Подстановки, оптимизация и решение дифференциальных уравнений (задача Коши)

Некоторые аспекты интегрирования, нахождения целевой функции и решения диф. уравнений в MathCad Maple, Mathematica

Подстановки

$$f(x) := \frac{1}{\cos(x)\cdot(1+\cos(x))} \qquad \tan(x) - t \text{ solve}, x \rightarrow \operatorname{atan}(t)$$

$$f(x) \text{ substitute}, x = \operatorname{atan}(t) \rightarrow \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}+1} \qquad x(t) := \operatorname{atan}(t) \qquad \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow \frac{1}{t^2+1}$$

$$\frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}+1}\cdot\frac{1}{t^2+1} \text{ simplify} \rightarrow \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{t^2} \qquad f1(t) := \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{t^2}$$

Вычисление интегралов с переменным верхним пределом

$$t(x) := \tan(x) \qquad t\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad t(0) = 0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + t1^2} + 1}\, dt1 \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t1^2 + 1} + 1}\, dt1 = 0.467$$

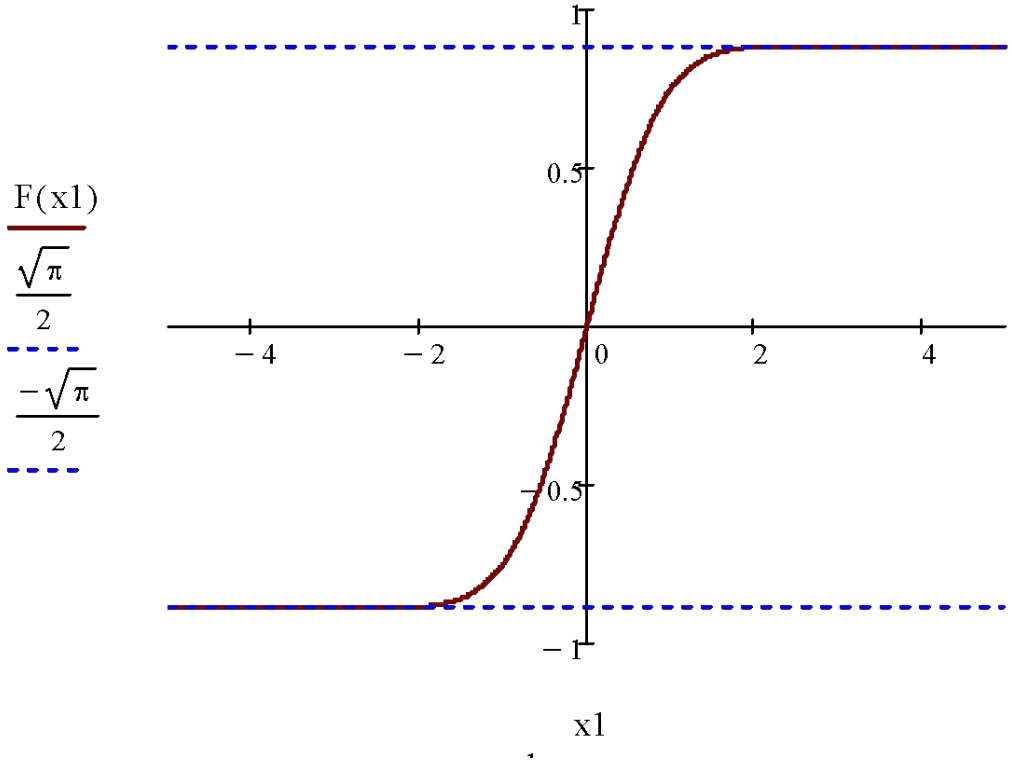
$$\int_0^{x1} \exp\left(-t^2\right) dt \rightarrow \frac{\sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(x1)}{2}$$

$$F(x1) := \int_0^{x1} \exp\left(-t^2\right) dt \qquad F(0) = 0 \qquad F(1) = 0.747 \qquad F(3) = 0.886$$

$$\frac{d}{dx1} F(x1) \rightarrow e^{-x1^2} \qquad \frac{d^2}{dx1^2} F(x1) \rightarrow -2 \cdot x1 \cdot e^{-x1^2}$$

$$\lim_{x1 \rightarrow \infty^+} F(x1) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \lim_{x1 \rightarrow -\infty} F(x1) \rightarrow -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

График функции вероятности



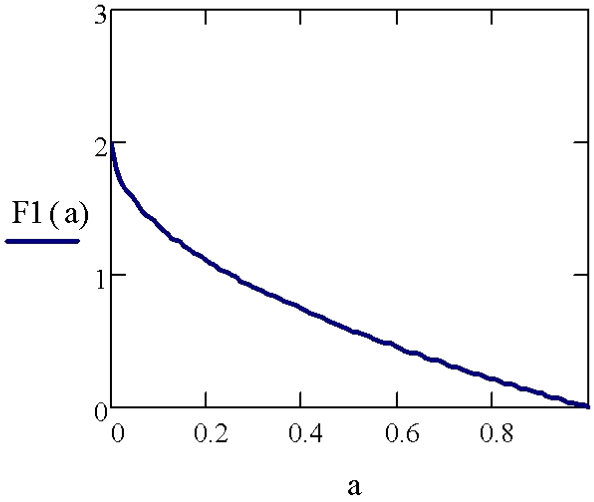
Пример интеграла с переменным пределом

$$f1(x2) := \frac{1}{\sqrt{x2}}$$

$$\int_0^1 f1(x2)\,dx2 \rightarrow 2$$

$$F1(a) := \int_a^1 f1(x2)\,dx2$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} F1(a) \rightarrow 2$$



Построение графиков и нахождение параметров уравнений заданных в параметрическом виде

$$\lambda := 0.8$$

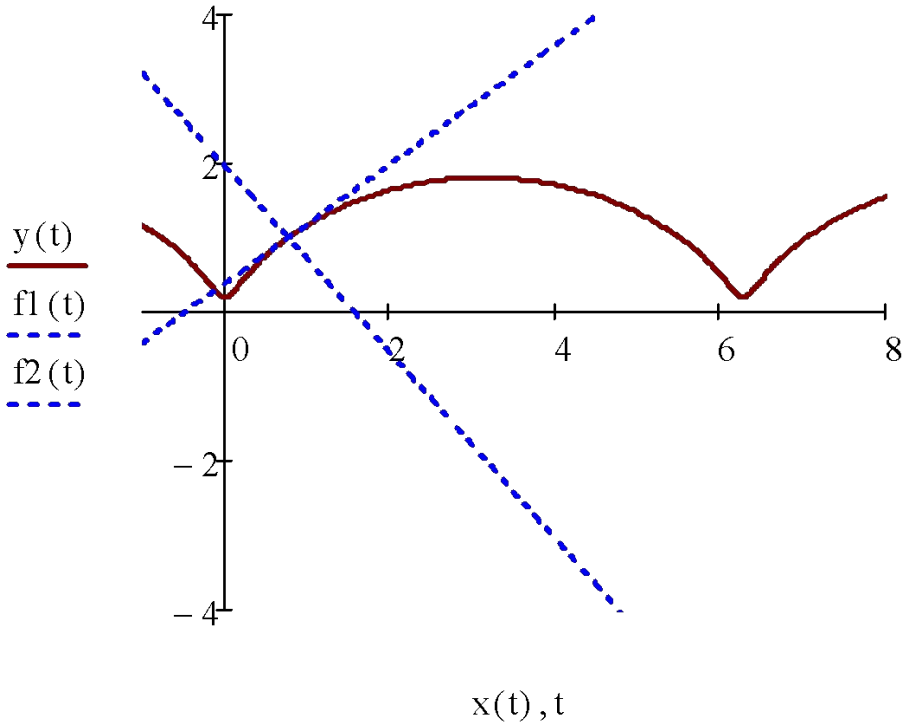
$$x(t) := t - \lambda \cdot \sin(t) \qquad y(t) := 1 - \lambda \cdot \cos(t)$$

$$\phi(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad \psi(t) := \frac{d}{dt}y(t) \qquad k(t) := \frac{\psi(t)}{\phi(t)}$$

$$x0 := x\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad y0 := y\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad f1(t) := k\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot(t - x0) + y0$$

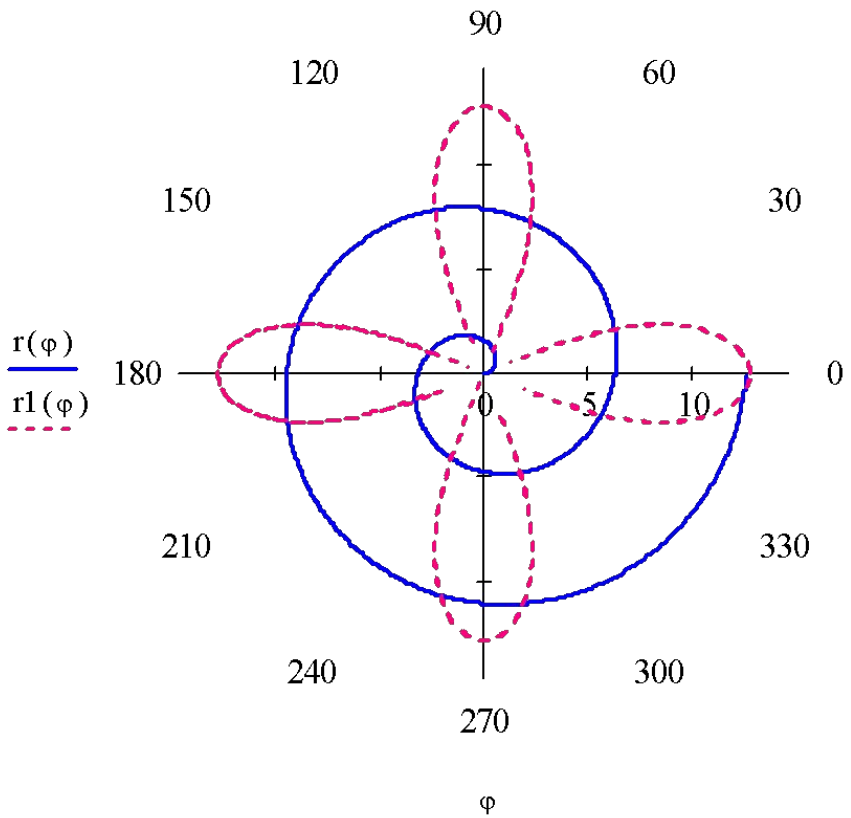
$$f2(t) := \frac{-1}{k\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cdot(t - x0) + y0$$

Графическое представление функций заданных в параметрическом виде



Графическое представление уравнений, заданных в полярных координатах

$a := 1 \qquad r(\varphi) := a\cdot\varphi \qquad \varphi := 0, 0.01 .. 4\cdot\pi \qquad r1(\varphi) := 9\cdot\sqrt{2\cdot\cos(4\varphi)}$



Оптимизация функций. Классическое решение

$$f(x,y) := 2\cdot(x-3.07)^2 + (y-10.03)^2 - 0.2(x-5.07)^3$$

$$x := 1$$

$$y := 1$$

Given

$$0 < x < 15$$

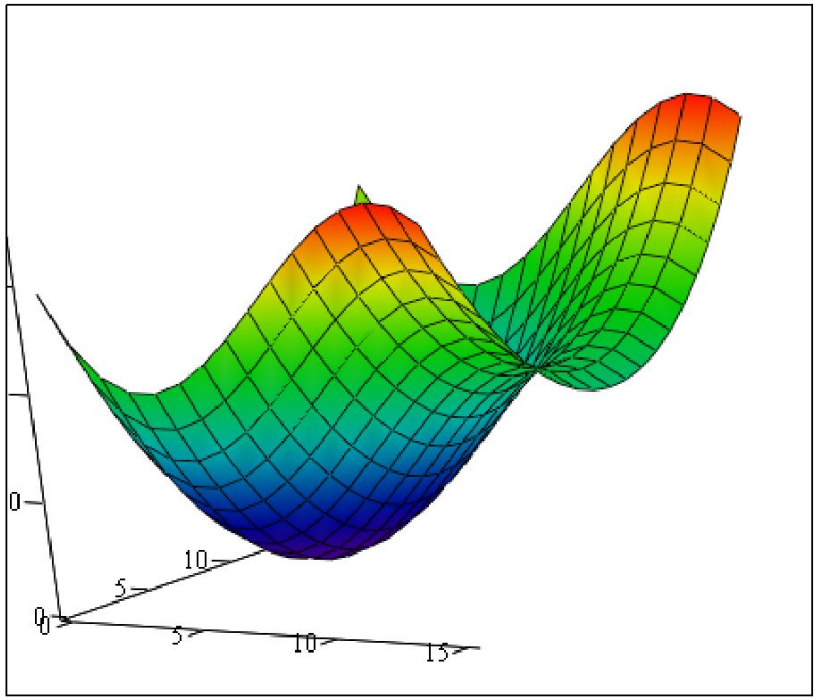
$$0 < y < 20$$

$$\text{Minimize}(f,x,y) = \begin{pmatrix} 3.459 \\ 10.03 \end{pmatrix}$$

График поверхности оптимизации

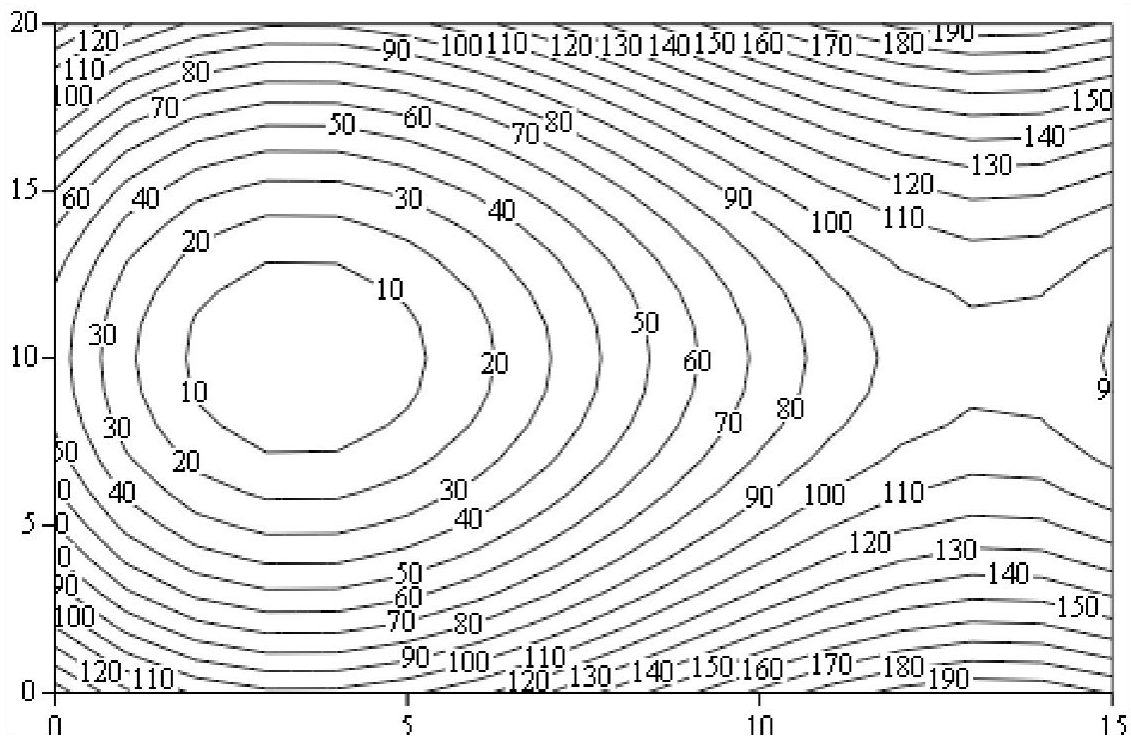
$x := 0 .. 15 \qquad y := 0 .. 20$

$D_{x,y} := f(x,y)$



D

Контурный график заданной функции оптимизации

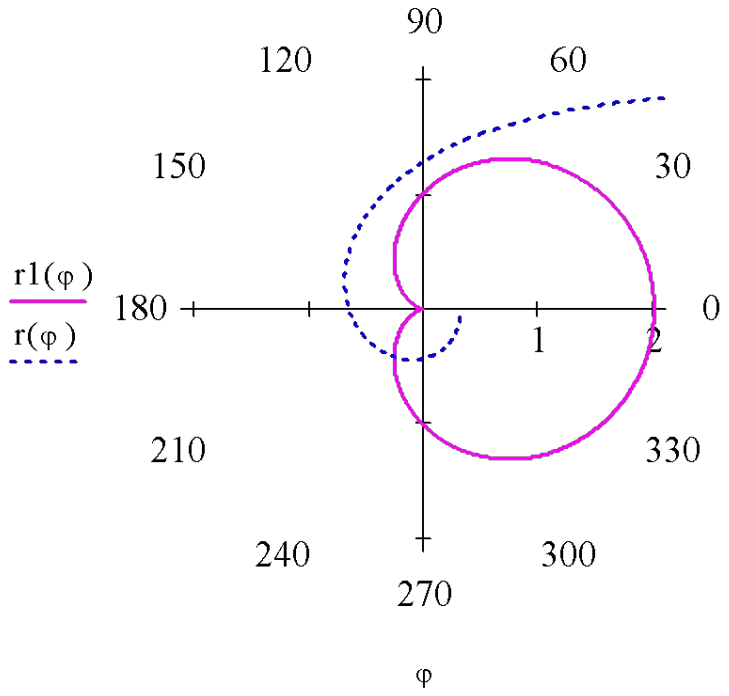


D

Построение графиков функций в полярных координатах

$a := 2.0$

$r(\varphi) := \frac{a}{\varphi}$ $\quad r1(\varphi) := a \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$ $\quad r2(\varphi) := a^{\varphi}$



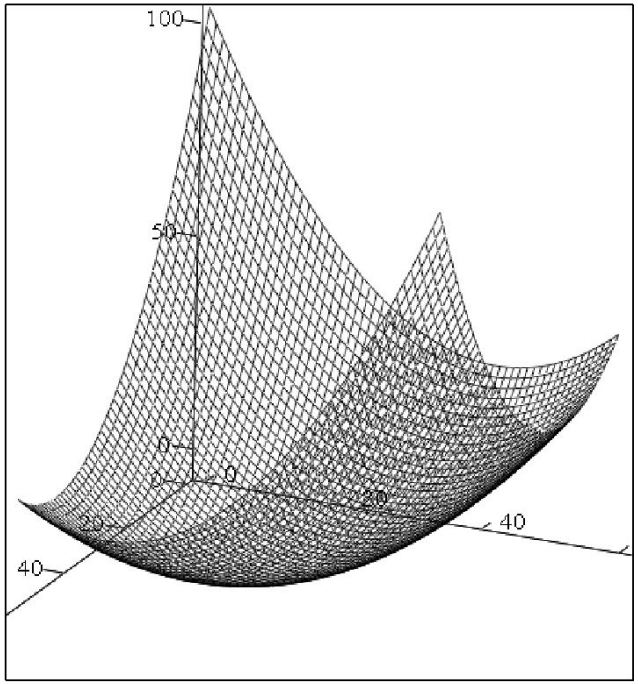
Второй (матричный) способ построения графика поверхности

$i := 0 .. 60$ $\qquad$ $j := 0 .. 60$

$x(i) := -5.0 + \frac{i}{5}$ $\qquad$ $y(j) := -5.0 + \frac{j}{5}$

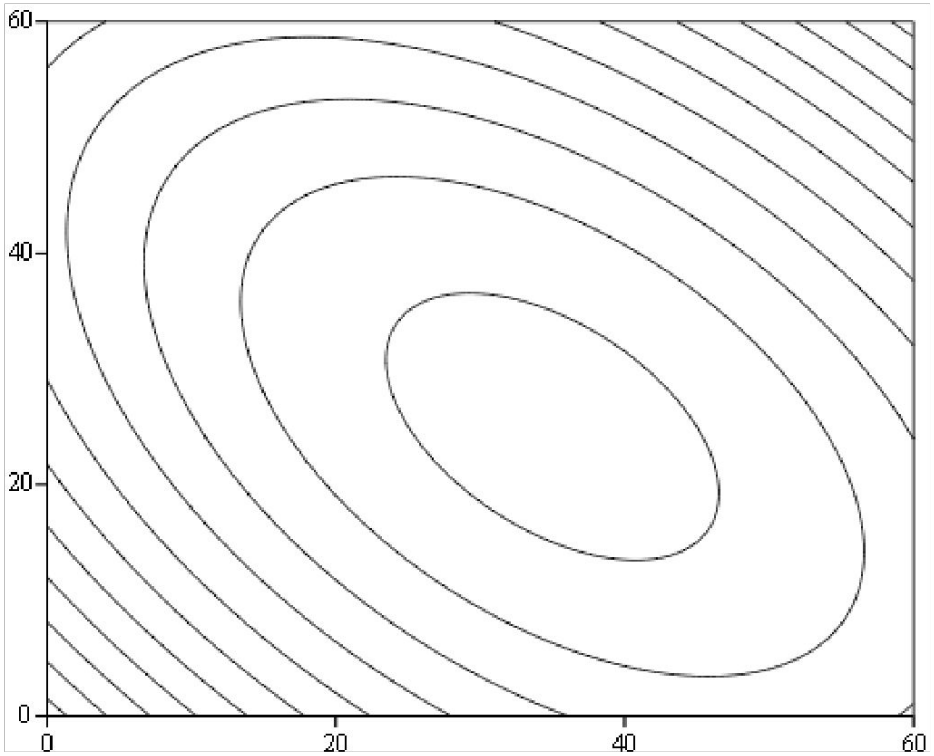
$f2(x, y) := x^2 + x \cdot y + y^2 - 4 \cdot x - 2 \cdot y$

$D1_{i,j} := f2(x(i), y(j))$



D1

Контурный график поверхности

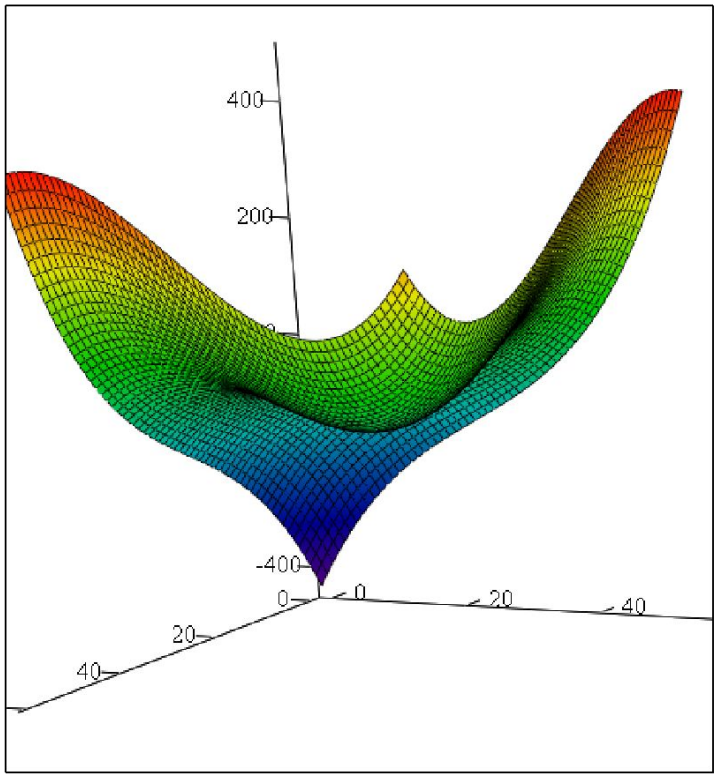


D1

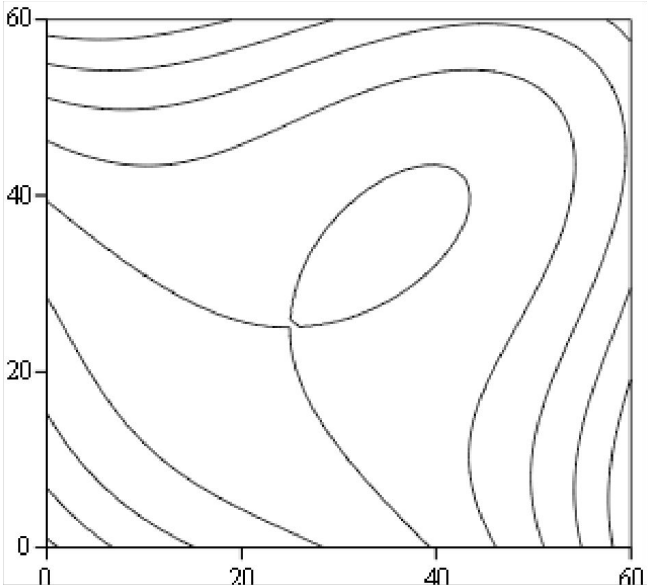
Нахождение целевой функции

$x(i) := -5 + \frac{i}{5.0}$ $\qquad$ $y(j) := -5 + \frac{j}{5.0}$

$f3(x,y) := x^3 + y^3 - 7 \cdot x \cdot y$ $\qquad$ $D2_{i,j} := f3(x(i), y(j))$



D2



D2

Нахождение локального минимума

$$f3(x,y) := x^3 + y^3 - 7\cdot x\cdot y$$

$$x := 1.2 \quad y := 1.2$$

Given

$$(0 < x < 2.5)$$

$$0 < y < 2.5$$

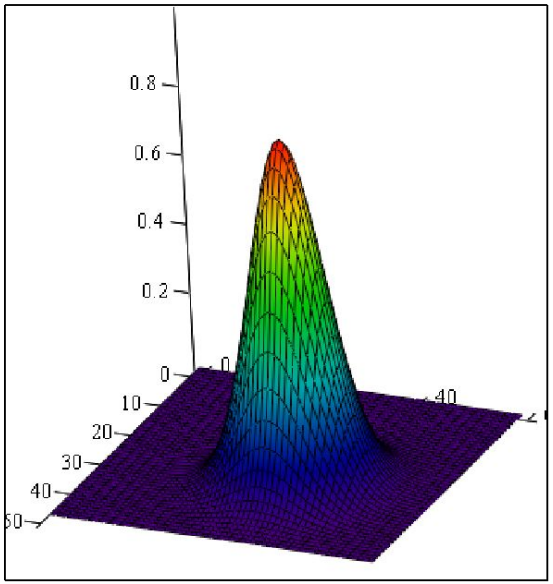
$$\text{Minimize}(f3, x, y) = \begin{pmatrix} 2.333 \\ 2.333 \end{pmatrix}$$

Максимум двумерного гауссиана

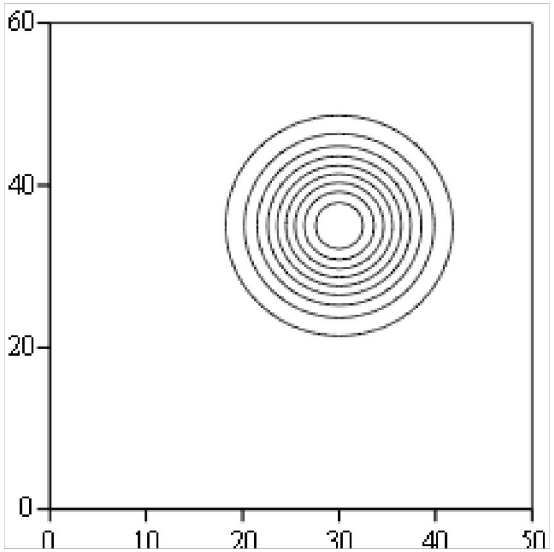
$i := 0 .. 50 \qquad j := 0 .. 60$

$x(i) := -2 + \frac{i}{10} \qquad y(j) := -2 + \frac{j}{10}$

$f4(x,y) := \exp\left[-\left[\frac{(x-1)^2}{0.6}\right] - \frac{(y-1.5)^2}{0.8}\right] \qquad D3_{i,j} := f4(x(i), y(j))$



D3



D3

Нахождение корней функций одной переменной

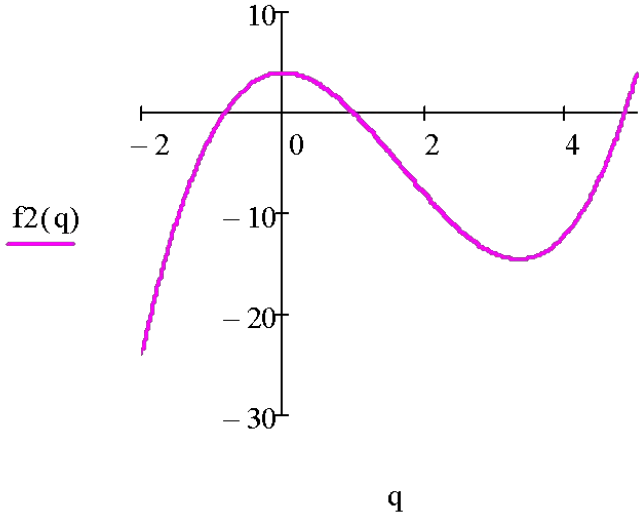
$f2(x) := x^3 - 5\cdot x^2 + 4$

$$\mathrm{root}(f2(x), x, -2, 6) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2\cdot\sqrt{2} + 2 \\ 2 - 2\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Given

$x^3 - 5\cdot x^2 + 4 = 0$

$$\mathrm{Find}(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot\sqrt{2} + 2 & 2 - 2\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



Решение задачи безусловной оптимизации

- Решение задачи безусловной оптимизации для заданной целевой функции двух переменных f(x) на множестве X.

$$f(x1, x2) := x1^3 + 8 \cdot x2^3 - 6 \cdot x1 \cdot x2 + 1$$

$$df1(x1, x2) := \frac{d}{dx1} f(x1, x2) \qquad df1(x1, x2) \rightarrow 3 \cdot x1^2 - 6 \cdot x2$$

$$df2(x1, x2) := \frac{d}{dx2} f(x1, x2) \qquad df2(x1, x2) \rightarrow 24 \cdot x2^2 - 6 \cdot x1$$

Нахождение стационарных точек

Given

$$df1(x1, x2) = 0$$

$$df2(x1, x2) = 0$$

$$X := \mathrm{Find}(x1, x2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{4} & -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{4} \end{pmatrix}$$

$$x1 := X^{\langle 0 \rangle} \qquad x2 := X^{\langle 1 \rangle}$$

$$x1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Построение матрицы Гессе

$$ddf11(x1,x2) := \frac{d}{dx1} df1(x1,x2) \qquad ddf11(x1,x2) \rightarrow 6 \cdot x1$$

$$ddf21(x1,x2) := \frac{d}{dx2} df1(x1,x2) \qquad ddf21(x1,x2) \rightarrow -6$$

$$ddf12(x1,x2) := \frac{d}{dx1} df2(x1,x2) \qquad ddf12(x1,x2) \rightarrow -6$$

$$ddf22(x1,x2) := \frac{d}{dx2} df2(x1,x2) \qquad ddf22(x1,x2) \rightarrow 48 \cdot x2$$

Построение матрицы Гессе (продолжение). Проверка 1 стационарной точки на экстремум

$X0 := X1 \qquad X0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x1 := X0_0 \qquad x2 := X0_1$

$H_{0,0} := ddf11(x1, x2) \qquad H_{0,1} := ddf12(x1, x2) \qquad H_{1,0} := ddf21(x1, x2)$

$H_{1,1} := ddf22(x1, x2)$

$H = \begin{pmatrix} 1.568 \times 10^{-15} & -6 \\ -6 & 6.063 \times 10^{-14} \end{pmatrix} \qquad |H| = -36$

Проверка матрицей Гессе второй стационарной точки на экстремум

$X0 := X2 \qquad X0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad x1 := X0_0 \qquad x2 := X0_1$

$H_{0,0} := ddf11(x1, x2) \qquad H_{0,1} := ddf12(x1, x2) \qquad H_{1,0} := ddf21(x1, x2)$

$H_{1,1} := ddf22(x1, x2)$

$H = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix} \qquad |H| = 108$

Подтверждение правильности нахождения точки минимума

Given

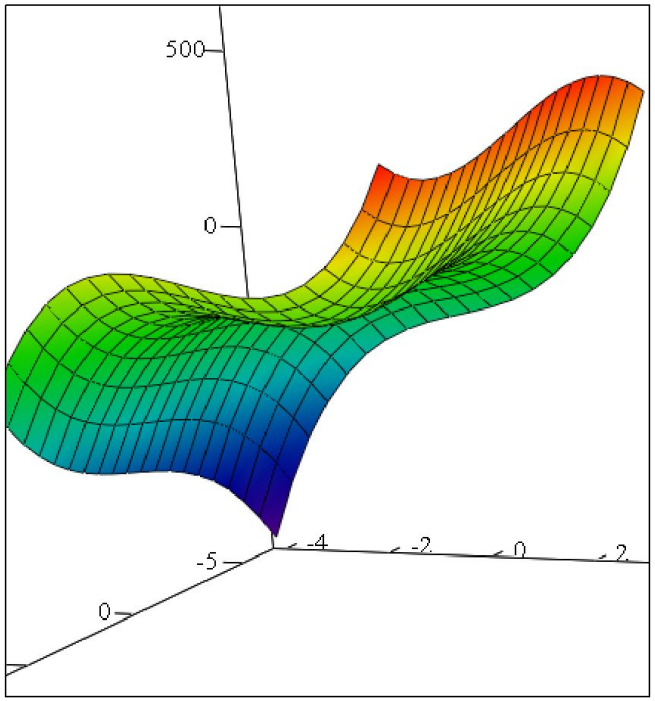
$$0 < x1 < 2$$

$$0 < x2 < 2$$

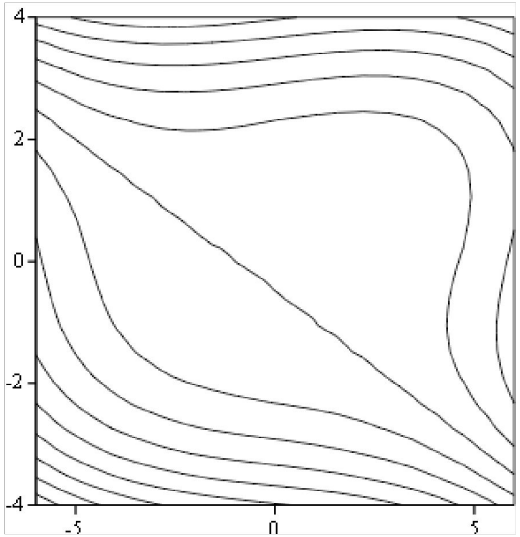
$$\text{Minimize}(f, x1, x2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Построение графика функции и её контурного графика

$D := \mathrm{CreateMesh}(f, -6, 6, -4, 4)$



D



D

Решение дифференциальных уравнений 1 и 2 –го порядка

- Диф уравнение имеет вид: y’ = (1+x*y)/x^2, y(1) = 0, 1<=x<=2

$$ORIGIN := 1$$

$$y_1 := 0$$

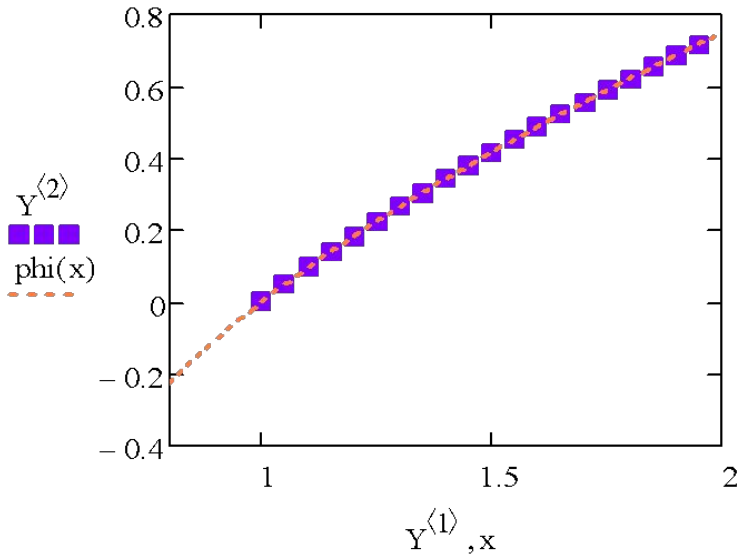
- Решение задачи методом Рунге-Кутта предполагает использование функции rkfixed (y, a, b, N, D). a, b – границы отрезка, N - число узлов на сетке.

$$D(x,y) := \frac{1 + x \cdot y_1}{x^2} \qquad phi(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$$Y := rkfixed(y, 1, 2, 20, D)$$

Решение уравнения 1 порядка

$Y := \mathrm{rkfixed}(y, 1, 2, 20, D)$



Y =

	1	2
1	1	0
2	1.05	0.049
3	1.1	0.095
4	1.15	0.14
5	1.2	0.183
6	1.25	0.225
7	1.3	0.265
8	1.35	0.305
9	1.4	0.343
10	1.45	0.38
11	1.5	0.417
12	1.55	0.452
13	1.6	0.488
14	1.65	...

Решение однородного уравнения 2 порядка

- Уравнение второго порядка имеет вид: xy’’-(x+1)y’-2(x-1)y=0.

$$y_1 := y \qquad y_2 := \frac{d}{dx}y$$

$$\frac{d}{dx}y_1 = \blacksquare \cdot y_2 \qquad \frac{d}{dx}y_2 = \blacksquare \cdot \frac{x+1}{x} \cdot y_2 + 2 \cdot \frac{(x-1)}{x} \cdot y_1$$

- Строим вектор-столбец начальных условий и вектор-функцию правых частей:

$$ORIGIN := 1$$

$$N := 10$$

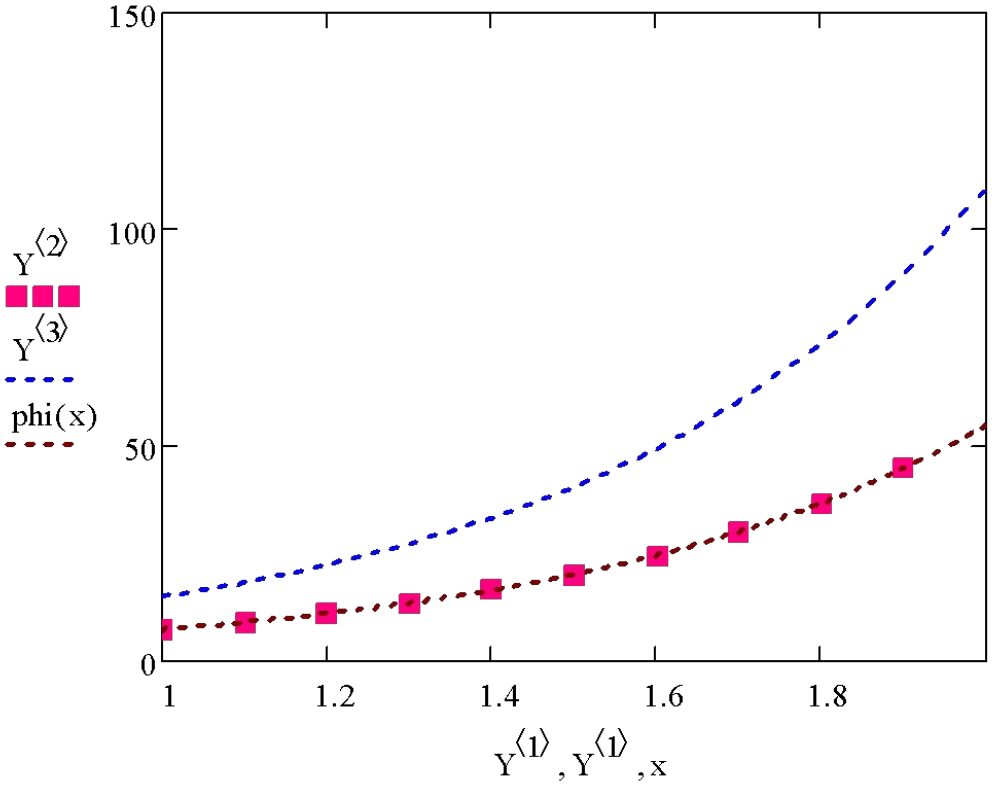
$$y := \begin{pmatrix} e^2 \\ 2 \cdot e^2 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{x+1}{x} \cdot y_2 + 2 \cdot \frac{x-1}{x} \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

Решение дифуравнения 2 порядка методом Рунге-Кутта

$Y := \mathrm{rkfixed}(y, 1, 2, N, f)$

$phi(x) := e^{2 \cdot x}$



Классическое решение диф. Уравнений с использованием функции Odesolve(x, xend)

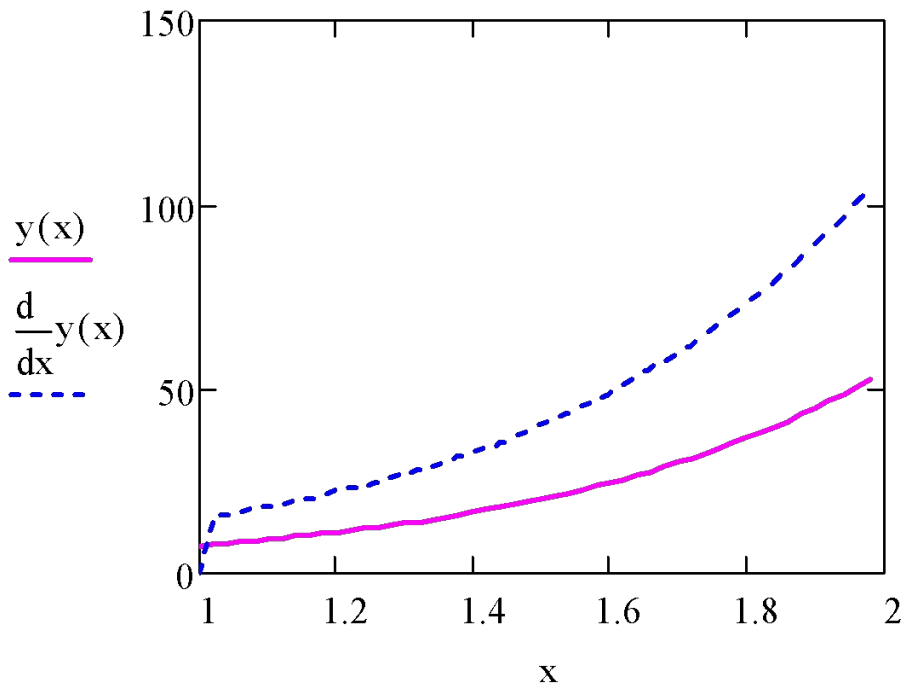
Given

$$x\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x) - (x+1)\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) - 2\cdot(x-1)\cdot y(x) = 0$$

$$y(1) = e^2 \qquad y'(1) = 2\cdot e^2$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(x, 2) \qquad x := 1, 1.02 .. 2$$

График восстановленной функции и её производной



Решение системы двух дифуравнений первого порядка с начальными условиями.

- 5. Исследовать поведение системы, моделирующей двухмодовый режим взаимодействия амплитуд полей лазера. Построить фазовую траекторию и режим временной эволюции каждой моды.

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 + \alpha x_1^2 \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2 + \alpha x_2^2 \end{cases}$$

- Находим решение следующим образом, как показано на рабочей странице MathCad:

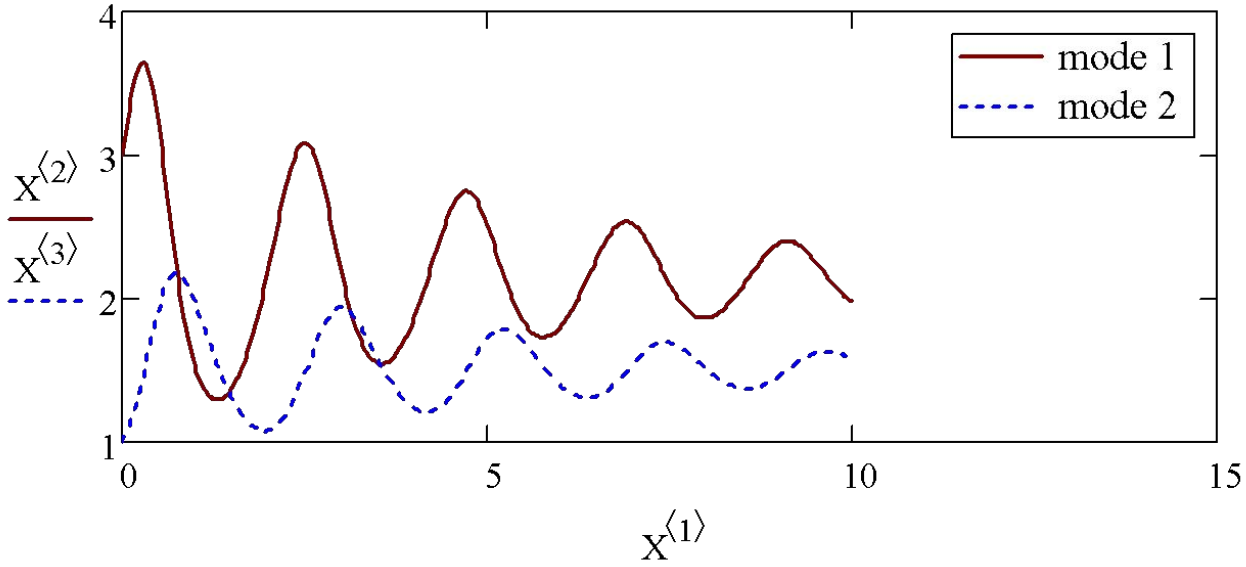
$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$a := 4 \quad b := 2.5 \quad c := 2 \quad d := 1 \quad \mathrm{alfa} := 0.1$$

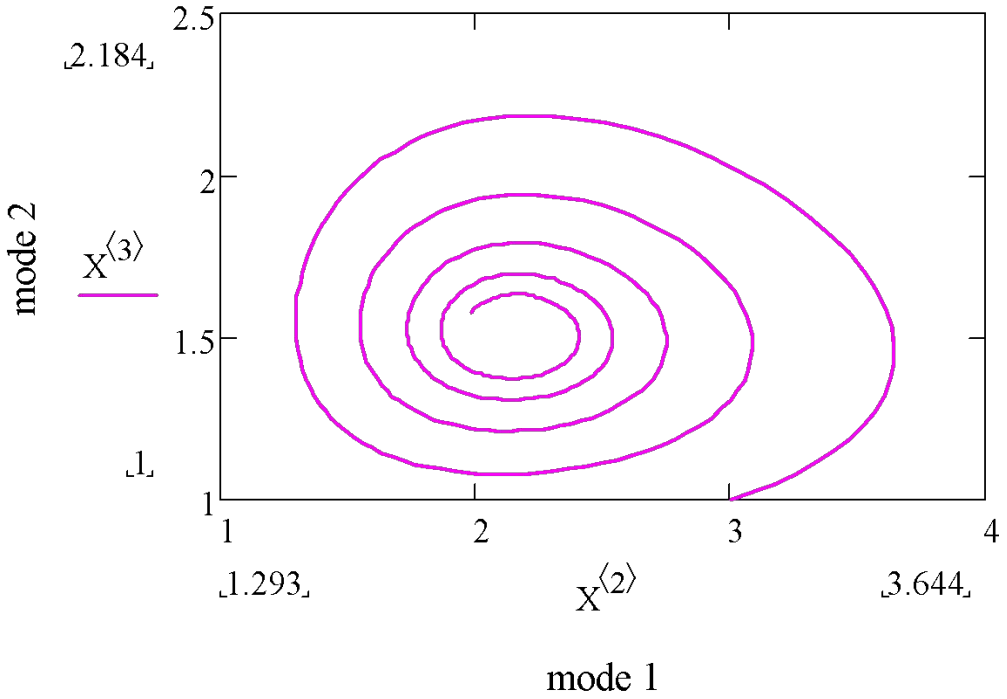
$$F(t, x) := \begin{bmatrix} (a - b \cdot x_2) \cdot x_1 - \mathrm{alfa} \cdot (x_1)^2 \\ (-c + d \cdot x_1) \cdot x_2 - \mathrm{alfa} \cdot (x_2)^2 \end{bmatrix}$$

Порядок решения и графики временной эволюции амплитуд

$$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$$



Фазовый портрет системы



Наблюдается устойчивый фокус, соответствующий стабилизации мод и переход их в положение с другой энергией в результате взаимодействия.

Числовой формат вывода

Значение амплитуд в зависимости от времени задается в виде матрицы, состоящей из трех столбцов Y1- время, Y2 – амплитуда моды 1, Y3 – амплитуда моды 2.

X =

	1	2	3
1	0	3	1
2	0.025	3.089	1.024
3	0.05	3.174	1.051
4	0.075	3.256	1.08
5	0.1	3.333	1.113
6	0.125	3.403	1.148
7	0.15	3.467	1.187
8	0.175	3.522	1.228
9	0.2	3.568	1.272
10	0.225	3.604	1.32
11	0.25	3.629	1.369
12	0.275	3.643	1.422
13	0.3	3.644	1.476
14	0.325	3.633	...

Решение дифуравнений в пакете Mathematica v. 7.

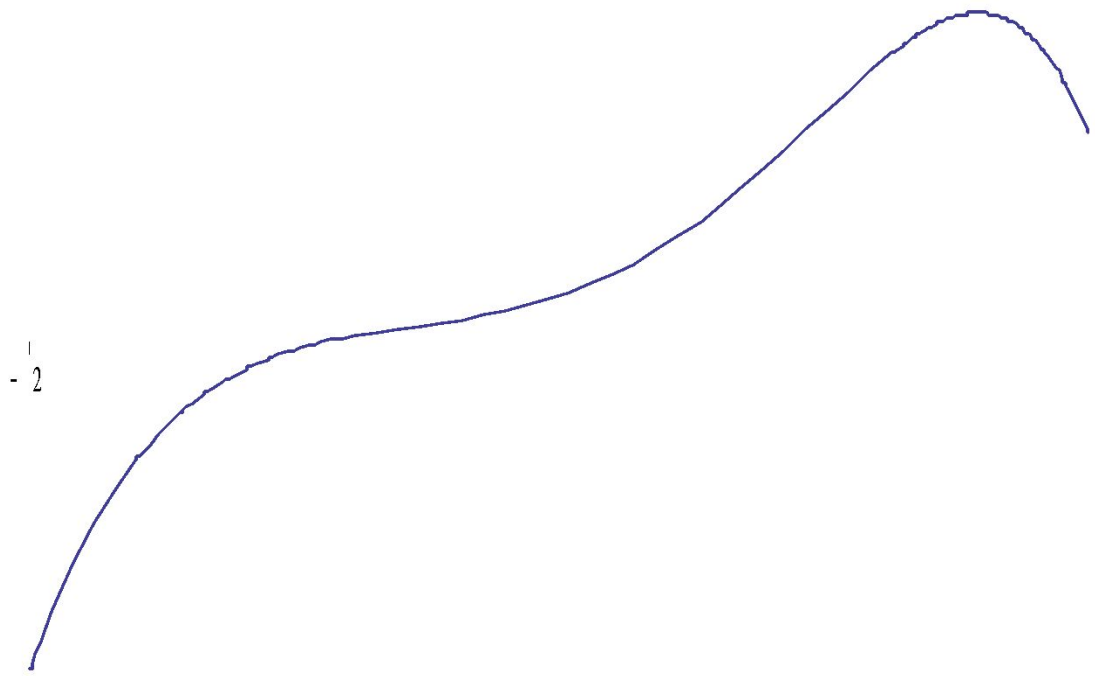
- DSolve[{x*y''[x]-(x+1)*y'[x]-2*(x)*y[x]==0,y[1]==e^2,y'[1]==2*e^2},y[x],x]

```
DSolve[{x*y''[x] - (x + 1)*y'[x] - 2*(x)*y[x] == 0, y[1] == e^2, y'[1] == 2*e^2}, y[x], x]
```

$$y1 = \left(\frac{1}{25} e^{-x} \left(-29 - 30 x + 4 e^{2x} \mathrm{Cos}[x] - 28 e^{2x} \mathrm{Sin}[x]\right)\right);$$

```
Plot[y1, {x, -2, 3}]
```

График полученной функции



Решение системы дифуравнений первого порядка в пакете Mathematica v.7

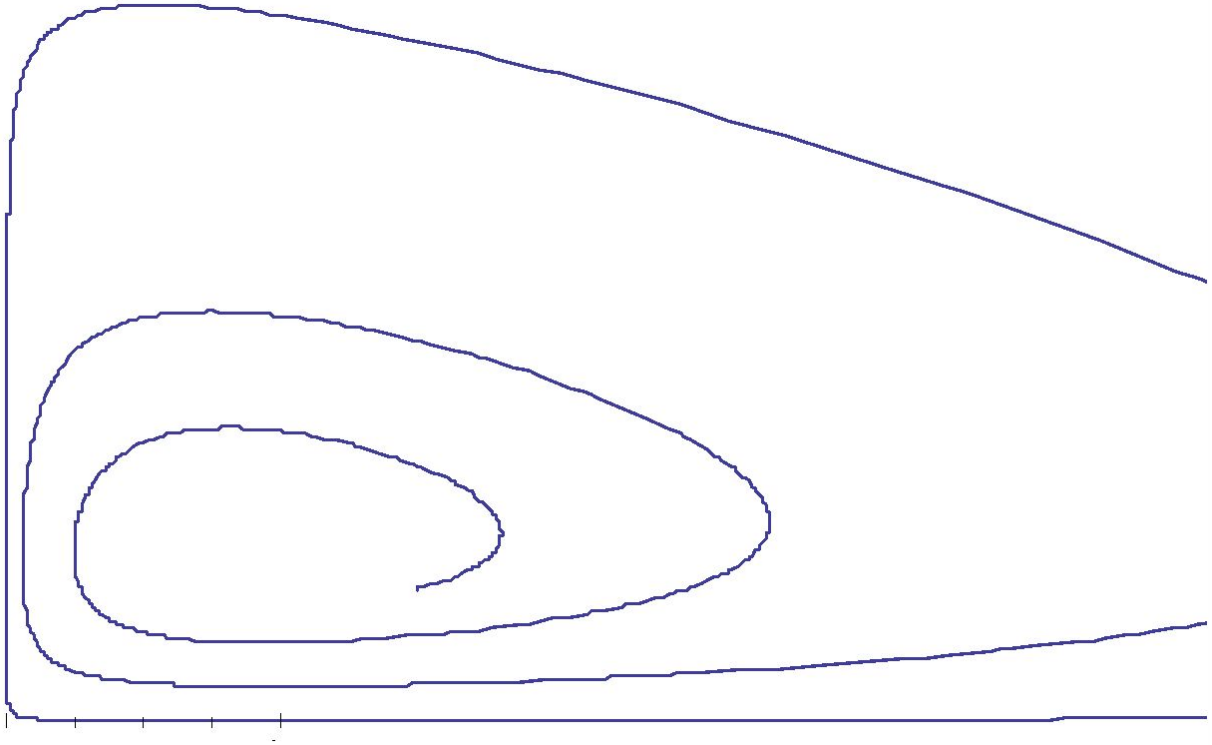
```
a = 5
b = 4
c = 2
d = 1
alfa = 0.17
dd = NDSolve[{x1'[t] == a - b * x2[t] * x1[t] + alfa * x1[t]^2,
  x2'[t] == -c + d * x1[t] * x2[t] + alfa * x2[t]^2, x1[0] == 3, x2[0] == 1},
  {x1, x2}, {t, 20}]
```

```
NDSolve::ndsz: At t == 9.578891340154772`, step size is effectively zero; singularity or stiff system suspected.
```

```
{{x1 → InterpolatingFunction[{{0., 9.57889}}, <>],
  x2 → InterpolatingFunction[{{0., 9.57889}}, <>]}}
```

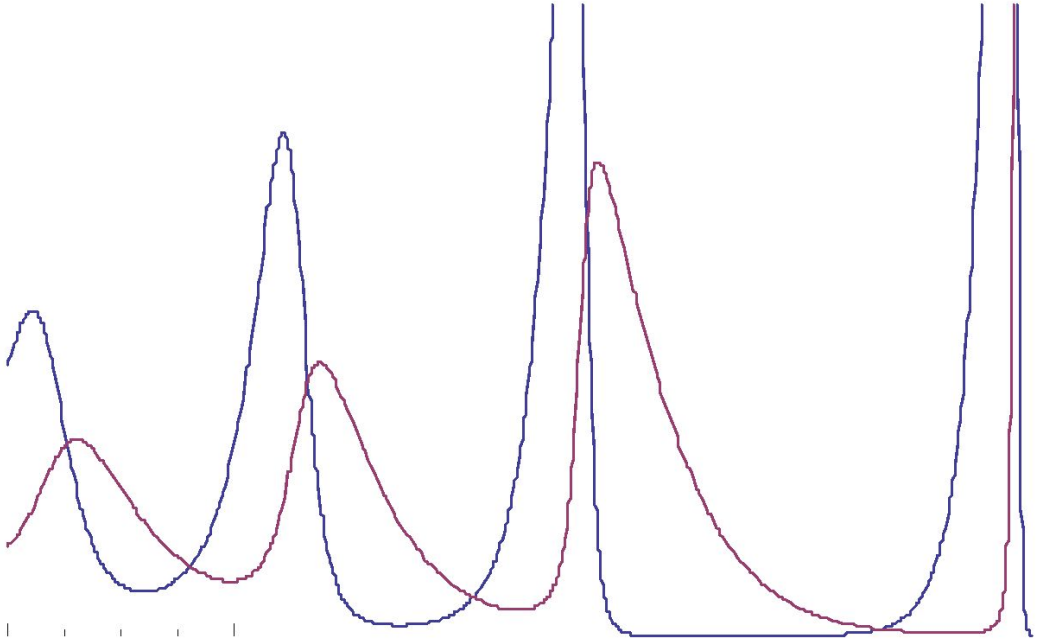
Построение фазового портрета с помощью параметрического графика

```
ParametricPlot|WEvaluate|WWx1|Wt▼, x2|Wt▼' . dd▼, ▼t, 0, 9'▼
```



Временная эволюция мод с начальными параметрами a, в, c, alfa

```
Plot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. dd], {t, 0, 9}, PlotStyle → Automatic]
```

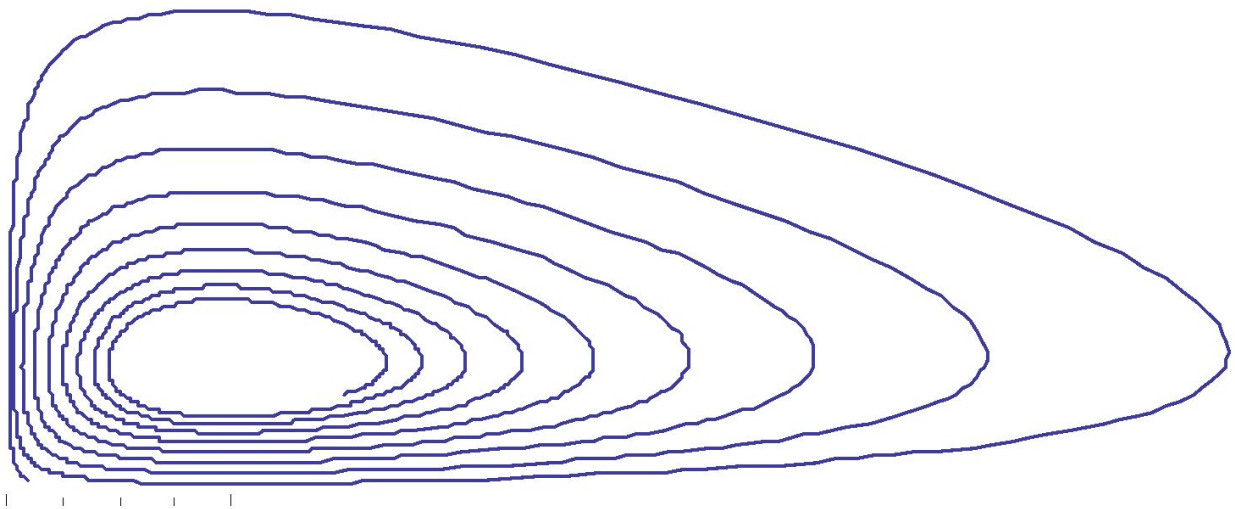


Задание новых параметров задачи

```
alfa = 0.05

ddl = NDSolve[{x1'[t] == a - b*x2[t] * x1[t] + alfa*x1[t]^2,
  x2'[t] == c + d*x1[t] * x2[t] + alfa*x2[t]^2, x1[0] == 3, x2[0] == 1},
  {x1, x2}, {t, 20}]

{{x1 → InterpolatingFunction[{{0., 20.}}, <>],
  x2 → InterpolatingFunction[{{0., 20.}}, <>]}}
```

Фазовый портрет системы при слабом взаимодействии мод

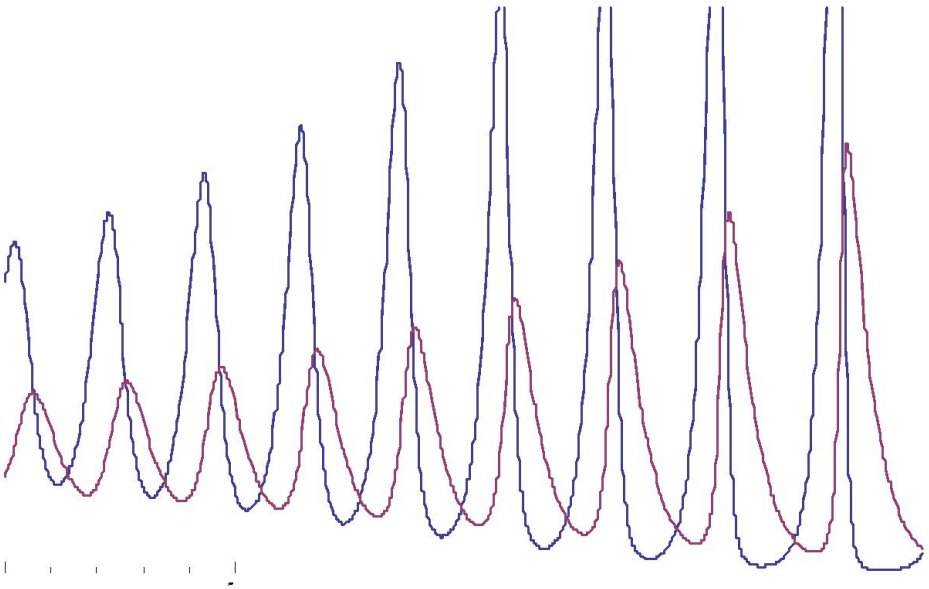
```
ParametricPlot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. dd1], {t, 0, 20}]
```



Временная эволюция амплитуд

Наблюдается более медленное развитие неустойчивости, вызванное взаимодействием мод

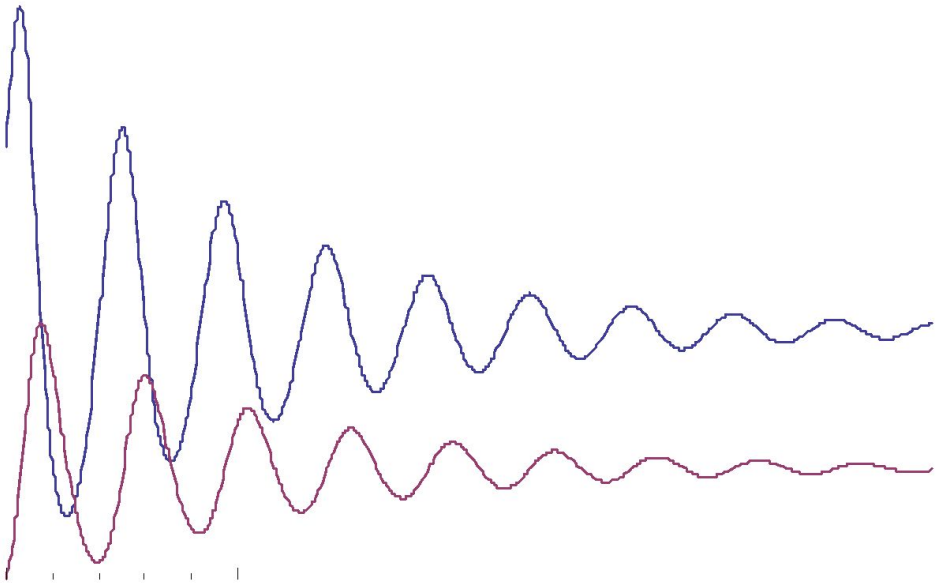
```
Plot|WEvaluate|WWx1|WtW, x2|WtW' . dd1W, Wt, 0, 20'W
```



Динамика взаимодействия мод в устойчивом режиме

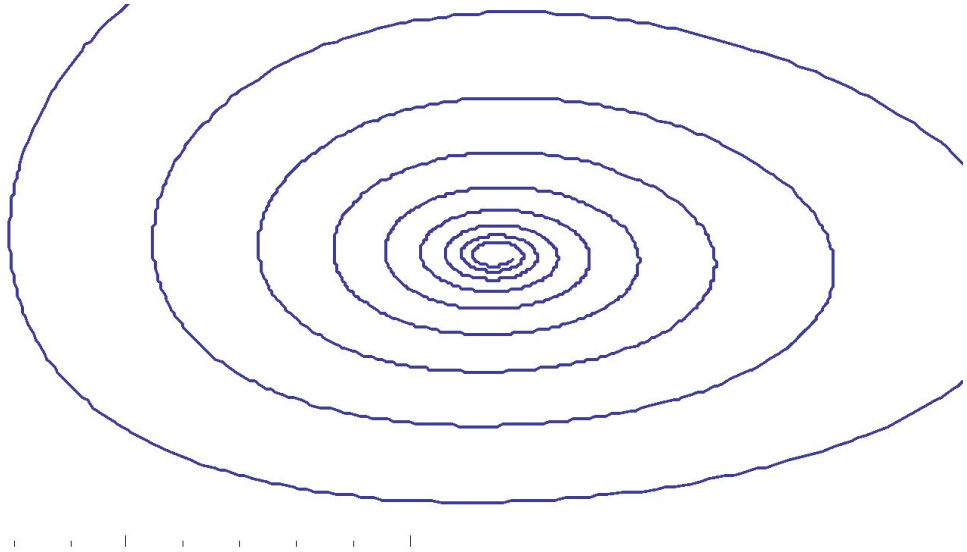
Задание новых параметров системы

```
a = 4
b = 2.5
alfa = -0.1
Plot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. dd3], {t, 0, 20}]
```



Фазовый портрет системы в устойчивом режиме

```
ParametricPlot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. dd3], {t, 0, 20}]
```



Наблюдается устойчивый фокус

Дифуравнения, обеспечивающие устойчивое развитие системы

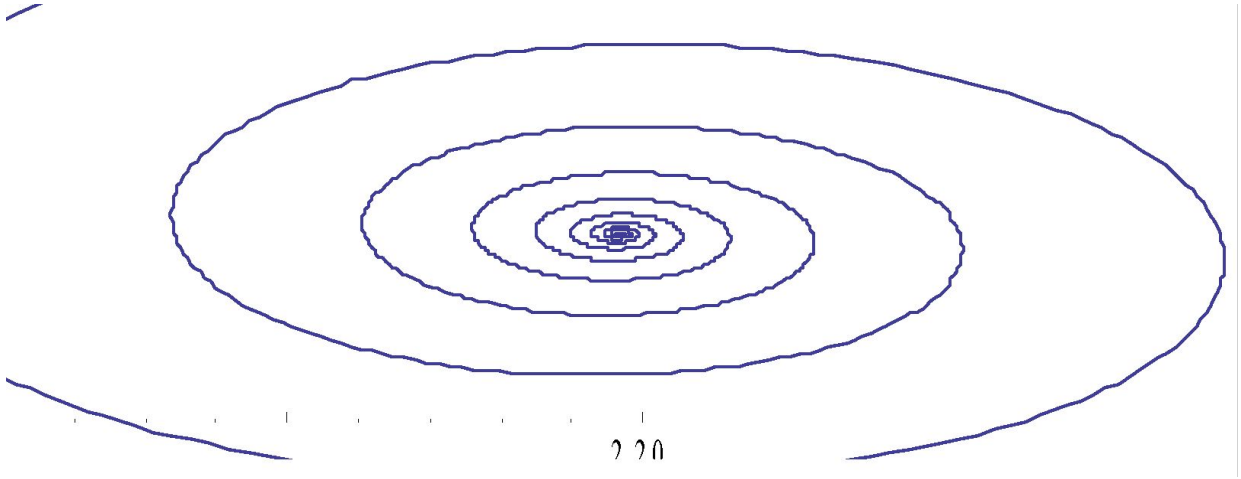
```
a = 5
b = 4
c = 2
d = 1
alfa = 0.17
```

```
ss = NDSolve[{x1'[t] == a - b*x2[t] - x1[t] - alfa*x1[t]^2,
  x2'[t] == -c + d*x1[t] - x2[t] - alfa*x2[t]^2, x1[0] == 3, x2[0] == 1},
  {x1, x2}, {t, 0, 30}]
```

```
{{x1 ® InterpolatingFunction[{{0., 30.}}, <>],
  x2 ® InterpolatingFunction[{{0., 30.}}, <>]}}
```

Фазовый портрет системы в режиме устойчивого взаимодействия мод

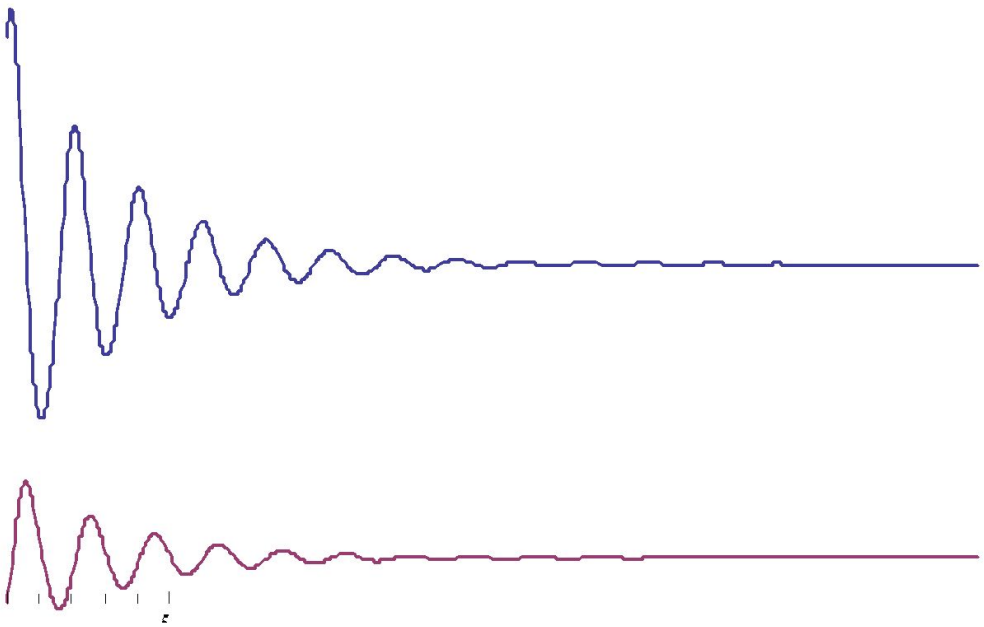
```
ParametricPlot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. ss], {t, 0, 30}]
```



- Наблюдается быстрая эволюция систмы к устойчивому состоянию с устойчивым фокусом.

Взаимодействие приводит к переходу системы в устойчивое состояние с изменением энергии мод

Plot|WEvaluate|WWx1|WtW, x2|WtW' . ssW, Wt, 0, 30'W



Решение дифуравнения первого порядка методом Рунге –Кутта -4

```
sol21 = NDSolve[{y'[x] + y[x] Cos[x] == 1/2 Sin[2 x], y[0] == 0}, y[x], {x, 0, 1},
  Method → {"ExplicitRungeKutta", "DifferenceOrder" → 4}, StartingStepSize → 0.05]

z1 = Plot[{y[x] /. sol2}, {x, 0, 1}]
```

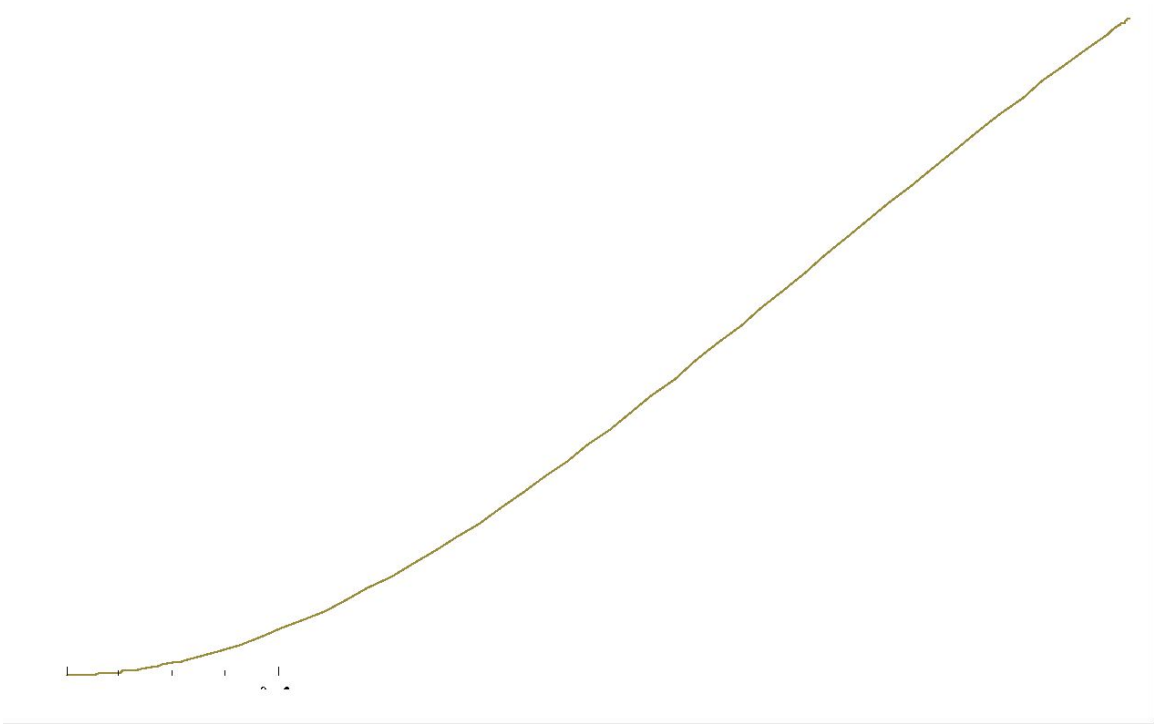
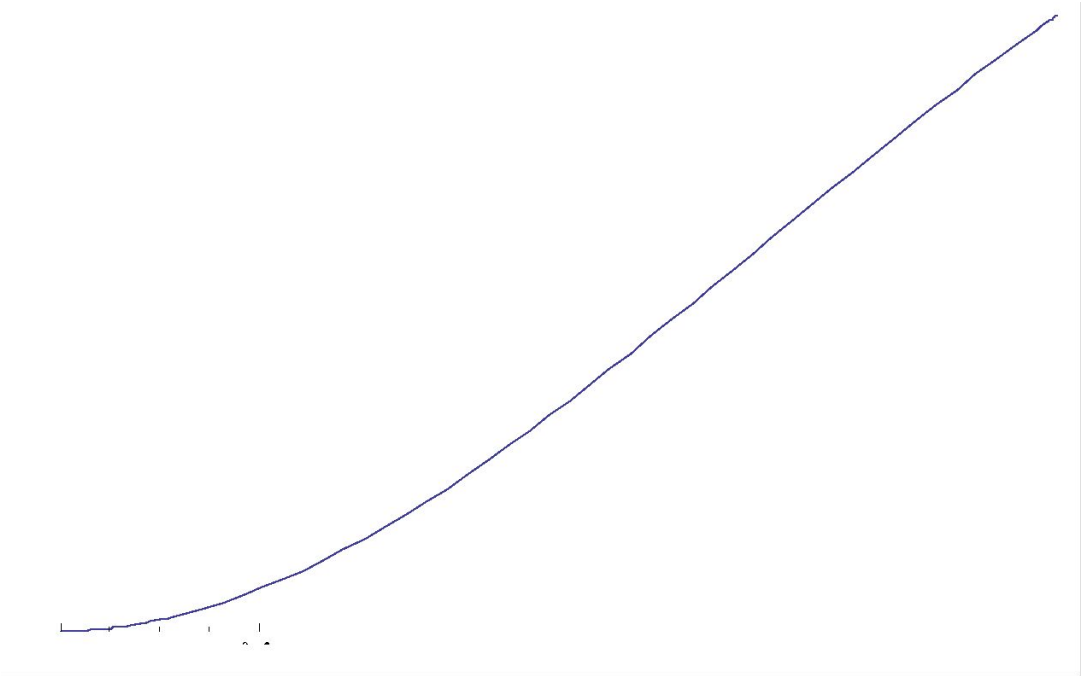


График точного решения

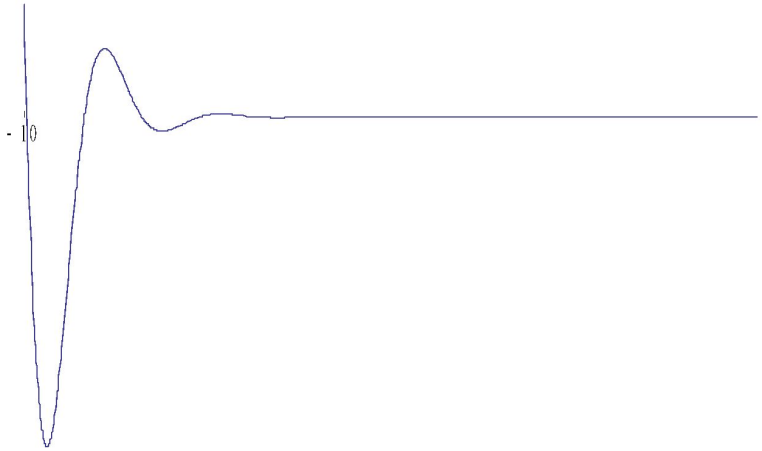
z = Plot[Sin[x] + ã^(-Sin[x]) - 1, {x, 0, 1}]



Решение неоднородного дифуравнения второго порядка

Задача 4

```
f4[x_] := -2 Sin[x];
a1 = 2; a2 = 5; a = -p/2;
sol4 = DSolve[{y''[x] + a1 y'[x] + a2 y[x] == f4[x], y[a] == 6, y'[a] == 2}, y[x], x]   FullSimplify
{{y[x] → 1/5 (Cos[x] - 2 Sin[x]) - 1/10 e^(-p/2 - x) (56 Cos[2 x] + 37 Sin[2 x])}}
Plot[{y[x] /. sol4}, {x, -10, 10}, PlotRange → All]
```



Аппроксимация эмпирических данных в пакете Maple 12

```
> X := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9];

                    X := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

> Y := [.25, .111, 0.71e-1, 0.53e-1, 0.42e-1, 0.39e-1, 0.33e-1, 0.31e-1, 0.29e-1];

      Y := [0.25, 0.111, 0.071, 0.053, 0.042, 0.039, 0.033, 0.031, 0.029]
> with(CurveFitting):[BSpline, BSplineCurve, Interactive, InteractiveChangeSlider,
LeastSquares,   PolynomialInterpolation, RationalInterpolation, Spline, ThieleInterpolation]> af1
:= proc (v) options operator, arrow; LeastSquares(X, Y, v, curve = a*v^2+b*v+c) end proc;
/                    2          \   af1 := v -> CurveFitting:-LeastSquares\X, Y, v, curve = a v  + b v + c/>
LeastSquares(X, Y, v, curve = a*v^2+b*v+c);                                                    2
0.2849047619 - 0.0805147186147184140 v + 0.00602813852813851009 v > af2 := proc (v)
options operator, arrow; LeastSquares(X, Y, v, curve = a*v^3+b*v^2+c*v+d) end proc;
/                    3      2          \af2 := v -> CurveFitting:-LeastSquares\X, Y, v, curve = a v  + b v  + c
v + d/> LeastSquares(X, Y, v, curve = a*v^3+b*v^2+c*v+d);
3      0.3912380952 - 0.182336940836941020 v - 0.00161111111111111372 v
2         + 0.0301948051948052361 v > af3 := proc (v) options operator, arrow; LeastSquares(X,
Y, v, curve = a*v^4+b*v^3+c*v^2+d*v+e) end proc;                                          /
af3 := v -> CurveFitting:-LeastSquares\X, Y, v,                          4      3      2          \
curve = a v  + b v  + c v  + d v + e/
```

Приближение данных различными аналитическими функциями

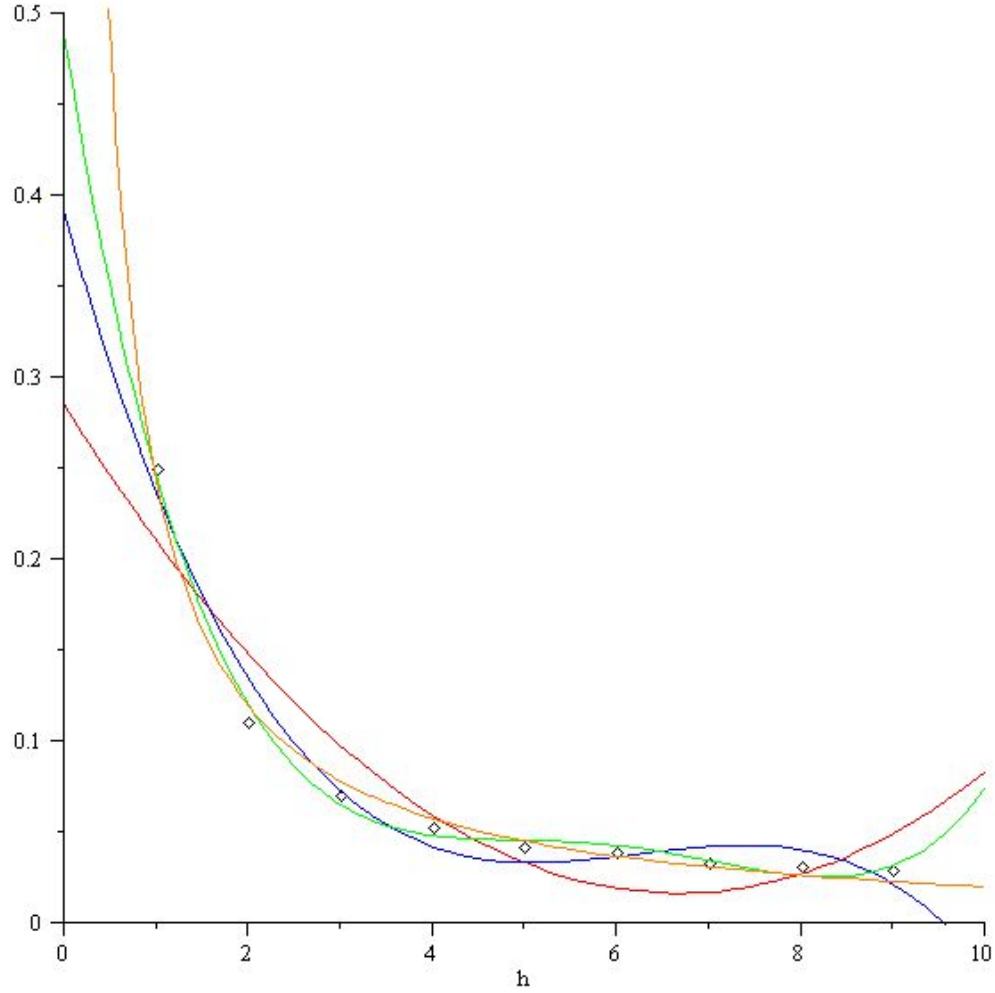
- af4 := proc (v) options operator, arrow; LeastSquares(X, Y, v, curve = a/v+b) end proc; / a \ af4 := v -> CurveFitting:-LeastSquares|X, Y, v, curve = - + b| \ v /> LeastSquares(X, Y, v, curve = a/v+b);
-

$$-0.005046237196 + \frac{0.2490010744304802 80}{v}$$

- plotdata := pointplot(data);
- > paf1 := plot(af1(h), h = 0 .. 10, color = red);
- > paf2 := plot(af2(h), h = 0 .. 10, color = blue);
- > paf3 := plot(af3(h), h = 0 .. 10, color = green);
- > paf4 := plot(af4(h), h = 0 .. 10, af4 = 0 .. .5, color = coral);> with(plots);

Графическое представление аппроксимации

$$display(plotdata, paf1, paf2, paf3, paf4, axes = normal)$$



Решение дифуравнения первого порядка методом РК4 в пакете Maple 12

$$ode := diff(y(x), x) = x + 3 \cdot \frac{y(x)}{x};$$

$$ode := \frac{d}{dx} y(x) = x + \frac{3\, y(x)}{x}$$

$$ic := y(1) = 0 :$$

$$del := dsolve(\{ode, ic\}, numeric, method = classical[rk4], output = array([1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0]))$$

$$del := \begin{bmatrix} [x \;\; y(x)] \\ \begin{bmatrix} 1. & 0. \\ 1.2 & 0.2879999998194802 12 \\ 1.4 & 0.7839999995799086 24 \\ 1.6 & 1.535999999270704 74 \\ 1.8 & 2.591999998880958 78 \\ 2.0 & 3.999999998399779 16 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Шаг 0.05

$$de3 := dsolve(\{ode, ic\}, numeric, method = classical[rk4], output = array([1., 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.25, 1.3, 1.35, 1.4, 1.45, 1.5, 1.55, 1.6, 1.65, 1.7, 1.75, 1.8, 1.85, 1.9, 1.95, 2.0]));$$

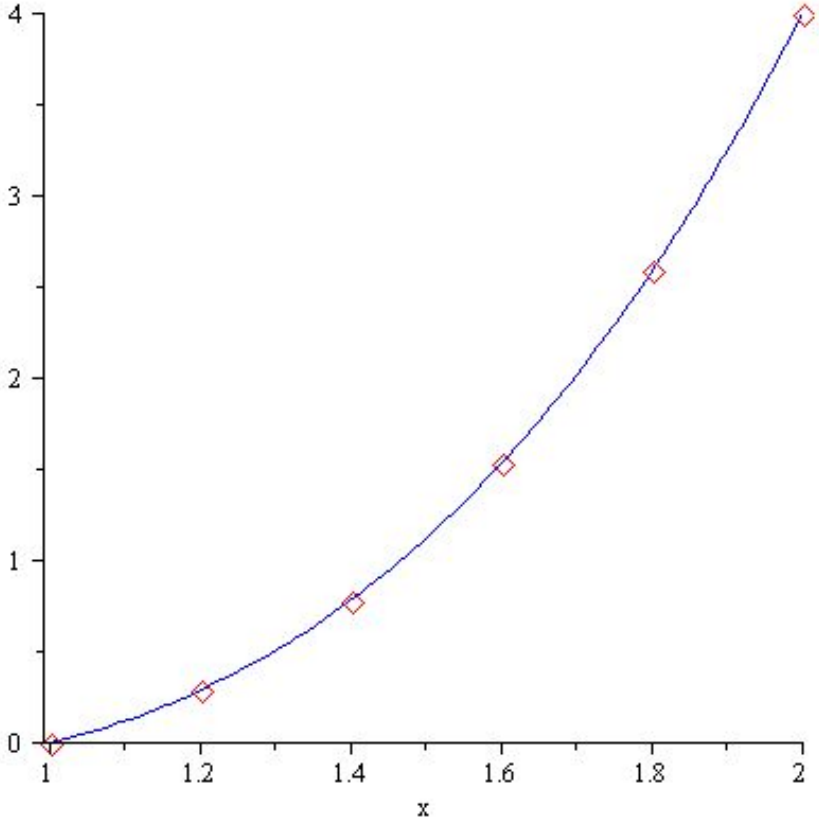
$de3 :=$

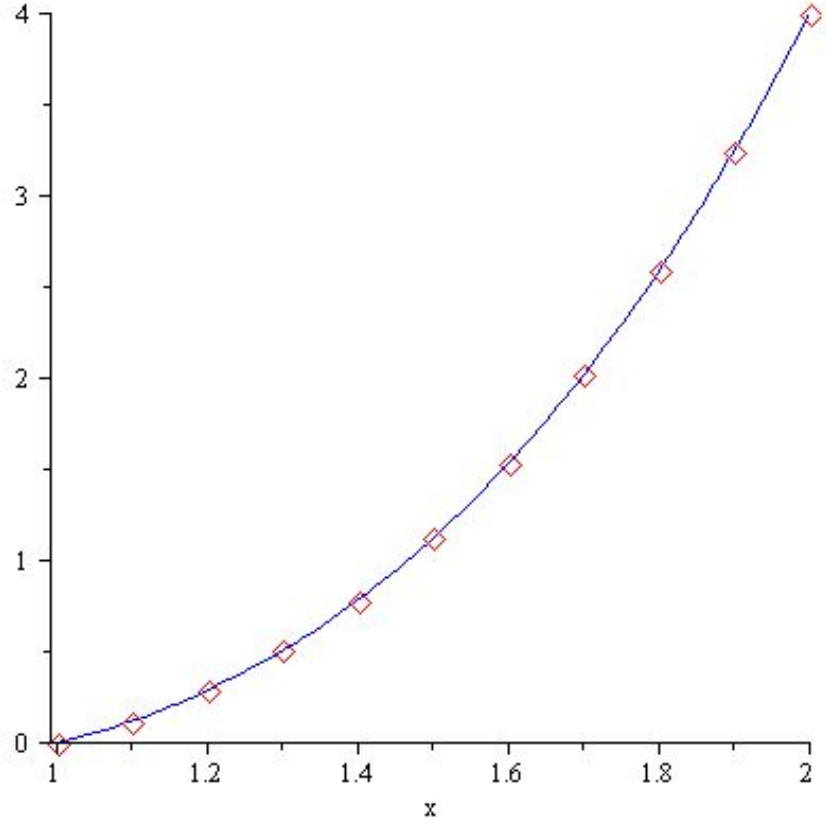
$[x \; y(x)]$	
1.	0.
1.05	0.0551249999598675475
1.1	0.120999999916498055
1.15	0.198374999869752128
1.2	0.287999999819480212
1.25	0.390624999765524283
1.3	0.506999999707721582
1.35	0.637874999645906106
1.4	0.783999999579908624
1.45	0.946124999509560638
1.5	1.12499999943469154
1.55	1.32137499935512981
1.6	1.53599999927070474
1.65	1.76962499918124494
1.7	2.02299999908658101
1.75	2.29687499898654224
1.8	2.59199999888095878
1.85	2.90912499876965969
1.9	3.24899999865247492
1.95	3.61237499852923793
2.0	3.99999999839977916

```
> pf := plot(phi(x), x = 1 .. 2, color = blue);

> a1 := odeplot(de1, 1 .. 2, style = point, symbolsize = 20);

> a2 := odeplot(de2, 1 .. 2, style = point, symbolsize = 20);

> a3 := odeplot(de3, 1 .. 2, style = point, symbolsize = 20);

> display(pf, a1);
```

Нахождение функции с шагом 0.2 и 0.4

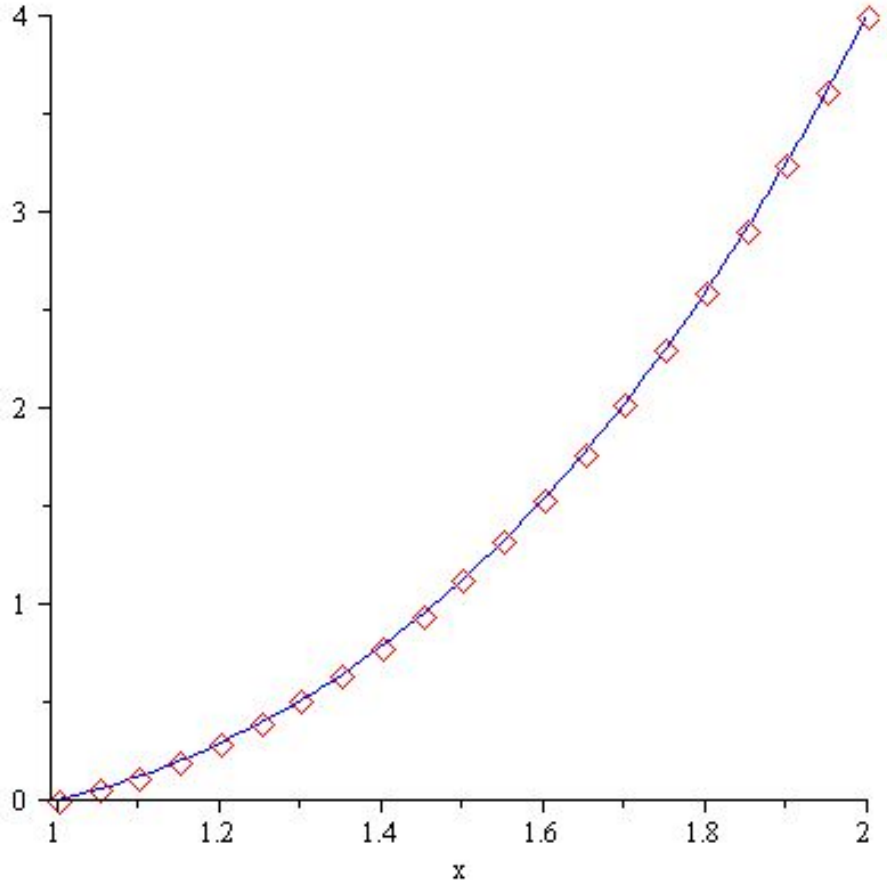
$display(pf, a2);$





Численное решение ДУ методом РК с шагом 0.02

$display(pf, a3);$



Решение ДУ второго порядка методом РК4 сведением к системе двух уравнений первого порядка

> ode := x^2*(diff(y(x), `$`(x, 2)))-6*y(x);

> ic := y(1) = 1, (D(y))(1) = 3;

> $$c := \left[\left[YP_1 = p_2, YP_2 = \frac{6\,p_1}{x^2}\right], \left[p_1 = y(x), p_2 = \frac{d}{dx}\,y(x)\right], 1, [1, 3]\right]$$

- p1 := proc (x) options operator, arrow; y(x) end proc; p2 := proc (x) options operator, arrow; (D(y))(x) end proc;
- > sys := diff(p1(x), x) = p2(x), diff(p2(x), x) = 6*p1(x)/x^2;
- > icp := p1(1) = 1, p2(1) = 3;
- > x1[0] := a; for i from 0 to n1-1 do x1[i+1] := x1[i]+h1 end do;

$$des1 := dsolve(\{sys, icp\}, numeric, method = classical[rk4], output = array([1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.]));\#$$

Решение неоднородного ДУ второго порядка методом РК4

$$eulersols(ode, y(x));$$

$$\left[x^3, \frac{1}{x^2}\right]$$

f := proc (x) options operator, arrow; exp(-3*x)*cos(x) end proc;

> a1 := 2; a2 := 0; a := (1/2)*Pi;

> ode := diff(y(x), `$`(x, 2))+a1*(diff(y(x), x))+a2*y(x);

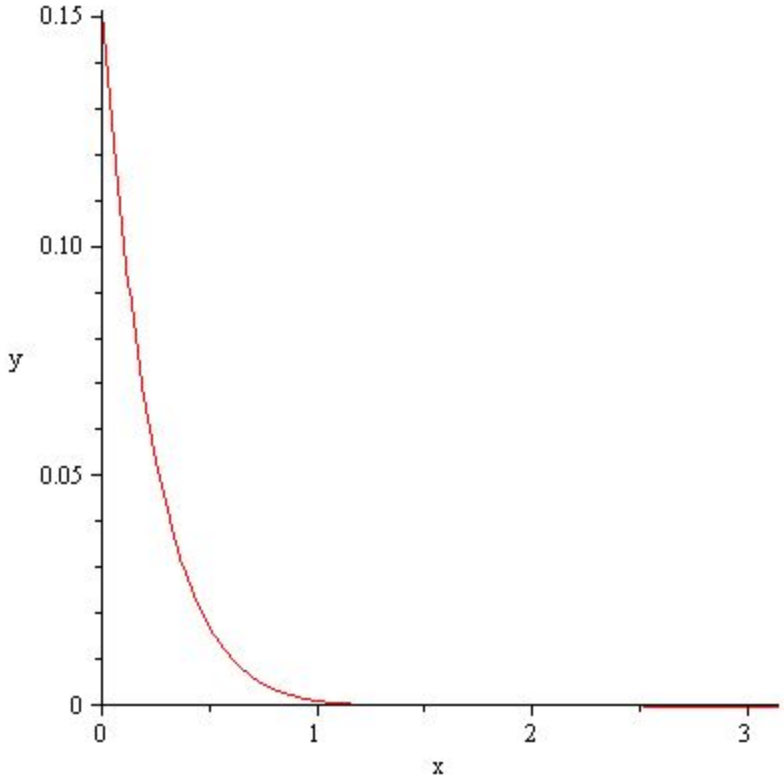
> ic := y(a) = 0, (D(y))(a) = 0;

$$de := dsolve(ode, y(x));$$

$$de := y(x) = _C1 + _C2\, e^{(-2x)}$$

Решение ДУ, графическое представление

```
> den := dsolve({ic, ode = f(x)}, y(x), numeric);
> odeplot(den, 0 .. Pi);
```



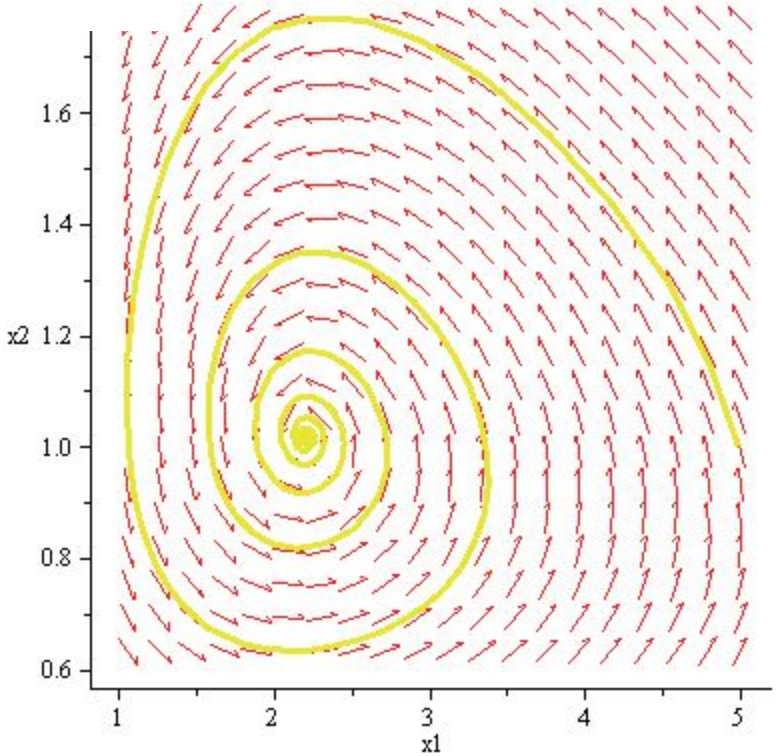
Решение системы ДУ первого порядка. Режимы эволюции мод

- restart;> ode1 := diff(x1(t), t) = (a-b*x2(t))*x1(t)-alpha*x1(t)^2;
- > ode2 := diff(x2(t), t) = (-c+d*x1(t))*x2(t)-alpha*x2(t)^2;
- > a := 4; b := 3.5; c := 2; d := 1; alpha := .2;
- > ic := x1(0) = 3, x2(0) = 1;
- > de := dsolve({ic, ode1, ode2}, {x1(t), x2(t)}, numeric);> with(plots);

Фазовый портрет системы

$$with(DEtools):$$

$$phaseportrait([ode1, ode2], [x1(t), x2(t)], t = 0..20, [[x1(0) = 5, x2(0) = 1]], stepsize = 0.05)$$



Решение уравнения второго порядка в пакете Maple v.12

```
> Eq := x*((D@@2)(y))(x)-(x+1)*(D(y))(x)-(2*(x-1))*y(x) = 0;
        x*((D@@2)(y))(x)-(x+1)*(D(y))(x)-(2*(x-1))*y(x) = 0
> Orcon := y(1) = exp(2), (D(y))(1) = 2*exp(2);
    y(1) = exp(2), D(y)(1) = 2 exp(2)
> dsolve({Eq, Orcon}, y(x));
                        y(x) = exp(2 x)
```