики направления и быстроты движения в механике вводится векторная физическая величина, называемая скоростью

Средней скоростью точки в промежутке времени от t до t +Δt называется вектор <$\vec{\upsilon}$>, равный отношению приращения $\Delta\vec{r}$ радиуса-вектора точки за этот промежуток времени к его продолжительности Δt

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Знак равенства соответствует движению точки в течении времени от t до t + Δt вдоль прямолинейной траектории в одном и том же направлении

***Средней скорость* направлена так же, как вектор перемещения $\Delta\vec{r}$.**

Так как $|\Delta\vec{r}| \leq \Delta S$, где ΔS – длина пути точки за рассматриваемый промежуток времени, то

$$|\langle\vec{\upsilon}\rangle| \leq \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

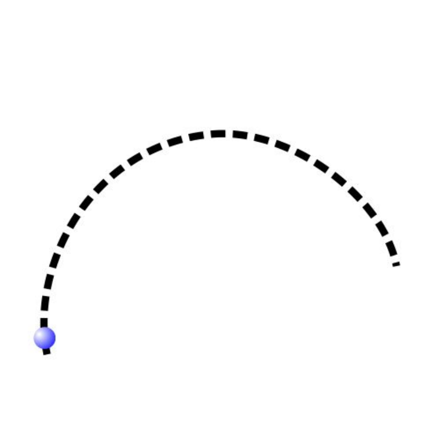
Вектор скорости можно разложить по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ т.е. на три составляющие (проекции скорости – υ_x, υ_y, υ_z) на по осям прямоугольной декартовой системы координат

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$$

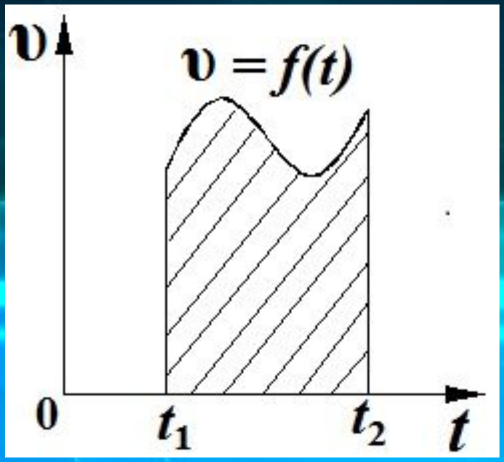
Мгновенная линейная скорость – **физическая величина равная пределу, к которому стремится отношение элементарного перемещения $\Delta\vec{r}$ за промежутку времени Δt в течение которого совершается это перемещение, при $\Delta t \to 0$.**

$$\langle\vec{v}\rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



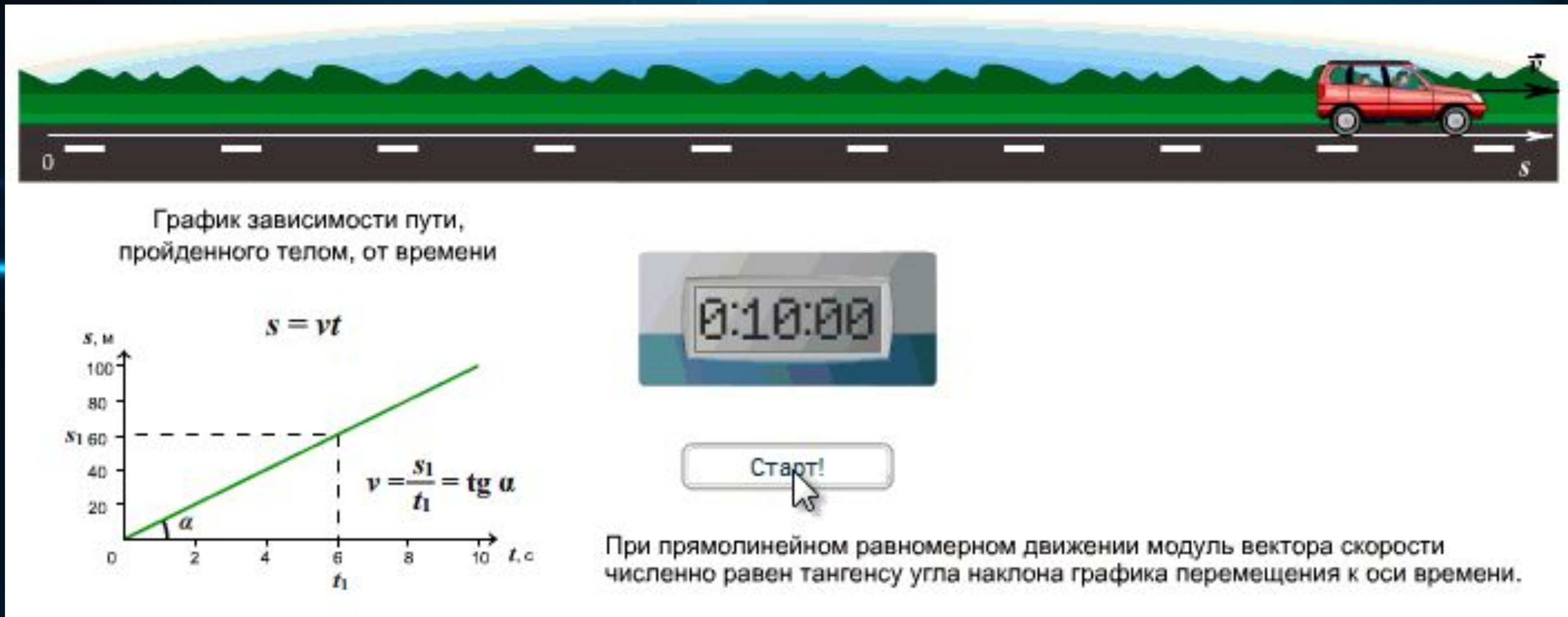
Мгновенная скорость – векторная величина, имеющая тоже направление, что и касательная к траектории в сторону движения точки

Величину пройденного точкой пути можно представить графически площадью фигуры ограниченной кривой $\upsilon = f(t)$ прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$ и осью времени на графике скорости.



Прямолинейное равномерное движение

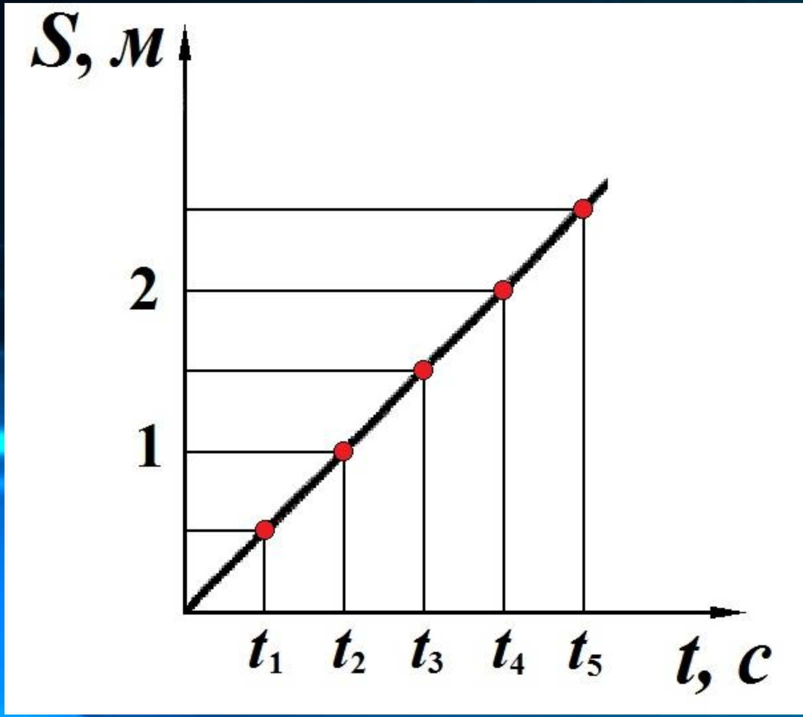
Прямолинейным равномерным движением называется движение при котором материальная точка, двигаясь по прямой, за любые равные промежутки времени проходит одинаковый путь

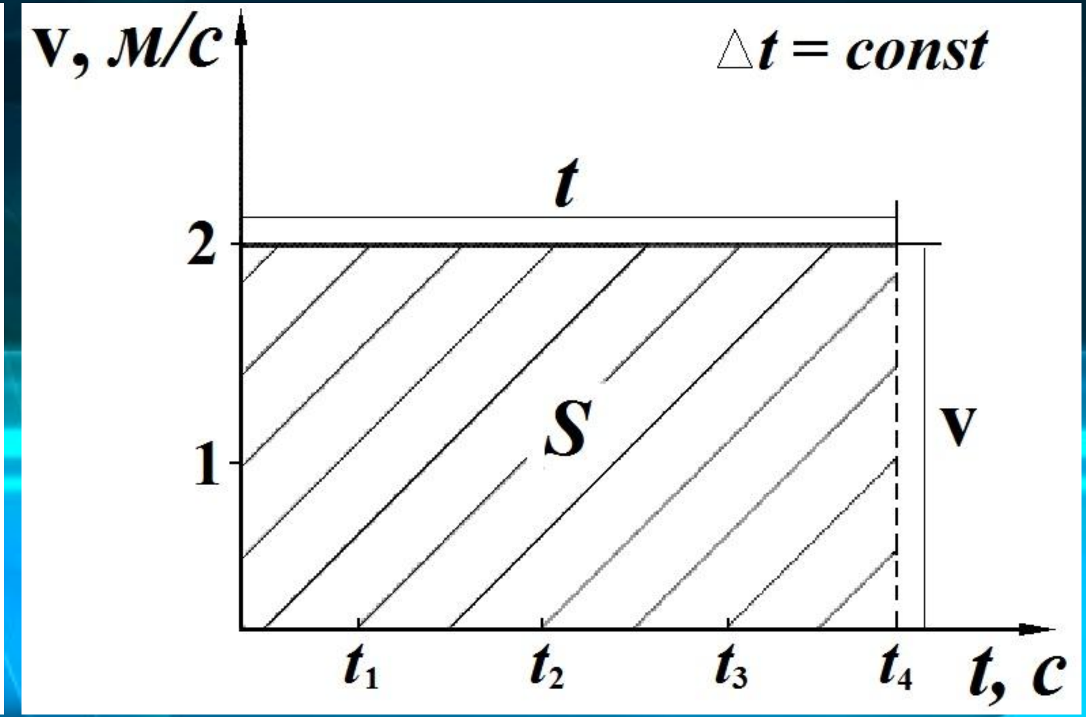


0
s
График зависимости пути,
пройденного телом, от времени
s = vt
s, м
100
80
s1 60
40
20
0
2
4
6
8
10
t, с
t1
α
v = s1/t1 = tg α
0:10:00
Старт!
При прямолинейном равномерном движении модуль вектора скорости численно равен тангенсу угла наклона графика перемещения к оси времени.

При равномерном движением точки остается постоянным модуль ее скорости, а путь, пройденный точкой за промежуток времени от t до $t + \Delta t$

$$\Delta S = v \cdot \Delta t$$





Ускорение

Быстроту изменения скорости характеризует ускорение. Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ тело имеет начальную скорость $\vec{v}_0$, а через некоторое время t его скорость равна $\vec{v}$, то вектор ускорения $\vec{a}$ прямолинейного равнопеременного движения можно определить по формуле

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v_0}}{t}$$

Равнопеременным называется такое движение тела, при котором ускорение постоянно, т.е. $a = const$

При движении точки мгновенная скорость может меняться как по величине, так и по направлению.

Вектор $\Delta\upsilon/\Delta t$, при $\Delta t \to 0$ стремится к некоторому пределу, называемому линейным ускорением

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta \upsilon}}{\Delta t}$$

Разложение вектора ускорения по базису и проекциям на оси координат a_x, a_y, a_z

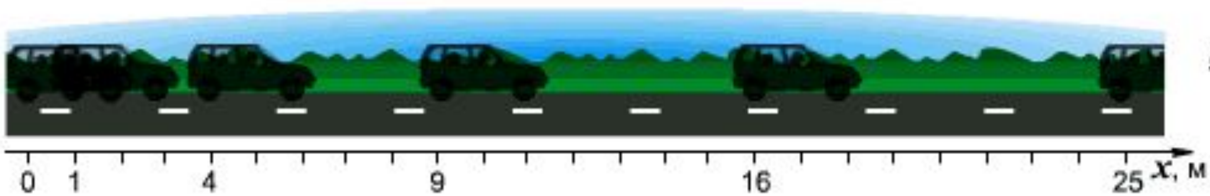
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

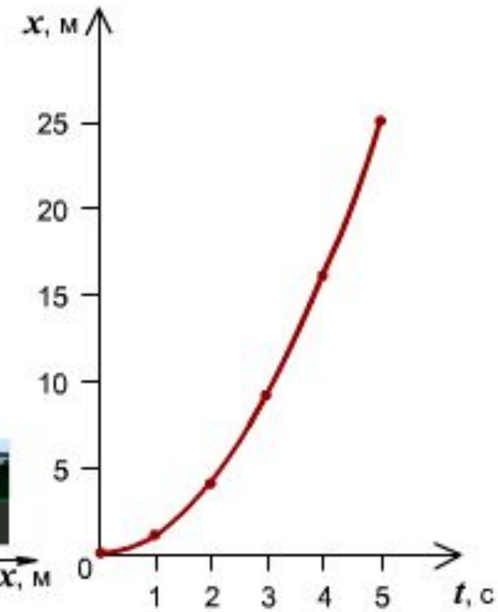
Ускорение точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$s_x = x - x_0$$

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \longrightarrow x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$





Прямолинейное равнопеременное движение

Движение материальной точки, при котором ее скорость за любые промежутки времени увеличивается или уменьшается на одну и ту же величину, называется **равнопеременным**.

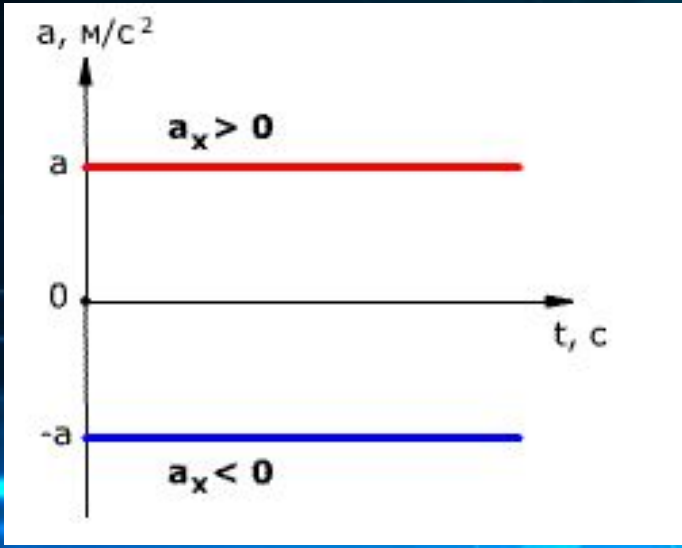
Если скорость за любые одинаковые промежутки времени увеличивается на одну и ту же величину, то такое движение называется **равноускоренным**.

Если скорость за любые одинаковые промежутки времени уменьшается на одну и ту же величину, то такое движение называется **равнозамедленным**.

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v_0}}{t}$$

$$\vec{a}t = \vec{v} - \vec{v_0}$$

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t$$



при равнопеременном движении ускорение является постоянным (a = const), график ускорения – это прямая, параллельная оси 0t

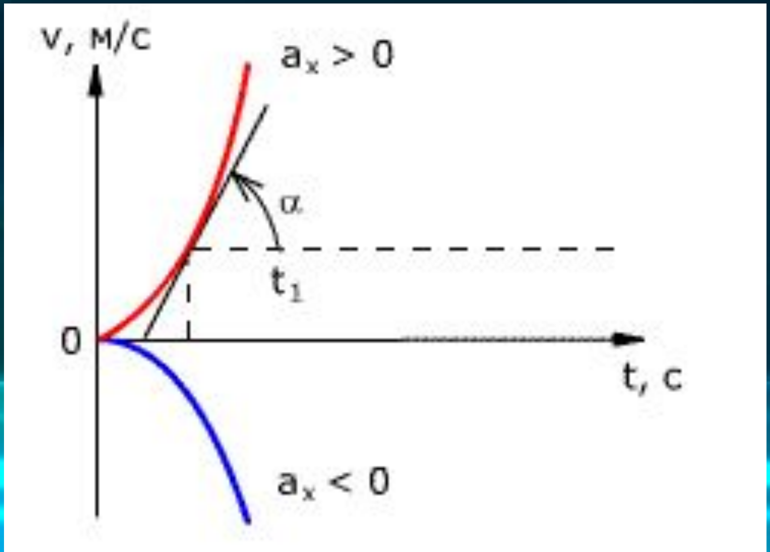


График зависимости перемещения от времени при $v_0 = 0$

Перемещение численно равно площади фигуры 0abc

Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин её оснований на высоту. Основания трапеции 0abc численно равны: 0a = v_0 и bc = v. Высота трапеции равна t. Таким образом, площадь трапеции, а значит, и проекция перемещения на ось ОХ равна:

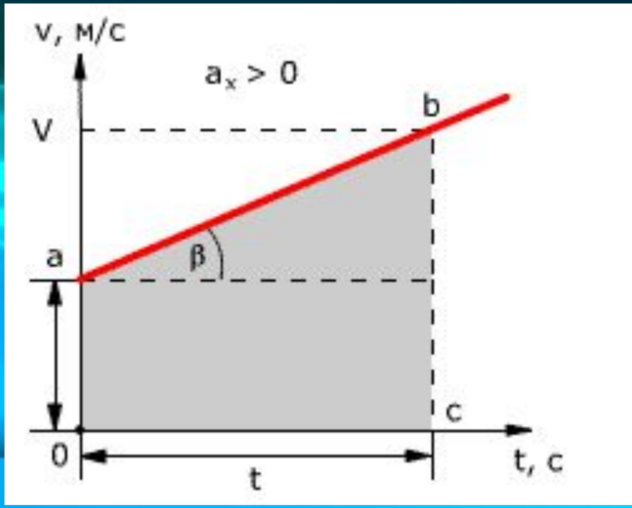
$$S_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t$$

$$S_x = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} t$$

$$S_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$S_x = v_{0x} t - \frac{a_x t^2}{2}$$

$$\vec{r} = \vec{v_0} t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$



Так как положение материальной точки (тела) в любой момент времени определяется суммой начальных координат и проекции перемещения, то уравнение движения тела будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

Существует несколько удобных соотношений, описывающих движение тела с постоянным ускорением. Пусть составляющая скорости в направлении этого ускорения будет υ_0 в начальный момент времени равный 0, а в момент времени t – υ. Пусть тело за это время пройдет в указанном направлении путь S . Тогда

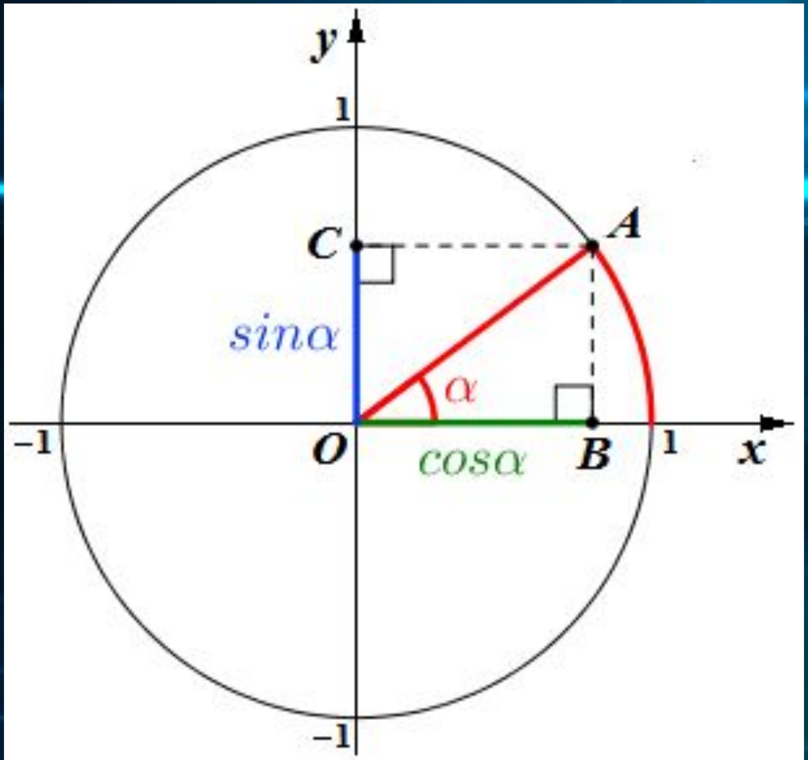
$$S = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \upsilon_0 t + \frac{(\upsilon - \upsilon_0)t^2}{2t} =$$

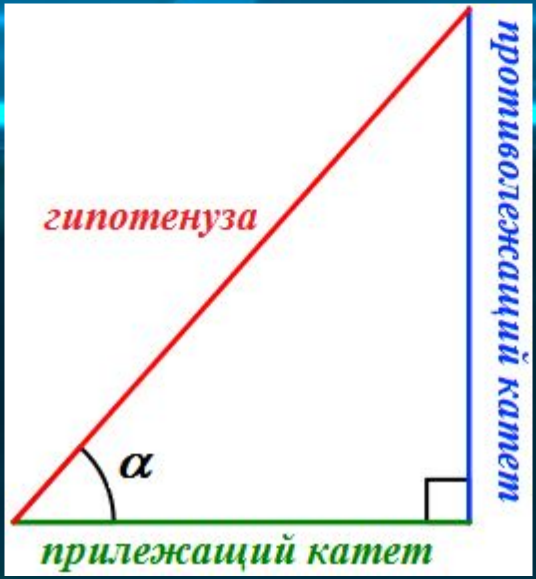
$$= \upsilon_0 t + \frac{\upsilon t}{2} - \frac{\upsilon_0 t}{2} = \frac{\upsilon_0 t}{2} + \frac{\upsilon t}{2} = \frac{(\upsilon_0 + \upsilon)t}{2}$$

$$\upsilon^2 = (\upsilon_0 + at)^2 = \upsilon_0^2 + 2\upsilon_0 at + (at)^2 =$$

$$= \upsilon_0^2 + 2a\left(\upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}\right) = \upsilon_0^2 + 2aS$$

Тригонометрический круг *– это окружность единичного радиуса с центром в начале координат*



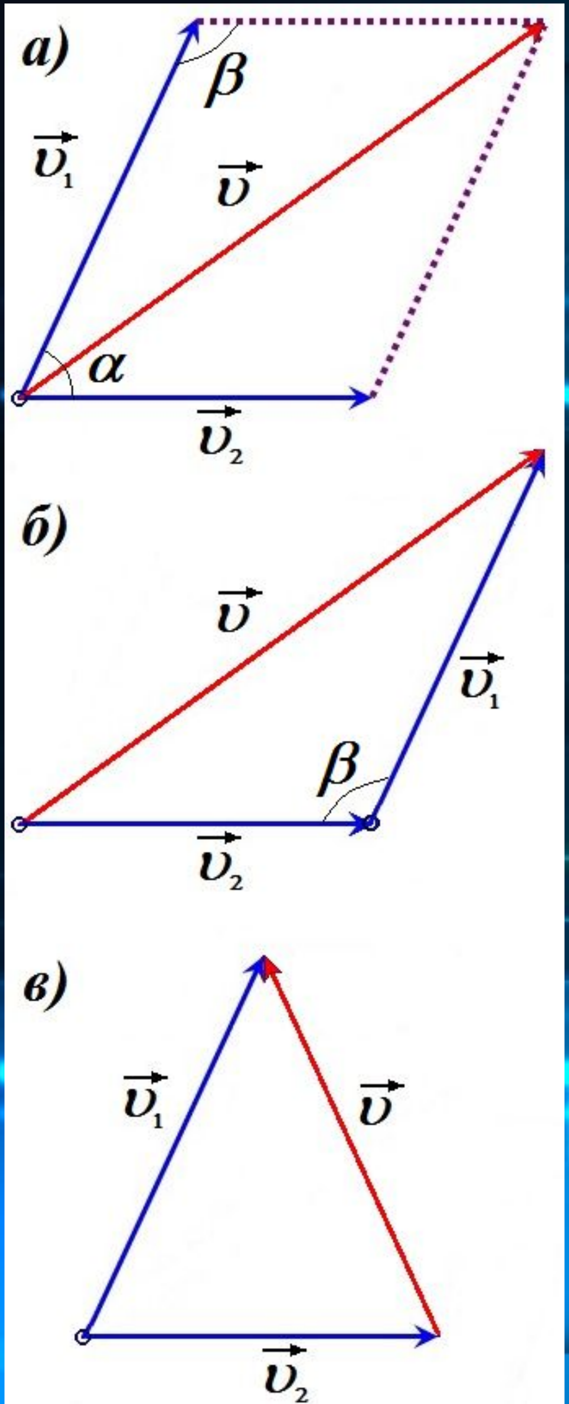


Синус угла *– отношение противолежащего катета к гипотенузе:*

$$\sin \alpha = AB/OA = OC/OA$$

Косинус угла *– отношение прилежащего катета к гипотенузе:*

$$\cos \alpha = OB/OA = AC/OA$$



Некоторые математические операции над векторами

Пусть $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ – два вектора, приложенные к одной точке тела под некоторым углом α, тогда результирующий вектор будет

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$$

Правило параллелограмма *состоит в том, что результирующий вектор изображается по модулю и направлению диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах как на сторонах.*

Правило треуголиника:

- *сложение двух векторов – если из конца вектора $\vec{\upsilon}_1$ отложить вектор $\vec{\upsilon}_2$ и соединить начало вектора $\vec{\upsilon}_1$ с концом вектора $\vec{\upsilon}_2$, то получиться результирующий вектор;*
- *разность двух векторов – совмещают начала уменьшаемого $\vec{\upsilon}_1$ и вычитаемого $\vec{\upsilon}_2$ векторов, результирующий вектор $\vec{\upsilon}$ проводят от конца $\vec{\upsilon}_2$ к концу $\vec{\upsilon}_1$*

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2$$

Скалярное произведение двух векторов, например векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, называется скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов, умноженному на косинус угла между ними:

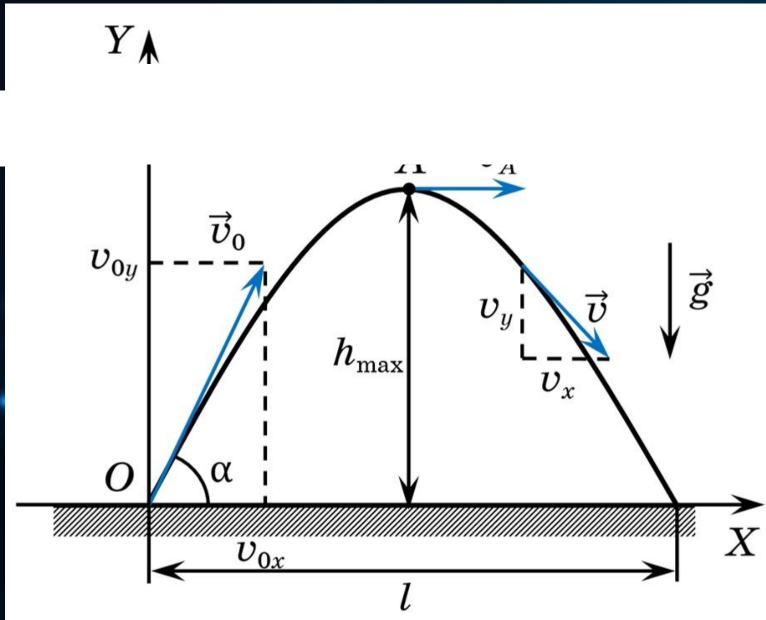
$$\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \rightarrow a \cdot b \cdot \cos\alpha$$

Скалярное произведение – алгебраическая величина. Ее знак зависит от угла между векторами-множителями. Если угол α острый, то скалярное произведение положительно, если угол тупой – отрицательно.

Векторное произведение двух векторов

$$\vec{d} = [\,\vec{a}\ \vec{b}\,] = [\vec{a} \times \vec{b}] \rightarrow a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

Направление результирующего вектора находят по правилу буравчика. Если рукоятку буравчика поворачивать по наикратчайшему пути в направлении от вектора указанного первым в векторном произведении, ко второму вектору, то направление поступательного движения острия буравчика укажет направление векторного произведения



По горизонтали (вдоль оси X)

- *начальное положение* $x_0 = 0$,
- *начальная скорость*

$$v_x = v_{0x} = const = v_0 \cdot \cos\alpha,$$

- *ускорение* $a_x = 0$,
- *закон движения* $x = v_0 t \cdot \cos\alpha$

По вертикали (вдоль оси Y)

- *начальное положение* $y_0 = 0$,
- *начальная скорость* $v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - gt$,
- *ускорение* $a_y = -g$,
- *закон движения* $y = v_0 t \cdot \sin\alpha - gt^2/2$

При достижении максимальной высоты подъема – y составляющая скорости тела обращается в нуль

$$0 = v_0 \cdot \sin\alpha - gt,$$

откуда время подъема тела

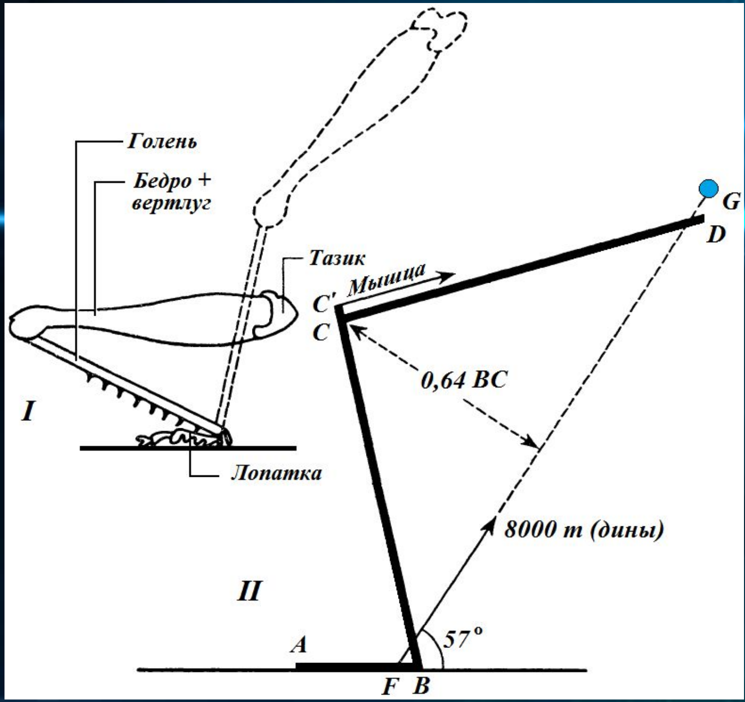
$$t = v_0 \cdot \sin\alpha / g$$

Верхняя точка подъема – максимальная высота

$$y = h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

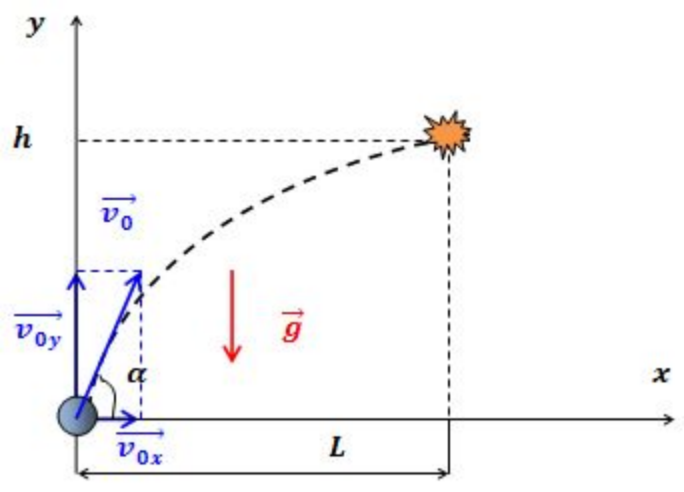
Прыжок саранчи



$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$80 = \frac{v_0^2}{g}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2aS$$



$$340^2 = 2a \cdot 4$$

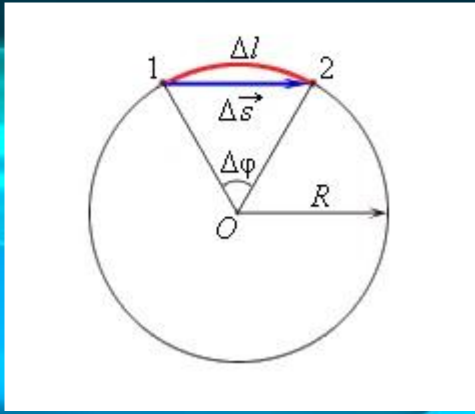
$$a = 14500 \frac{см}{с^2}$$


A
B

Криволинейное движение. Движение по окружности.

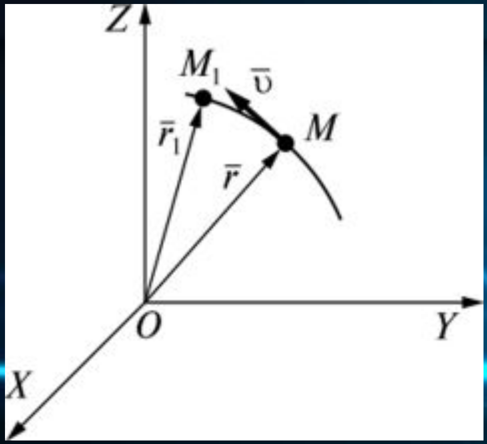
Движение по окружности – простейший случай криволинейного движения тела. Когда тело движется вокруг некоторой точки, наряду с вектором перемещения удобно ввести угловое перемещение $\Delta\vec{\varphi}$ (угол поворота относительно центра окружности), измеряемое в радианах.

Зная угловое перемещение, можно вычислить длину дуги окружности (путь), которую прошло тело.

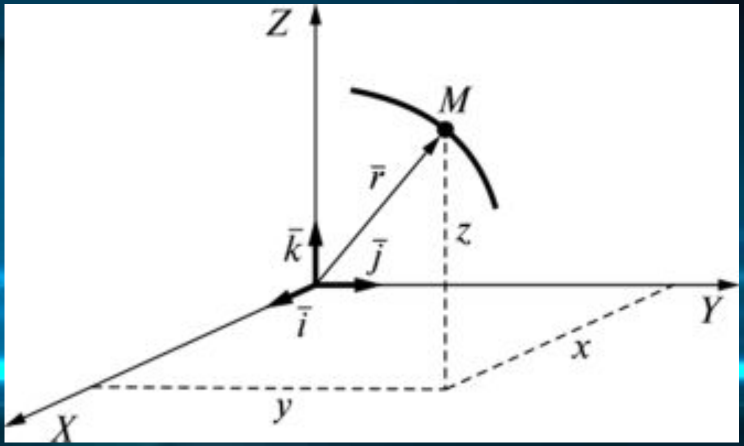


$$\Delta l = R\Delta\varphi$$

Если угол поворота мал, то $\Delta l \approx \Delta s$.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Движение точки по траектории может быть:

- *ускоренным, если модуль скорости возрастает с течением времени;*
- *равноускоренным, если* $\Delta\upsilon/\Delta t = const > 0$;
- *замедленным, если модуль скорости при движении точки уменьшается;*
- *равнозамедленным при* $\Delta\upsilon/\Delta t = const < 0$;
- *равномерным при* $\Delta\upsilon/\Delta t = 0$.

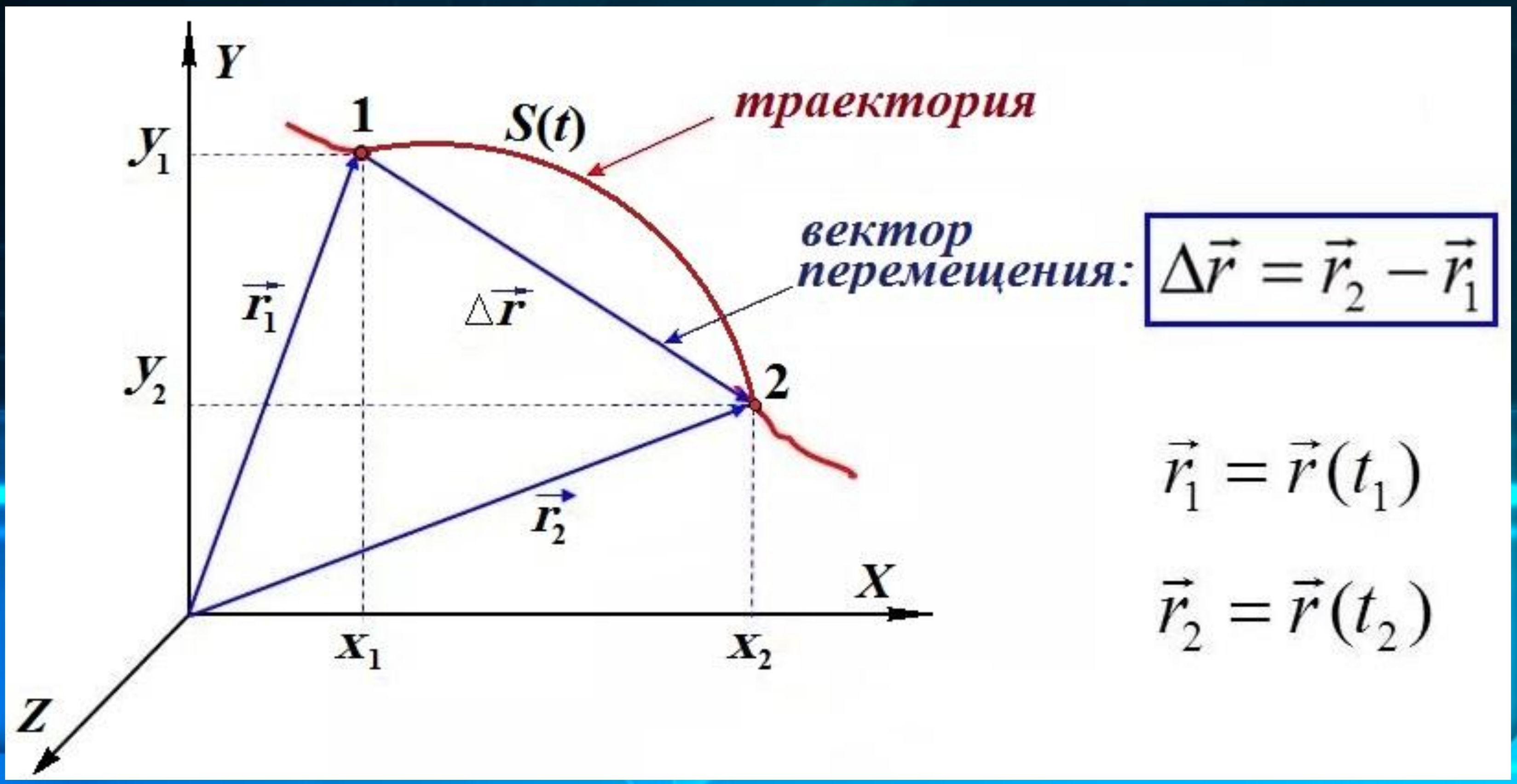
Движение точки задается векторным, координатным и естественным способом.

При векторном способе движение точки задается законом изменения радиуса-вектора во времени

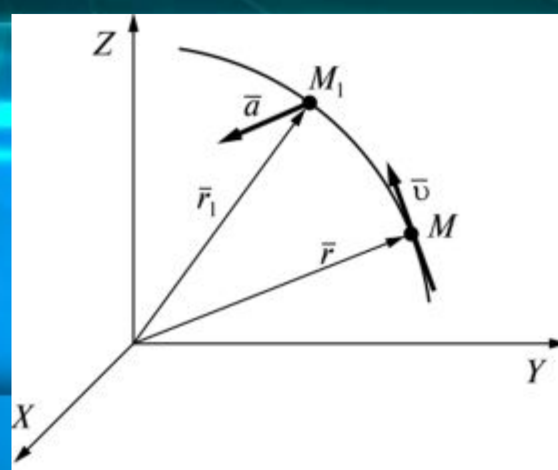
При координатном способе движение точки задается координатами как функциями времени

При естественном способе известны начало отсчета на траектории, направление движения и закон движения точки вдоль траектории

Вектором перемещения точки за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$ называется приращение радиуса вектора $\vec{r}$ этой точки за рассматриваемый промежуток времени

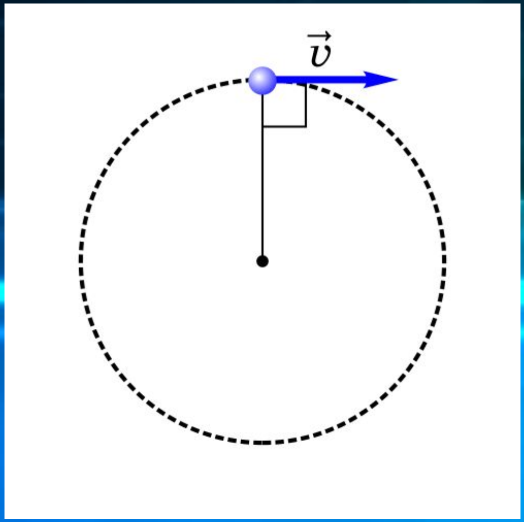


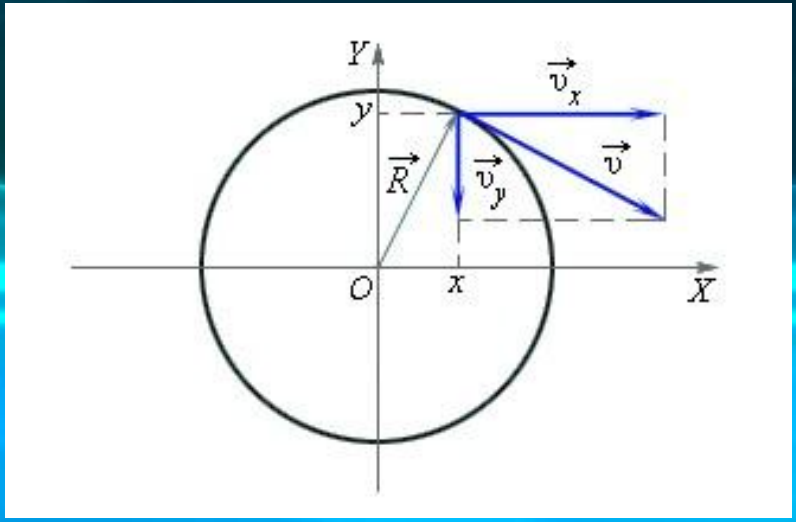
Линейной скоростью называется скорость, с которой точка движется по окружности.



Движение по окружности в плоскости можно описывать при помощи двух координат: x и y. В каждый момент времени скорость тела можно разложить на составляющие υ_x и υ_y.

Если движение равномерное, величины υ_x и υ_y а также соответствующие координаты будут изменяться во времени по гармоническому закону с периодом $T = 2\pi R / \upsilon = 2\pi/\omega$





Угловая скорость

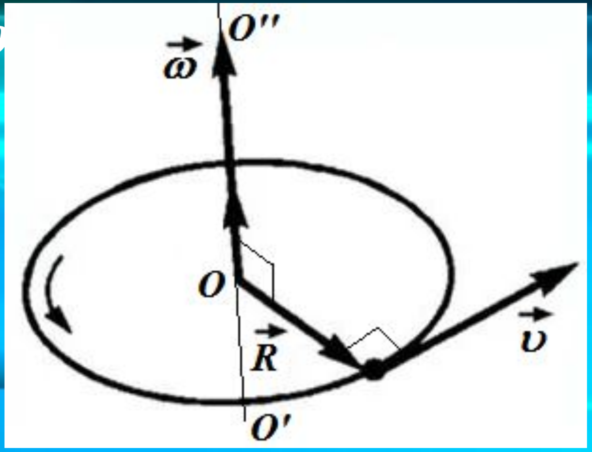
При криволинейном движении вводится понятие угловой скорости $\vec{\omega}$, то есть скорости изменения угла поворота.

Угловая скорость в данной точке траектории – предел отношения углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$ к промежутку времени Δt, за которое оно произошло, при $\Delta t \to 0$.

$$\vec{\omega} = \Delta\vec{\varphi}/\Delta t$$

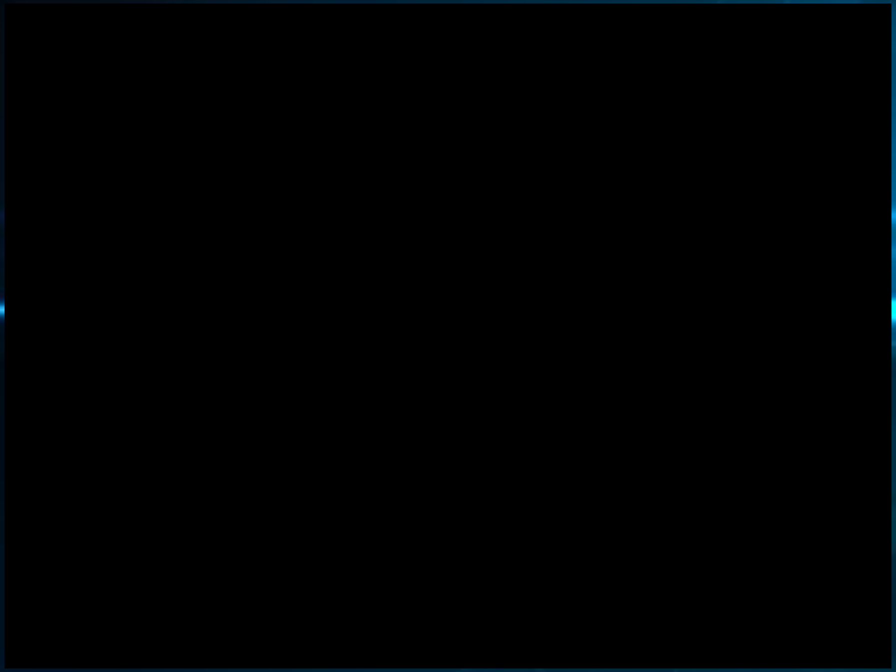
Единица измерения угловой скорости – радиан в секунду (рад/с).

Существует связь между угловой и линейной скоростями при движении по окружности.



Формула для нахождения угловой скорости:

$$\vec{\upsilon} = [\,\vec{\omega}\ \vec{r}\,] \longrightarrow \upsilon = \omega R \sin\alpha = \omega R$$



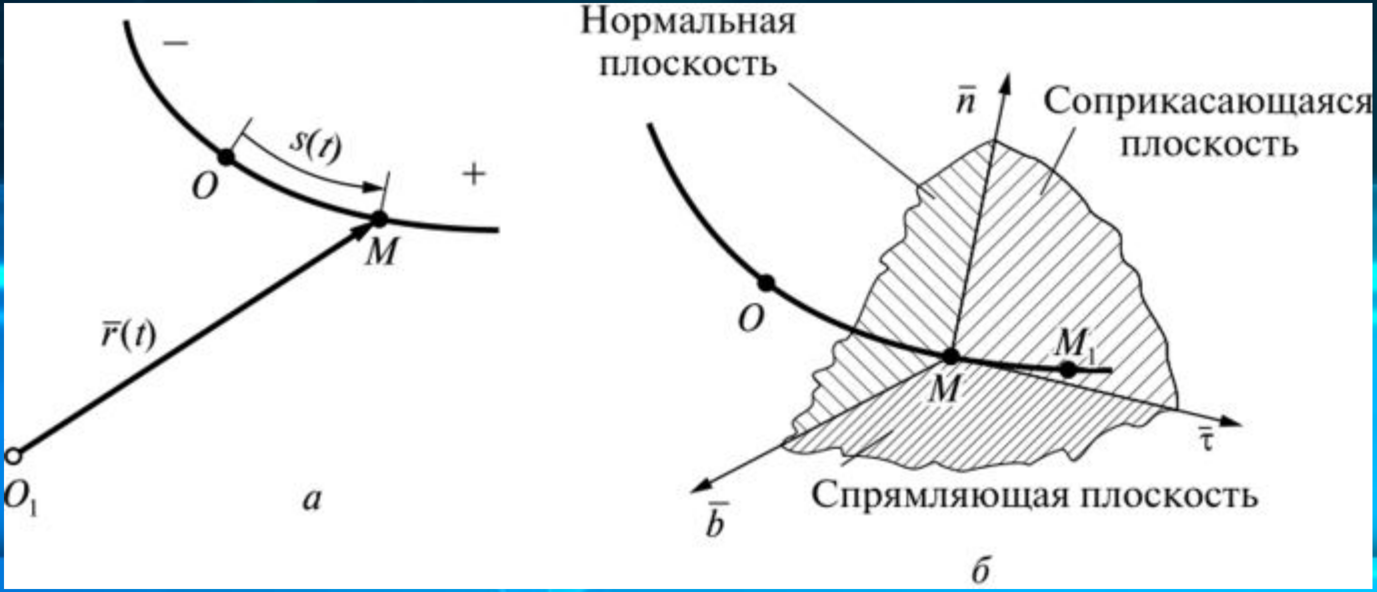
Промежуток времени в течении которого материальная точка (тело), равномерно вращаясь с угловой скоростью $\vec{\omega}$ ***совершает один оборот, т.е. поворачивается на угол φ = 2π, называется периодом T***

Частота вращения показывает, сколько оборотов совершает за единицу времени материальная точка (тело), равномерно вращающееся с угловой скоростью $\vec{\omega}$

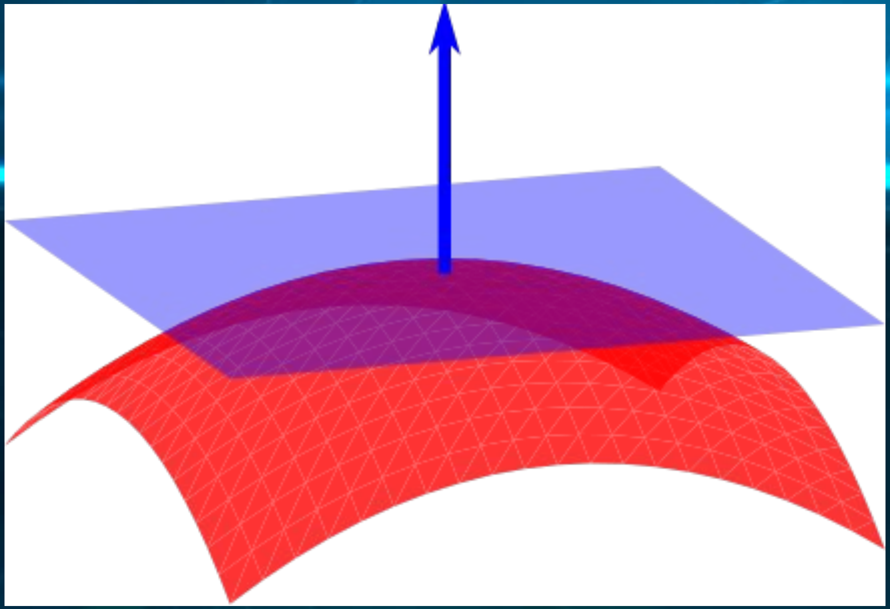
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

В общем случае траектория точки – пространственная кривая, а ускорение $\vec{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости.

Плоскость, проходящую через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называют соприкасающейся плоскостью



Нормаль – прямая, перпендикулярная касательной прямой к кривой, касательной плоскости к поверхности



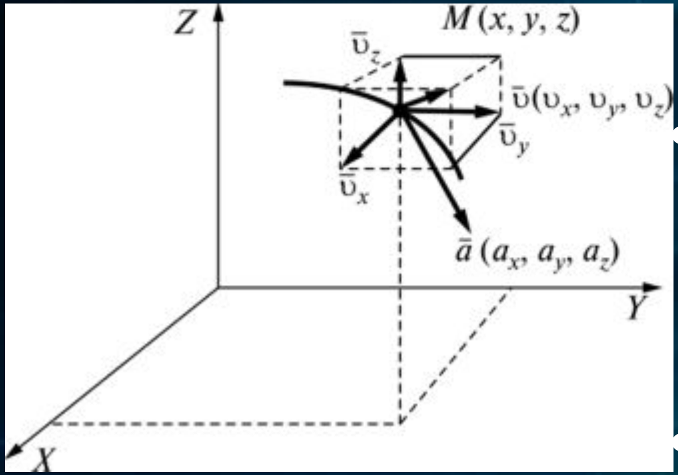
Вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности в данной точке – единичный вектор, приложенный к данной точке и параллельный направлению нормали. Для каждой точки гладкой поверхности можно задать два нормальных вектора, отличающихся направлением.

Координатный способ задания движения точки

При координатном способе находим:

- ***разложение вектора скорости на координатные оси***

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}$$



- ***скорость точки***

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$$

- ***Разложение вектора ускорения на оси координат***

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

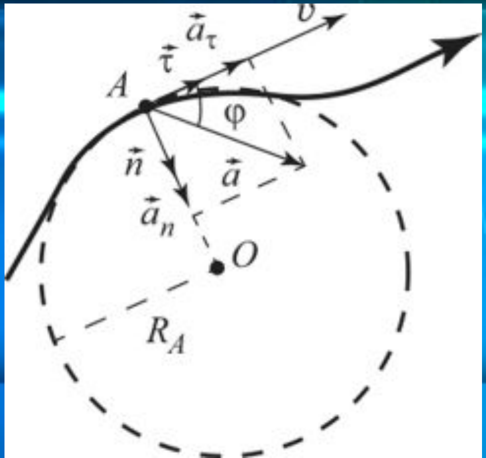
- ***ускорение точки***

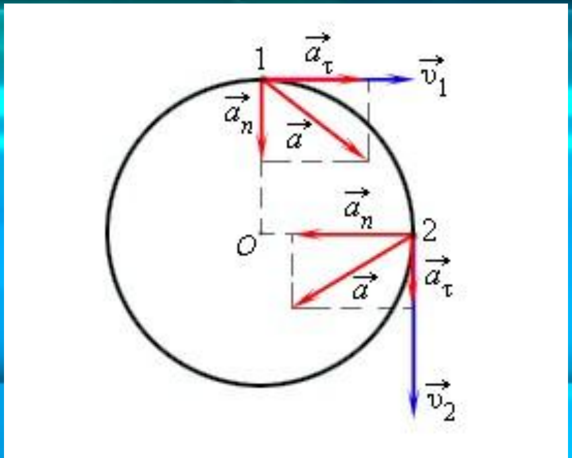
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

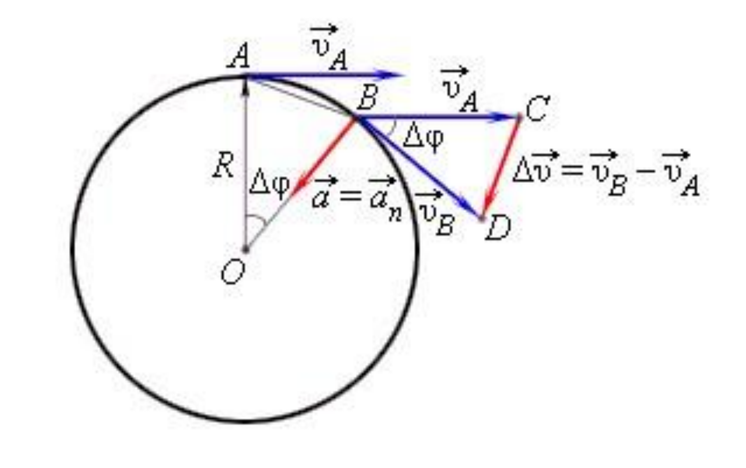
τ
τ

В общем случае ускорение не совпадает по направлению с вектором скорости. Вектор ускорения а может быть представлен в виде 2-х взаимно перпендикулярных векторов:

- ***$\vec{a}_n$ – нормального ускорения,***
- ***$\vec{a}_\tau$ – тангенциального ускорения направленного вдоль касательной к траектории движения (τ – единичный вектор, направленный по линейной скорости движения)***







$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$

$$\vec{a}=a_n\vec{n}+a_\tau\vec{\tau}$$

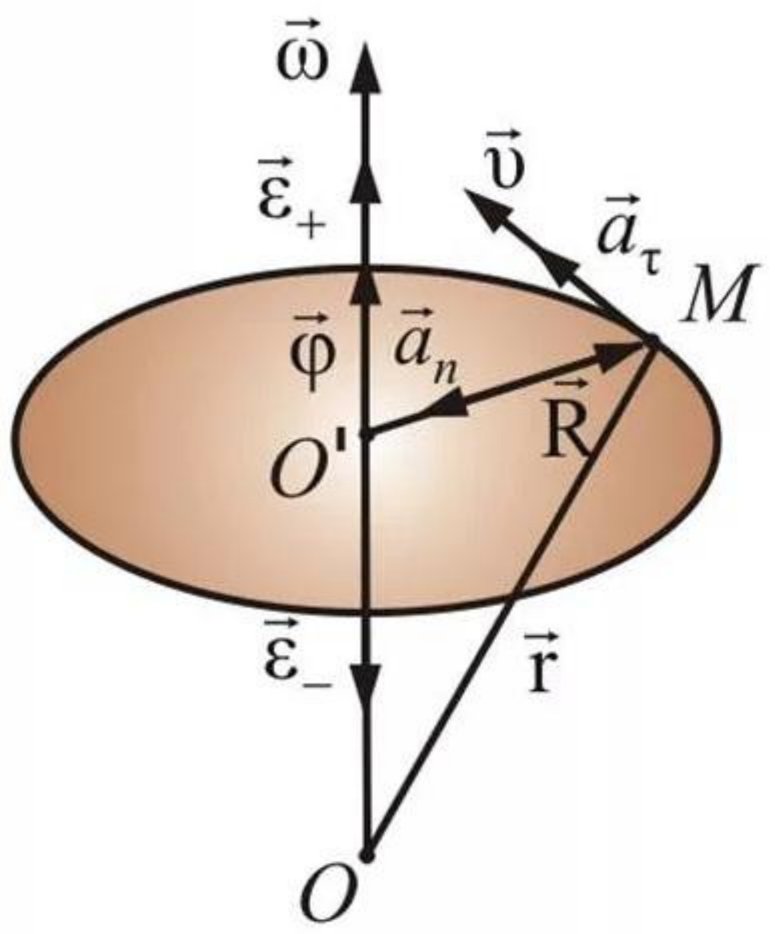
$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$$

$$a_n=\frac{\upsilon^2}{r}$$

$$a_\tau=\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$$

$$a_n=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{\omega^2R^2}{R}=\omega^2R$$

$$\vec{\varepsilon}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$



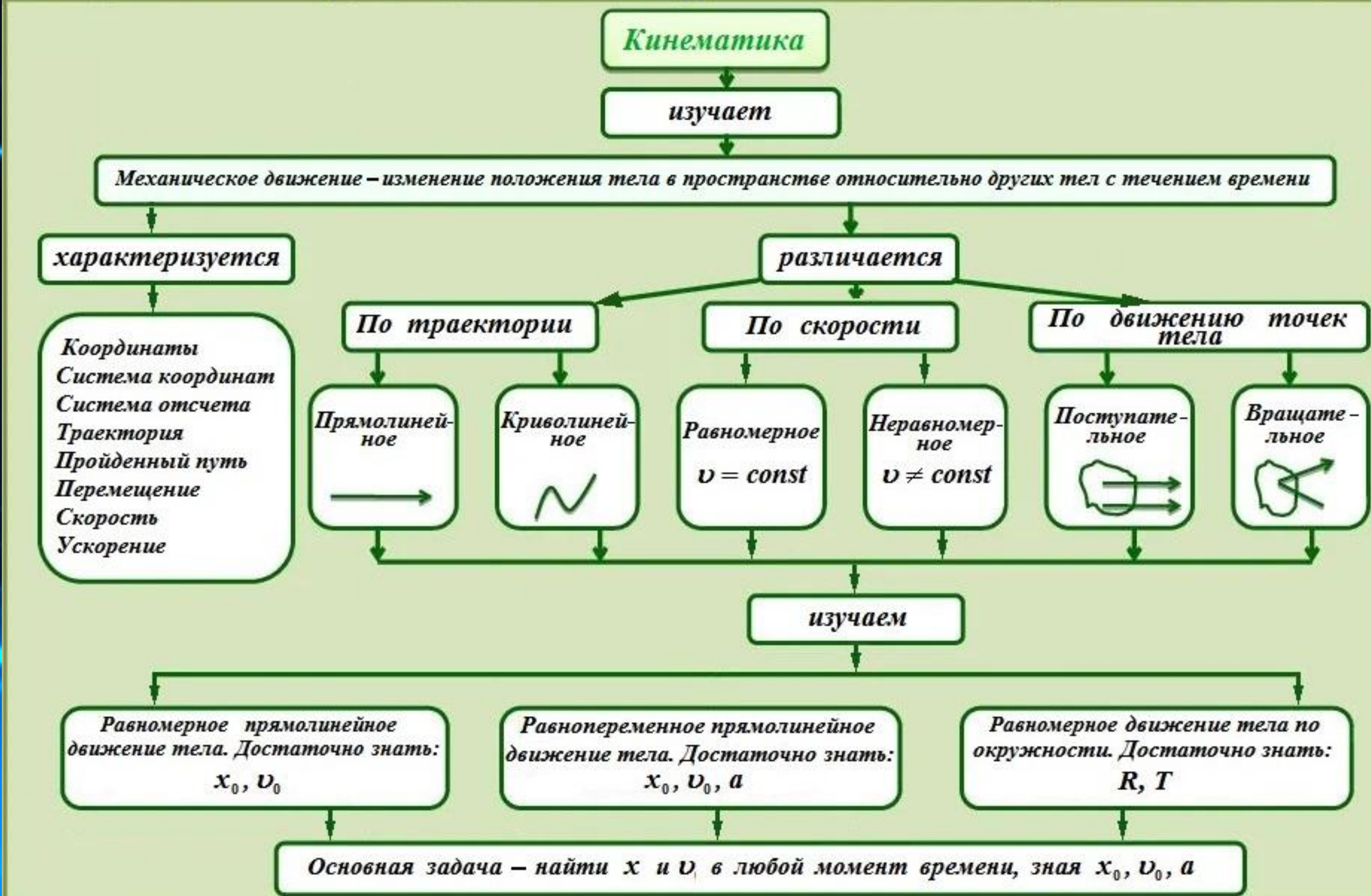
$$a_\tau=\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}=\frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t}=R\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=R\varepsilon$$

$$\varepsilon=const$$

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t$$

$$\varphi=\omega_0t+\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Равномерное прямолинейное движение | Равноускоренное прямолинейное движение | Свободное падение тела | Равномерное движение по окружности



Равномерное прямолинейное движение	Равноускоренное прямолинейное движение	Свободное падение тела	Равномерное движение по окружности

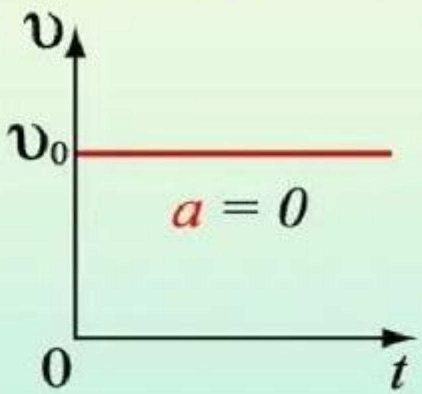
Прямолинейное движение

Равномерное движение

$\vec{\upsilon} = \text{const}$

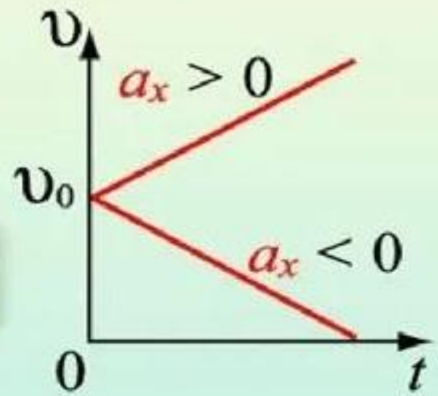
Равнопеременное движение

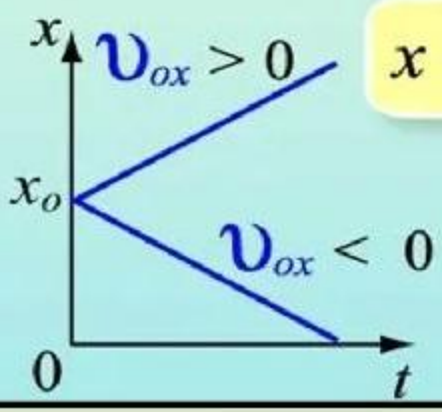
$\vec{a} = \text{const}$



$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0$$

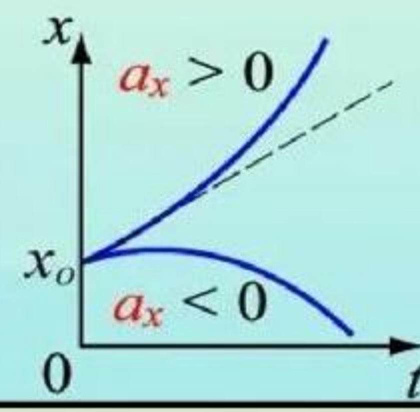
$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$$





$$x = x_o + \upsilon_{ox} t$$

$$x = x_o + \upsilon_{ox} t + \frac{a_x t^2}{2}$$



Равномерное прямолинейное движение	Равноускоренное прямолинейное движение	Свободное падение тела	Равномерное движение по окружности
$s = vt$	$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$y = y_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$	$a = \frac{v^2}{r}$ $v = \frac{2\pi r}{T}$
$x = x_0 + vt$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$y = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$	$v = \omega r$
$x = x_0 - vt$	$x = x_0 - v_0 t - \frac{at^2}{2}$	$v = v_0 + gt$	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$
$v = const$	$v = v_0 + at$	$v = v_0 - gt$	$\omega = \frac{\varphi}{t}$ $\varphi = \frac{s}{r}$
$a = 0$	$v = v_0 - at$	$g = 9{,}8\,м/с^2$	$T = \frac{t}{N}$ $\nu = \frac{N}{t}$
	$a = const$	$v_0 = 0$	$T = \frac{1}{\nu}$ $\nu = \frac{1}{T}$
		$L = vt$	
		$H = \frac{gt^2}{2}$	

Точка движется по оси Ох по закону

$$x = 5 + 4t - 2t^2 \text{ (м).}$$

Определить координату, в которой скорость точки равна нулю.

1) 5 м;
2) 10 м;
3) –10 м;
4) 7 м.

Частица движется вдоль Ох по закону

$$x = 5 + 3t + 2t^2,$$

где x – координата частицы в метрах; t – время в секундах. Определить модуль ускорения частицы.

1) 2 м/с^2;
2) 4 м/с^2;
3) 1 м/с^2;
4) 5 м/с^2.

Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг максимальной высоты 4 м. Сколько времени прошло от броска до того момента, когда вектор его скорости стал направлен горизонтально?

1) *0,5 с;*
2) *0,6 с;*
3) *0,9 с;*
4) *1 с.*

Колесо велосипеда имеет радиус 40 см. С какой скоростью едет велосипедист, если колесо делает 100 об/мин?

1) *4,2 м/с;*
2) *2,1 м/с;*
3) *10,5 м/с;*
4) *6,28 м/с.*