Подстановки, оптимизация и решение дифференциальных уравнений (задача Коши)

Некоторые аспекты интегрирования, нахождения целевой функции и решения диф. уравнений в MathCad Maple, Mathematica

Подстановки

$$f(x) := \frac{1}{\cos(x)\cdot(1+\cos(x))} \qquad \tan(x) - t \text{ solve}, x \rightarrow \operatorname{atan}(t)$$

$$f(x) \text{ substitute}, x = \operatorname{atan}(t) \rightarrow \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}+1} \qquad x(t) := \operatorname{atan}(t) \qquad \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow \frac{1}{t^2+1}$$

$$\frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}+1}\cdot\frac{1}{t^2+1} \text{ simplify} \rightarrow \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{t^2} \qquad f1(t) := \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{t^2}$$

Вычисление интегралов с переменным верхним пределом

$$t(x) := \tan(x) \qquad t\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad t(0) = 0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + t1^2} + 1}\,dt1 \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t1^2 + 1} + 1}\,dt1 = 0.467$$

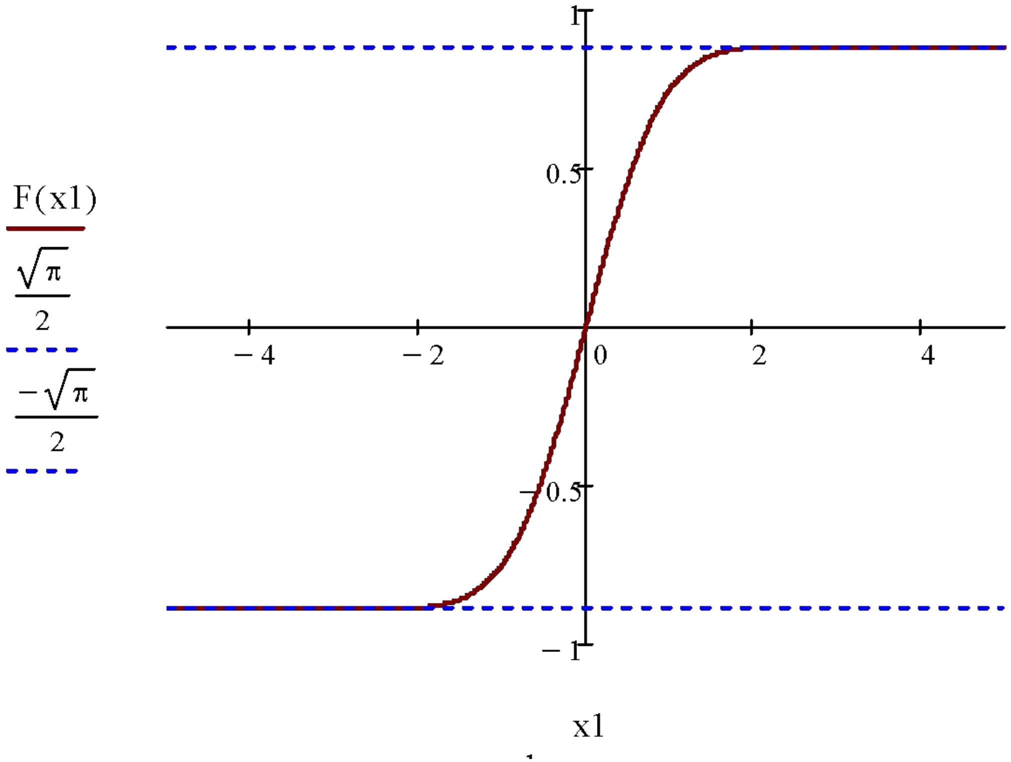
$$\int_0^{x1} \exp\left(-t^2\right) dt \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erf}(x1)}{2}$$

$$F(x1) := \int_0^{x1} \exp\left(-t^2\right) dt \qquad F(0) = 0 \qquad F(1) = 0.747 \qquad F(3) = 0.886$$

$$\frac{d}{dx1}F(x1) \rightarrow e^{-x1^2} \qquad \frac{d^2}{dx1^2}F(x1) \rightarrow -2\cdot x1\cdot e^{-x1^2}$$

$$\lim_{x1 \rightarrow \infty^+} F(x1) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \lim_{x1 \rightarrow -\infty} F(x1) \rightarrow -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

График функции вероятности



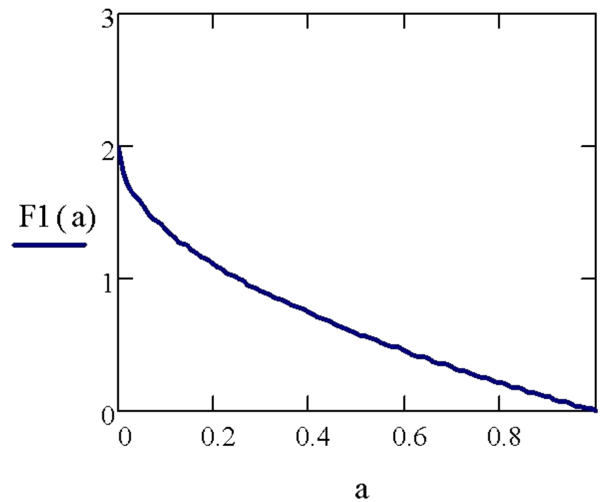
Пример интеграла с переменным пределом

$$f1(x2) := \frac{1}{\sqrt{x2}}$$

$$\int_0^1 f1(x2)\,dx2 \rightarrow 2$$

$$F1(a) := \int_a^1 f1(x2)\,dx2$$

$$\lim_{a \to 0} F1(a) \rightarrow 2$$



Построение графиков и нахождение параметров уравнений заданных в параметрическом виде

$$\lambda := 0.8$$

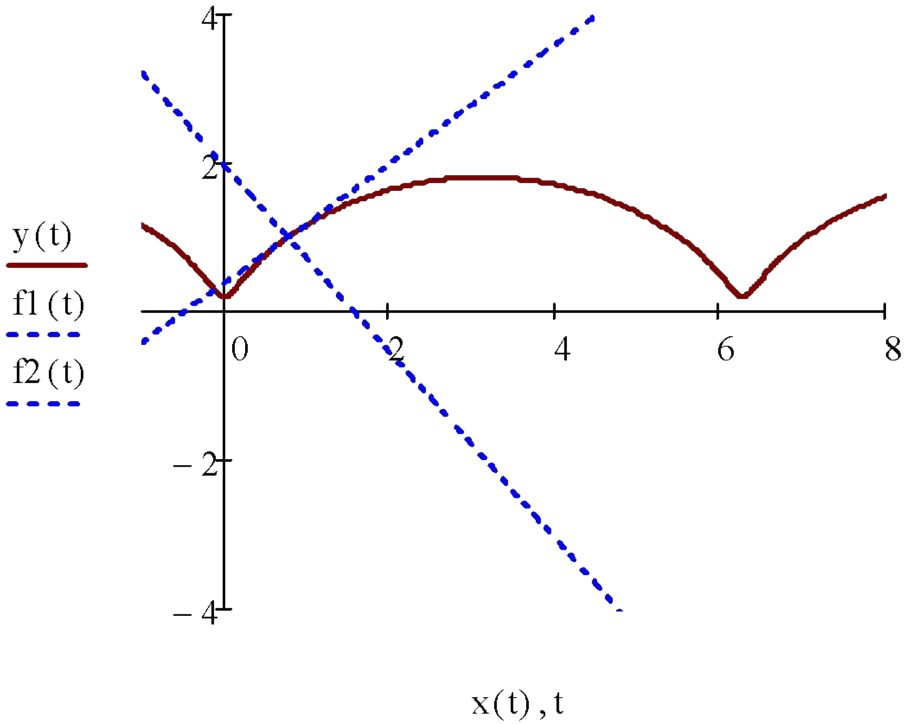
$$x(t) := t - \lambda \cdot \sin(t) \qquad y(t) := 1 - \lambda \cdot \cos(t)$$

$$\phi(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad \psi(t) := \frac{d}{dt}y(t) \qquad k(t) := \frac{\psi(t)}{\phi(t)}$$

$$x0 := x\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad y0 := y\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad f1(t) := k\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot(t - x0) + y0$$

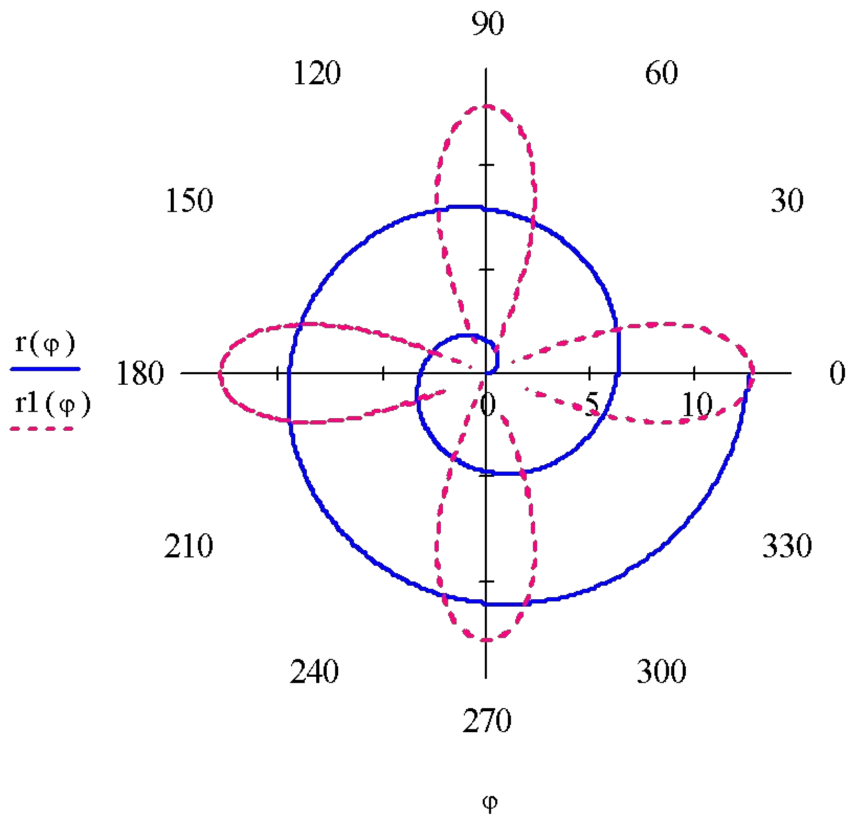
$$f2(t) := \frac{-1}{k\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cdot(t - x0) + y0$$

Графическое представление функций заданных в параметрическом виде



Графическое представление уравнений, заданных в полярных координатах

$a := 1 \qquad r(\varphi) := a\cdot\varphi \qquad \varphi := 0, 0.01 .. 4\cdot\pi \qquad r1(\varphi) := 9\cdot\sqrt{2\cdot\cos(4\varphi)}$



Оптимизация функций. Классическое решение

$$f(x,y) := 2\cdot(x - 3.07)^2 + (y - 10.03)^2 - 0.2(x - 5.07)^3$$

$$x := 1$$

$$y := 1$$

Given

$$0 < x < 15$$

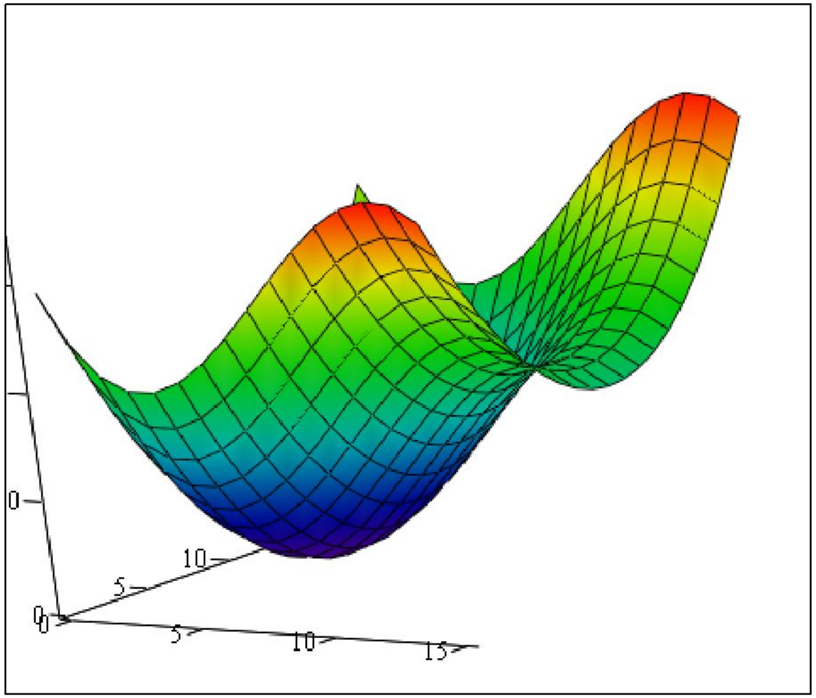
$$0 < y < 20$$

$$\text{Minimize}(f, x, y) = \begin{pmatrix} 3.459 \\ 10.03 \end{pmatrix}$$

График поверхности оптимизации

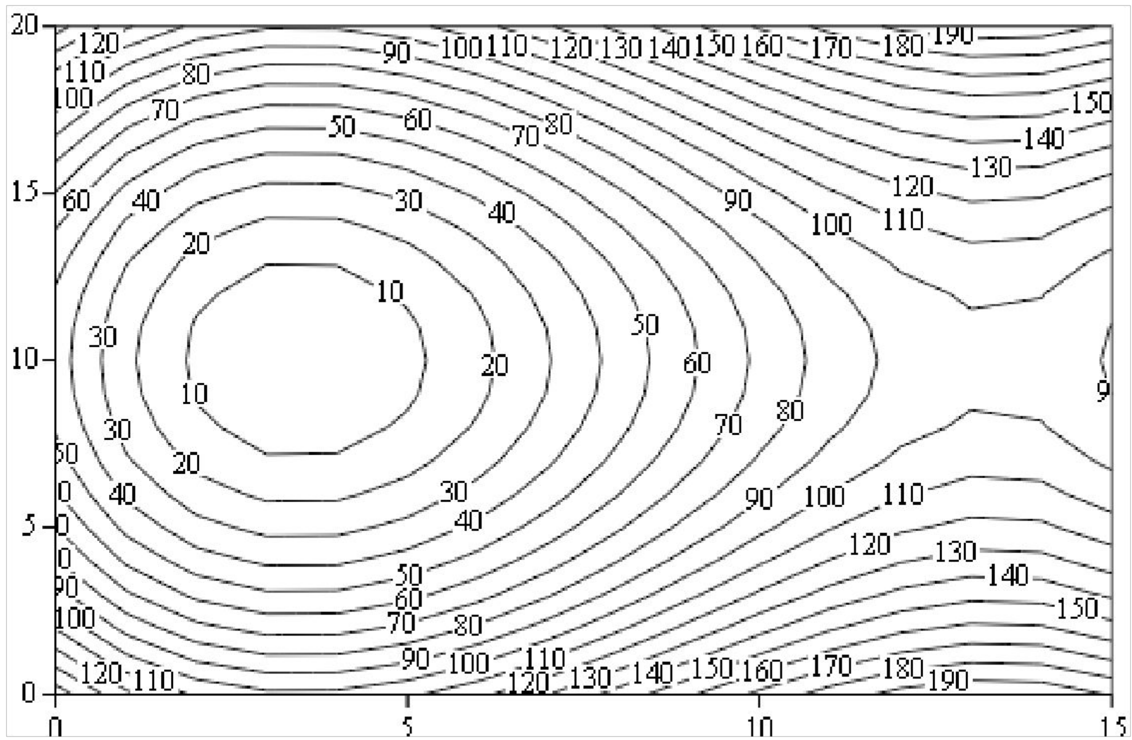
$x := 0 .. 15 \qquad y := 0 .. 20$

$D_{x,y} := f(x,y)$



D

Контурный график заданной функции оптимизации

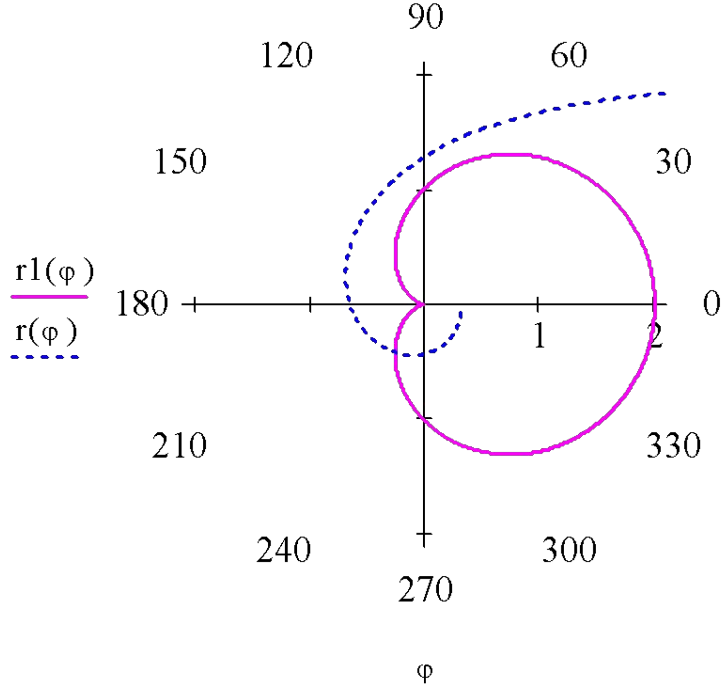


D

Построение графиков функций в полярных координатах

$a := 2.0$

$$r(\varphi) := \frac{a}{\varphi} \qquad r1(\varphi) := a\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \qquad r2(\varphi) := a^{\varphi}$$



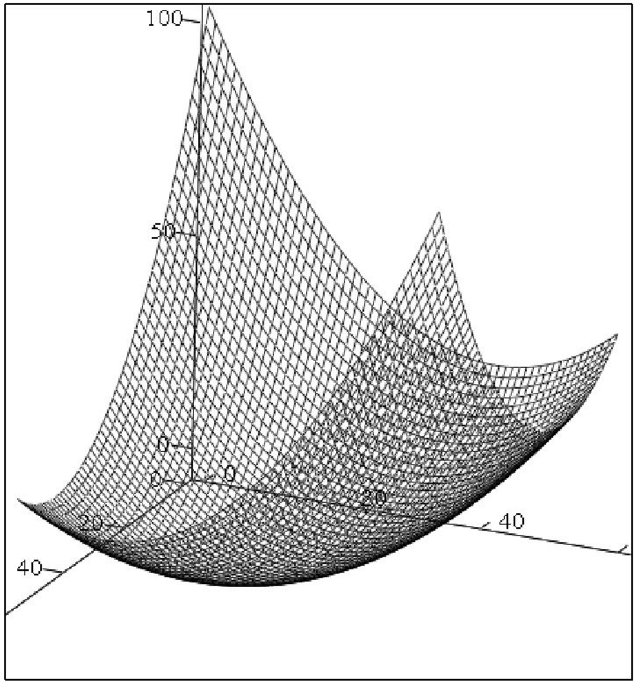
Второй (матричный) способ построения графика поверхности

$i := 0..60 \qquad j := 0..60$

$x(i) := -5.0 + \frac{i}{5} \qquad y(j) := -5.0 + \frac{j}{5}$

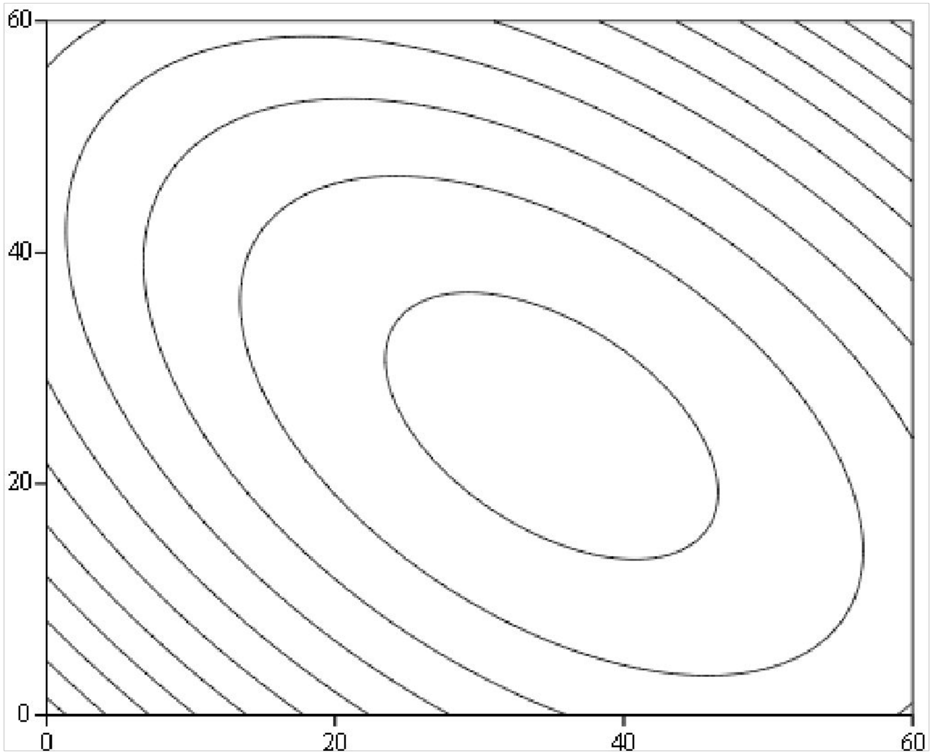
$f2(x,y) := x^2 + x \cdot y + y^2 - 4 \cdot x - 2 \cdot y$

$D1_{i,j} := f2(x(i), y(j))$



D1

Контурный график поверхности

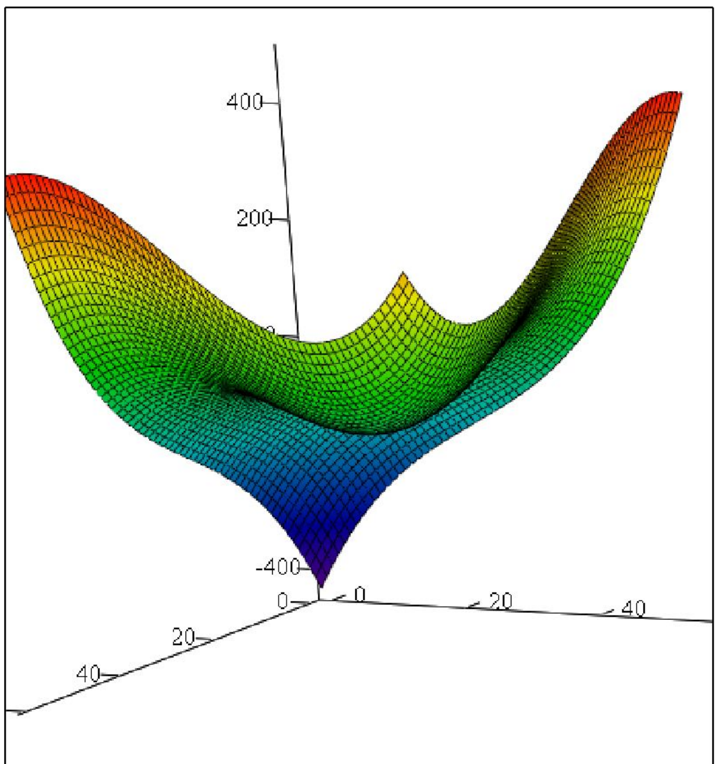


D1

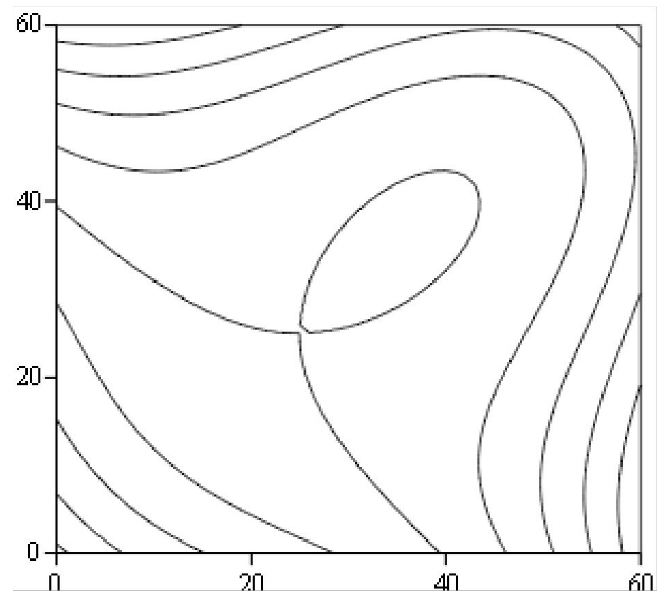
Нахождение целевой функции

$x(i) := -5 + \frac{i}{5.0}$ $\qquad$ $y(j) := -5 + \frac{j}{5.0}$

$f3(x, y) := x^3 + y^3 - 7 \cdot x \cdot y$ $\qquad$ $D2_{i,j} := f3(x(i), y(j))$



D2



D2

Нахождение локального минимума

$$f3(x,y) := x^3 + y^3 - 7\cdot x\cdot y$$

$x := 1.2 \quad y := 1.2$

Given

$(0 < x < 2.5)$

$0 < y < 2.5$

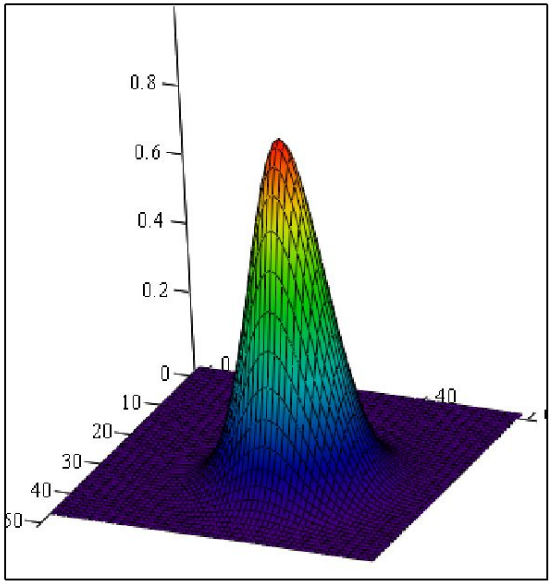
$$\mathrm{Minimize}(f3, x, y) = \begin{pmatrix} 2.333 \\ 2.333 \end{pmatrix}$$

Максимум двумерного гауссиана

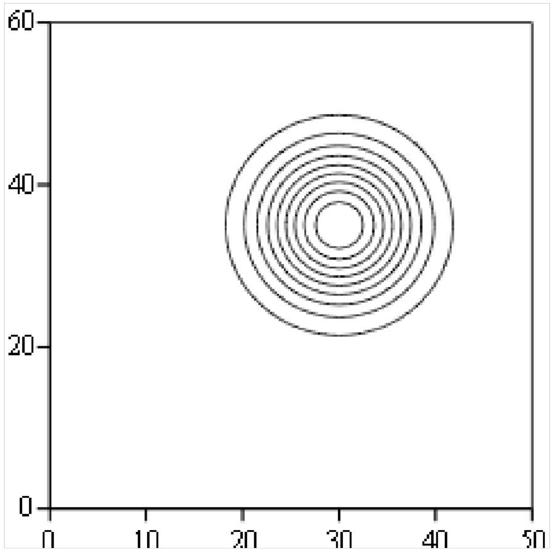
$i := 0..50 \qquad j := 0..60$

$x(i) := -2 + \frac{i}{10} \qquad y(j) := -2 + \frac{j}{10}$

$f4(x,y) := \exp\left[-\left[\frac{(x-1)^2}{0.6}\right] - \frac{(y-1.5)^2}{0.8}\right] \qquad D3_{i,j} := f4(x(i), y(j))$



D3



D3

Нахождение корней функций одной переменной

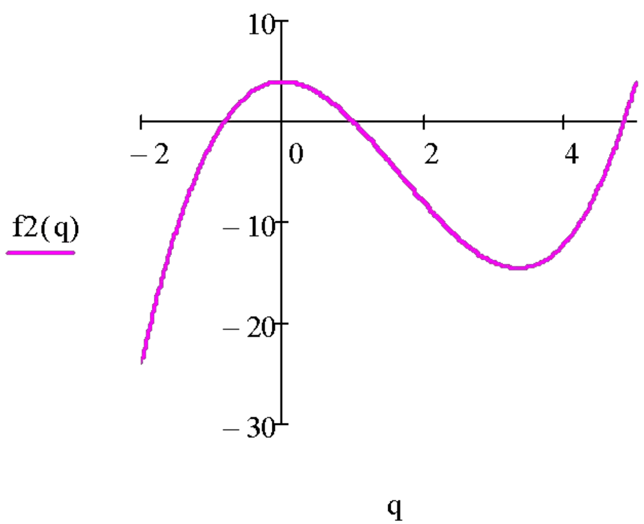
$f2(x) := x^3 - 5\cdot x^2 + 4$

$$root(f2(x), x, -2, 6) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2\cdot\sqrt{2} + 2 \\ 2 - 2\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Given

$x^3 - 5\cdot x^2 + 4 = 0$

$Find(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot\sqrt{2} + 2 & 2 - 2\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$



Решение задачи безусловной оптимизации

- Решение задачи безусловной оптимизации для заданной целевой функции двух переменных f(x) на множестве X.

$$f(x1, x2) := x1^3 + 8 \cdot x2^3 - 6 \cdot x1 \cdot x2 + 1$$

$$df1(x1, x2) := \frac{d}{dx1} f(x1, x2) \qquad df1(x1, x2) \rightarrow 3 \cdot x1^2 - 6 \cdot x2$$

$$df2(x1, x2) := \frac{d}{dx2} f(x1, x2) \qquad df2(x1, x2) \rightarrow 24 \cdot x2^2 - 6 \cdot x1$$

Нахождение стационарных точек

Given

$$\mathrm{df1}(x1, x2) = 0$$

$$\mathrm{df2}(x1, x2) = 0$$

$$X := \mathrm{Find}(x1, x2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{4} & -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{4} \end{pmatrix}$$

$$X1 := X^{\langle 0 \rangle} \qquad X2 := X^{\langle 1 \rangle}$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Построение матрицы Гессе

$$\mathrm{ddf11}(x1, x2) := \frac{d}{dx1}\mathrm{df1}(x1, x2) \qquad \mathrm{ddf11}(x1, x2) \rightarrow 6 \cdot x1$$

$$\mathrm{ddf21}(x1, x2) := \frac{d}{dx2}\mathrm{df1}(x1, x2) \qquad \mathrm{ddf21}(x1, x2) \rightarrow -6$$

$$\mathrm{ddf12}(x1, x2) := \frac{d}{dx1}\mathrm{df2}(x1, x2) \qquad \mathrm{ddf12}(x1, x2) \rightarrow -6$$

$$\mathrm{ddf22}(x1, x2) := \frac{d}{dx2}\mathrm{df2}(x1, x2) \qquad \mathrm{ddf22}(x1, x2) \rightarrow 48 \cdot x2$$

Построение матрицы Гессе (продолжение). Проверка 1 стационарной точки на экстремум

$X0 := X1 \qquad X0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x1 := X0_0 \qquad x2 := X0_1$

$H_{0,0} := ddf11(x1, x2) \qquad H_{0,1} := ddf12(x1, x2) \qquad H_{1,0} := ddf21(x1, x2)$

$H_{1,1} := ddf22(x1, x2)$

$H = \begin{pmatrix} 1.568 \times 10^{-15} & -6 \\ -6 & 6.063 \times 10^{-14} \end{pmatrix} \qquad |H| = -36$

Проверка матрицей Гессе второй стационарной точки на экстремум

$X0 := X2 \qquad X0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad x1 := X0_0 \qquad x2 := X0_1$

$H_{0,0} := ddf11(x1, x2) \qquad H_{0,1} := ddf12(x1, x2) \qquad H_{1,0} := ddf21(x1, x2)$

$H_{1,1} := ddf22(x1, x2)$

$H = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix} \qquad |H| = 108$

Подтверждение правильности нахождения точки минимума

Given

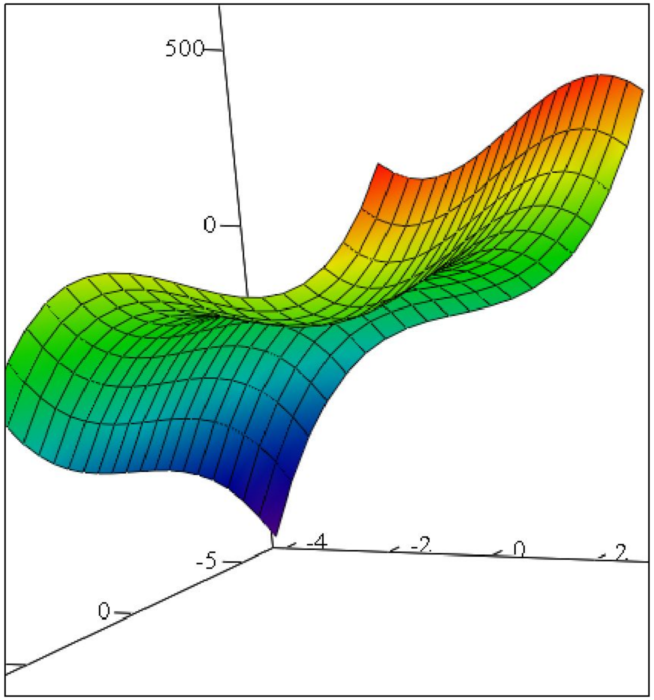
$$0 < x1 < 2$$

$$0 < x2 < 2$$

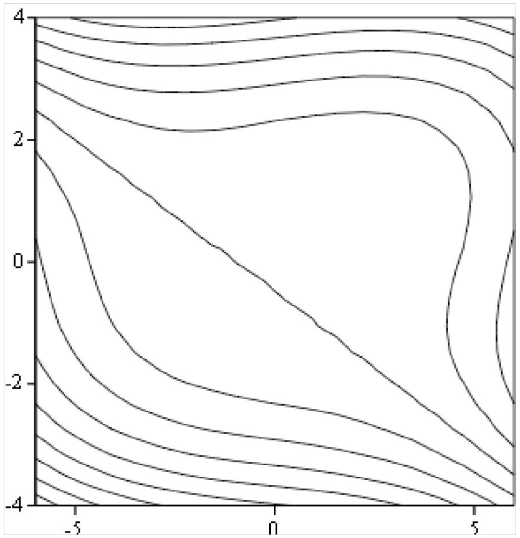
$$\mathrm{Minimize}(f, x1, x2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Построение графика функции и её контурного графика

D := CreateMesh(f , −6 , 6 , −4 , 4)



D



D

Решение дифференциальных уравнений 1 и 2 –го порядка

- Диф уравнение имеет вид: y' = (1+x*y)/x^2, y(1) = 0, 1<=x<=2

$$ORIGIN := 1$$

$$y_1 := 0$$

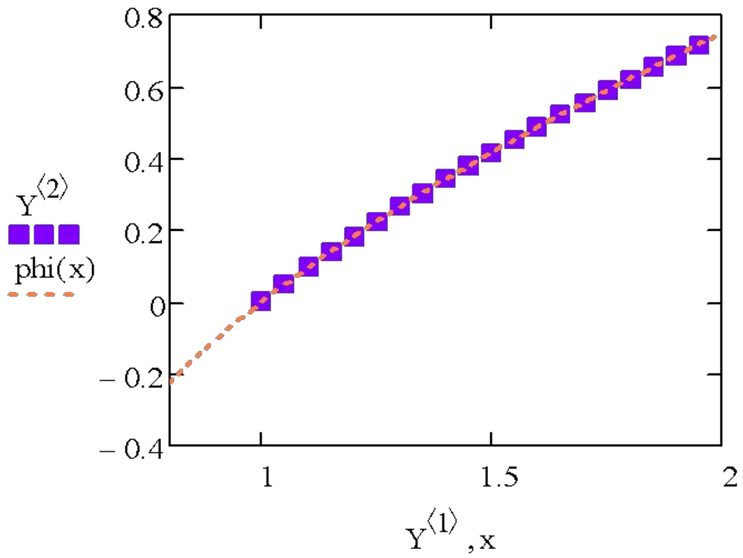
- Решение задачи методом Рунге-Кутта предполагает использование функции rkfixed (y, a, b, N, D). a, b – границы отрезка, N - число узлов на сетке.

$$D(x,y) := \frac{1 + x \cdot y_1}{x^2} \qquad phi(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$$Y := rkfixed(y, 1, 2, 20, D)$$

Решение уравнения 1 порядка

$Y := \mathrm{rkfixed}(y, 1, 2, 20, D)$



Y =

	1	2
1	1	0
2	1.05	0.049
3	1.1	0.095
4	1.15	0.14
5	1.2	0.183
6	1.25	0.225
7	1.3	0.265
8	1.35	0.305
9	1.4	0.343
10	1.45	0.38
11	1.5	0.417
12	1.55	0.452
13	1.6	0.488
14	1.65	...

Решение однородного уравнения 2 порядка

- Уравнение второго порядка имеет вид: xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0.

$$y_1 := y \qquad y_2 := \frac{d}{dx}y$$

$$\frac{d}{dx}y_1 = \blacksquare \cdot y_2 \qquad \frac{d}{dx}y_2 = \blacksquare \cdot \frac{x+1}{x}\cdot y_2 + 2\cdot\frac{(x-1)}{x}\cdot y_1$$

- Строим вектор-столбец начальных условий и вектор-функцию правых частей:

$$ORIGIN := 1$$

$$N := 10$$

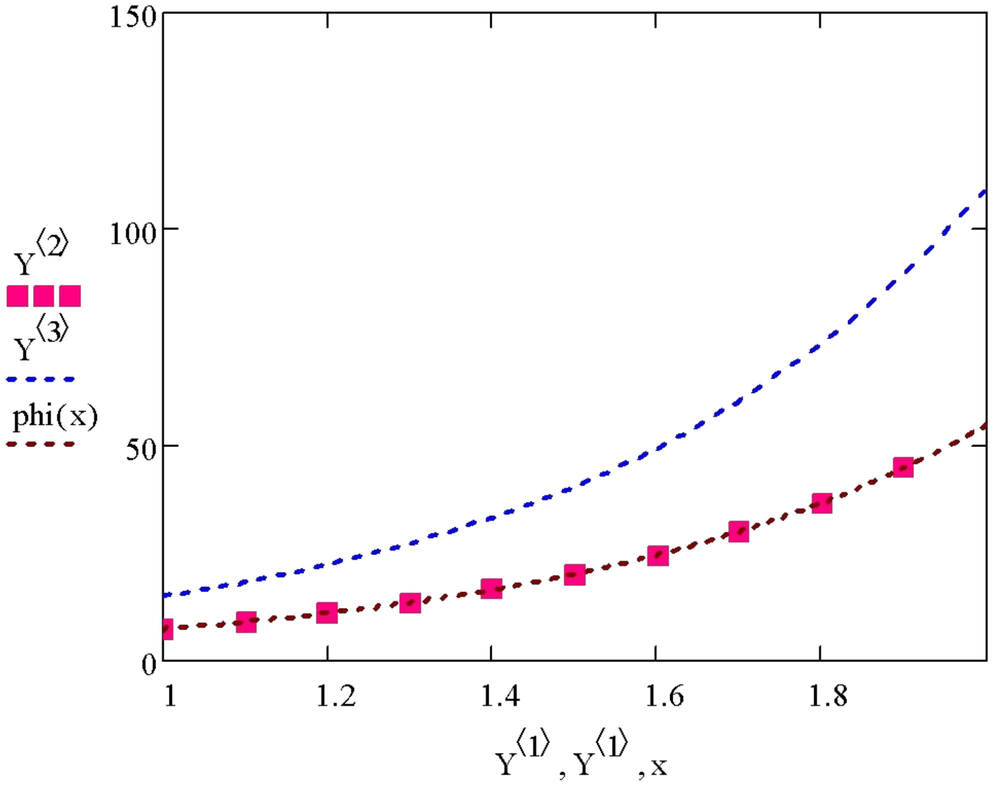
$$y := \begin{pmatrix} e^2 \\ 2\cdot e^2 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{x+1}{x}\cdot y_2 + 2\cdot\frac{x-1}{x}\cdot y_1 \end{pmatrix}$$

Решение дифуравнения 2 порядка методом Рунге-Кутта

$Y := \mathrm{rkfixed}(y, 1, 2, N, f)$

$\mathrm{phi}(x) := e^{2 \cdot x}$



Классическое решение диф. Уравнений с использованием функции Odesolve(x, xend)

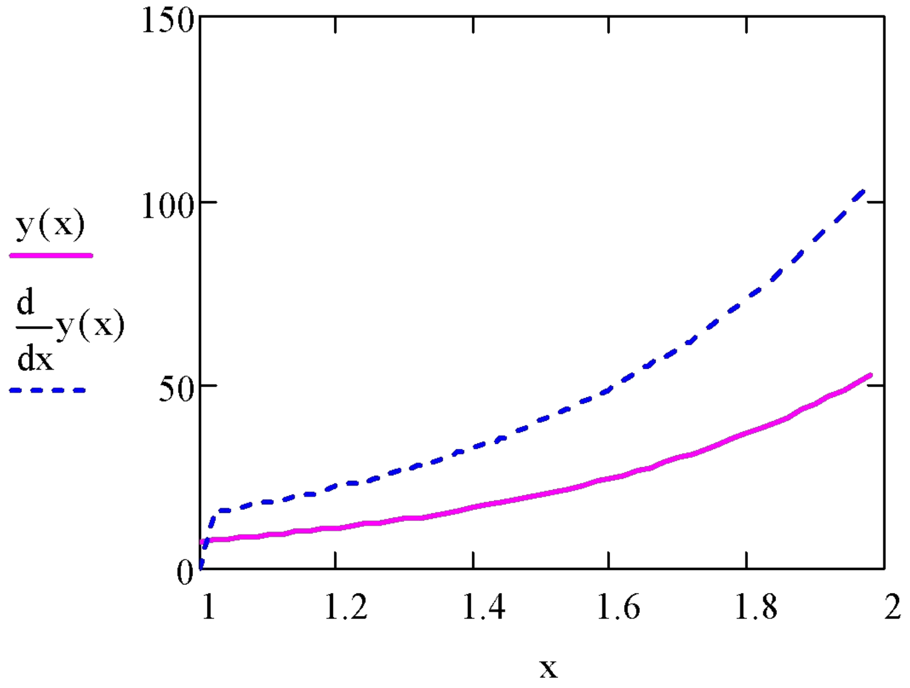
Given

$$x \cdot \frac{d^2}{dx^2} y(x) - (x+1) \cdot \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) - 2 \cdot (x-1) \cdot y(x) = 0$$

$$y(1) = e^2 \qquad y'(1) = 2 \cdot e^2$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(x, 2) \qquad x := 1, 1.02 .. 2$$

График восстановленной функции и её производной



Решение системы двух дифуравнений первого порядка с начальными условиями.

- 5. Исследовать поведение системы, моделирующей двухмодовый режим взаимодействия амплитуд полей лазера. Построить фазовую траекторию и режим временной эволюции каждой моды.

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 + \alpha x_1^{\,2} \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2 + \alpha x_2^{\,2} \end{cases}$$

- Находим решение следующим образом, как показано на рабочей странице MathCad:

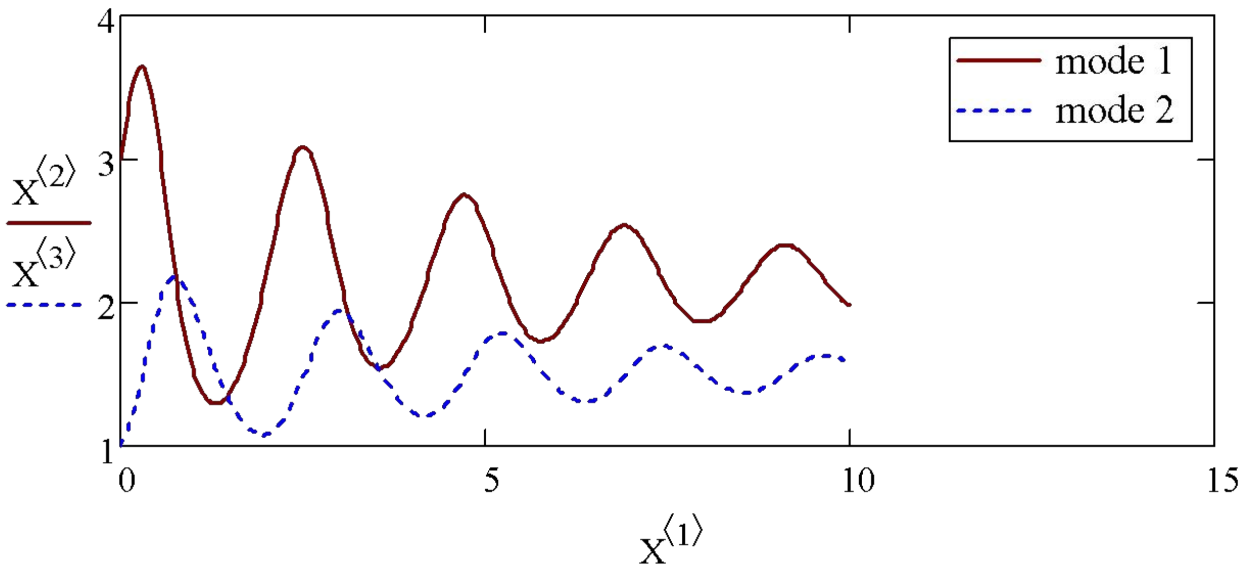
$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$a := 4 \quad b := 2.5 \quad c := 2 \quad d := 1 \quad \mathrm{alfa} := 0.1$$

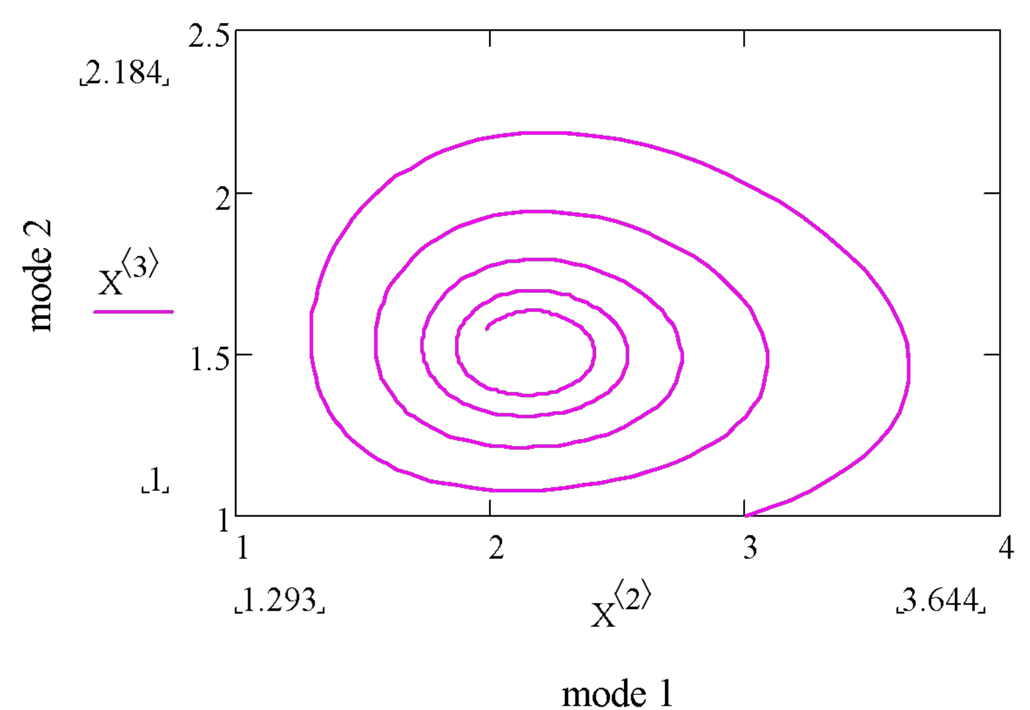
$$F(t, x) := \begin{bmatrix} (a - b \cdot x_2) \cdot x_1 - \mathrm{alfa} \cdot (x_1)^2 \\ (-c + d \cdot x_1) \cdot x_2 - \mathrm{alfa} \cdot (x_2)^2 \end{bmatrix}$$

Порядок решения и графики временной эволюции амплитуд

$$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$$



Фазовый портрет системы



Наблюдается устойчивый фокус, соответствующий стабилизации мод и переход их в положение с другой энергией в результате взаимодействия.

Числовой формат вывода

Значение амплитуд в зависимости от времени задается в виде матрицы, состоящей из трех столбцов Y1- время, Y2 – амплитуда моды 1, Y3 – амплитуда моды 2.

X =

	1	2	3
1	0	3	1
2	0.025	3.089	1.024
3	0.05	3.174	1.051
4	0.075	3.256	1.08
5	0.1	3.333	1.113
6	0.125	3.403	1.148
7	0.15	3.467	1.187
8	0.175	3.522	1.228
9	0.2	3.568	1.272
10	0.225	3.604	1.32
11	0.25	3.629	1.369
12	0.275	3.643	1.422
13	0.3	3.644	1.476
14	0.325	3.633	...

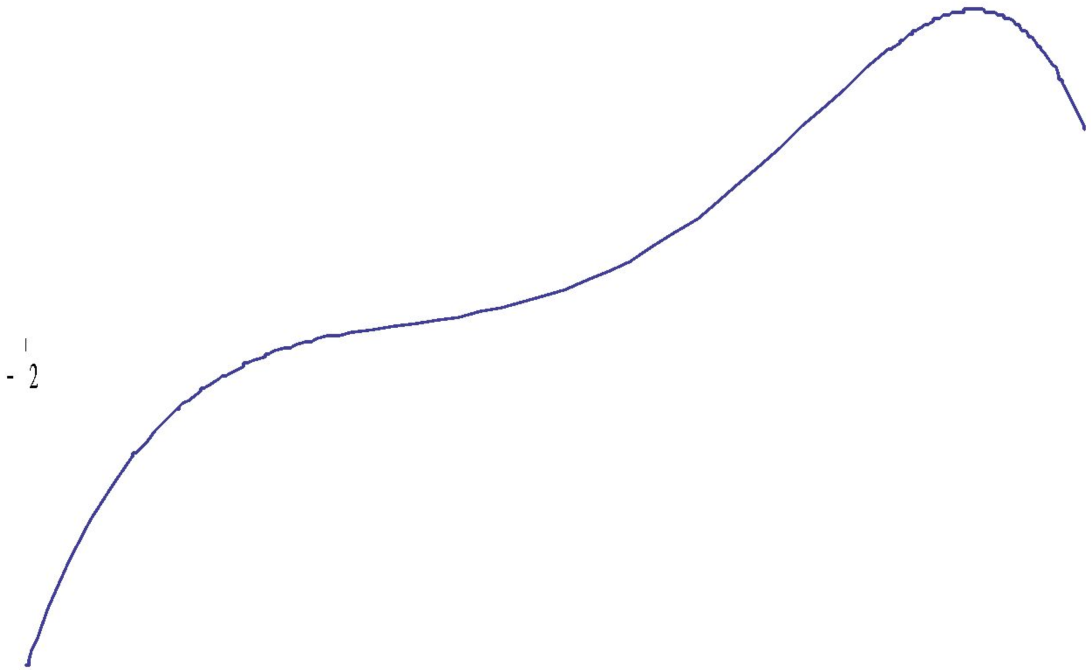
Решение дифуравнений в пакете Mathematica v. 7.

- DSolve[{x*y''[x]-(x+1)*y'[x]-2*(x)*y[x]==0,y[1]==e^2,y'[1]==2*e^2},y[x],x]

```
DSolve[{y''[x] + 2* y'[x] + y[x] Š 4* ã^x* (Sin[x] + Cos[x]), y[0] Š 1,
  y'[0] Š 1}, y[x], x]

y1 = -(1/25) ã^-x (-29 - 30 x + 4 ã^2 x Cos[x] - 28 ã^2 x Sin[x]);
Plot[y1, {x, -2, 3}]
```

График полученной функции



Решение системы дифуравнений первого порядка в пакете Mathematica v.7

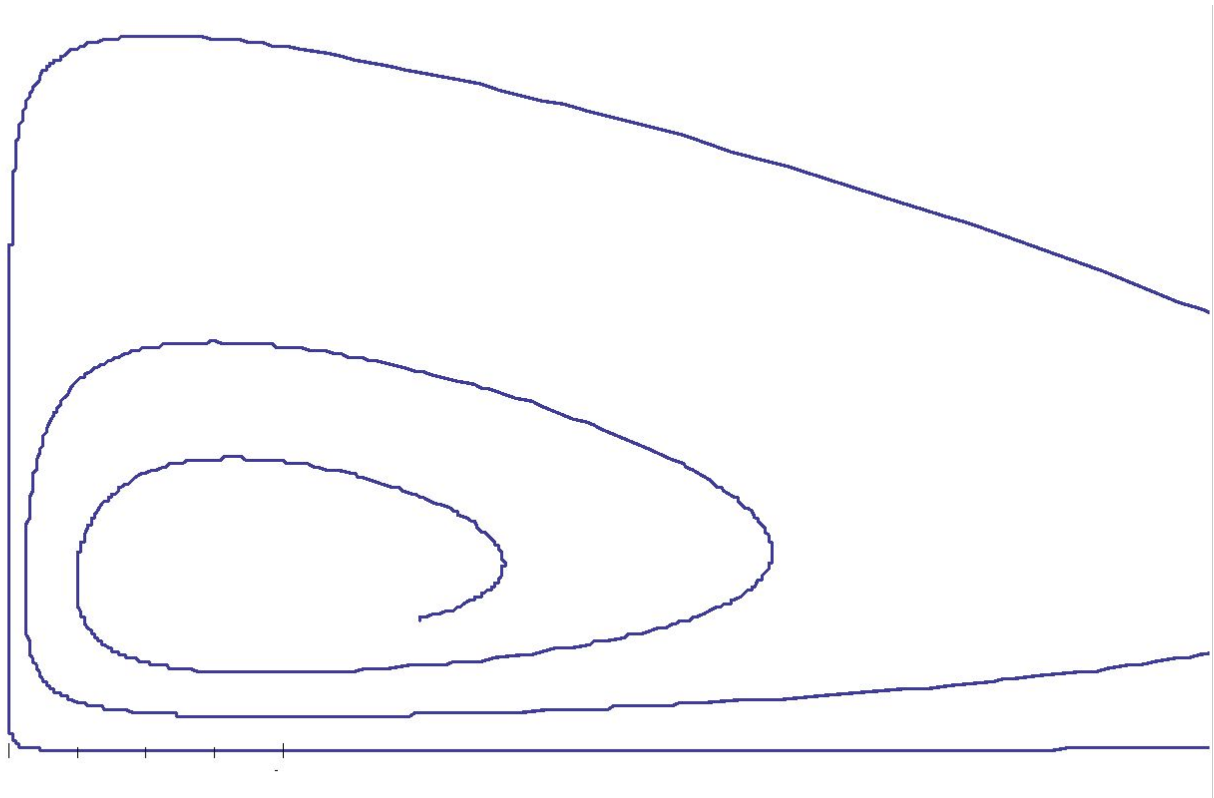
```
a = 5
b = 4
c = 2
d = 1
alfa = 0.17
dd = NDSolve[{x1'[t] == (a - b * x2[t]) * x1[t] + alfa * x1[t]^2,
   x2'[t] == (- c + d * x1[t]) * x2[t] + alfa * x2[t]^2, x1[0] == 3, x2[0] == 1},
   {x1, x2}, {t, 20}]
```

NDSolve::ndsz: At t == 9.578891340154772`, step size is effectively zero; singularity or stiff system suspected. ‡

```
{{x1 → InterpolatingFunction[{{0., 9.57889}}, <>],
  x2 → InterpolatingFunction[{{0., 9.57889}}, <>]}}
```

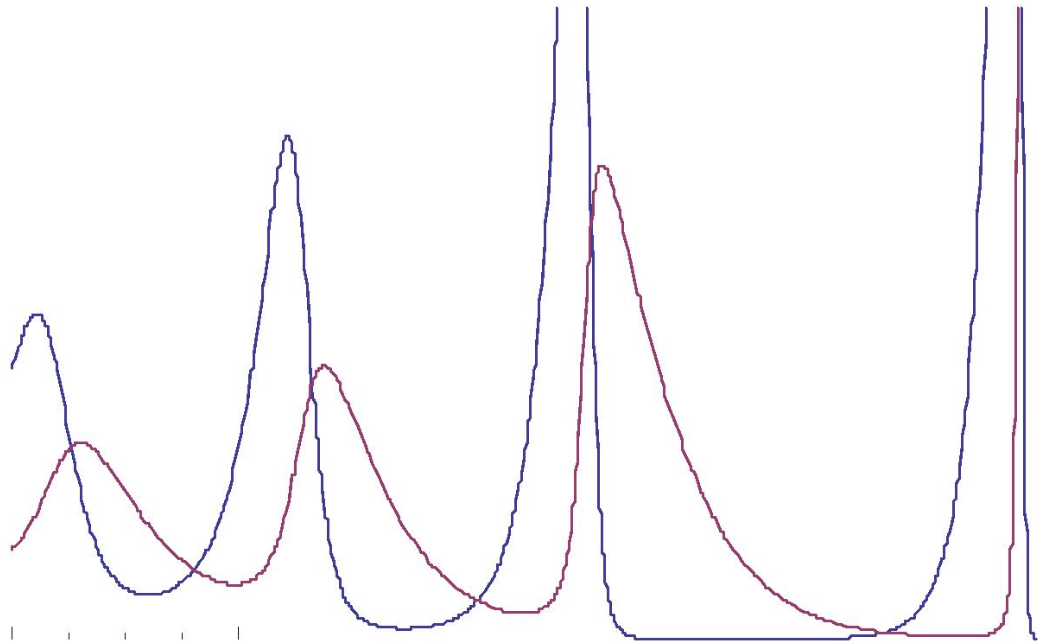
Построение фазового портрета с помощью параметрического графика

```
ParametricPlot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. dd], {t, 0, 9}]
```



Временная эволюция мод с начальными параметрами а, в, с, alfa

```
Plot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. dd], {t, 0, 9}, PlotStyle → Automatic]
```



Задание новых параметров задачи

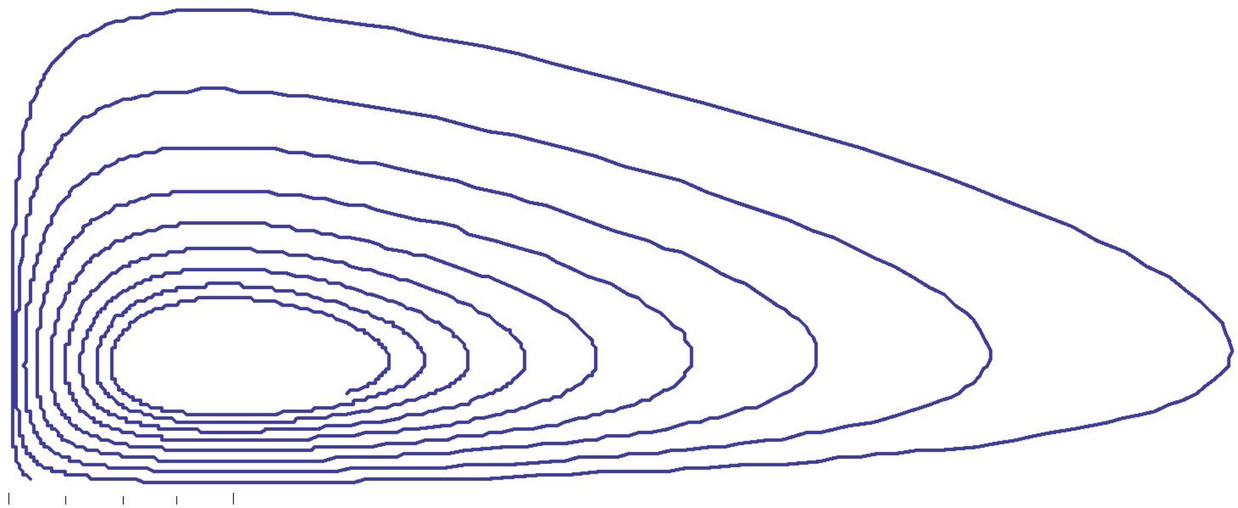
```
alfa = 0.05

ddl = NDSolve[{x1'[t] == (a - b * x2[t]) * x1[t] + alfa * x1[t]^2,
   x2'[t] == (-c + d * x1[t]) * x2[t] + alfa * x2[t]^2, x1[0] == 3, x2[0] == 1},
   {x1, x2}, {t, 20}]

{{x1 -> InterpolatingFunction[{{0., 20.}}, <>],
  x2 -> InterpolatingFunction[{{0., 20.}}, <>]}}
```

Фазовый портрет системы при слабом взаимодействии мод

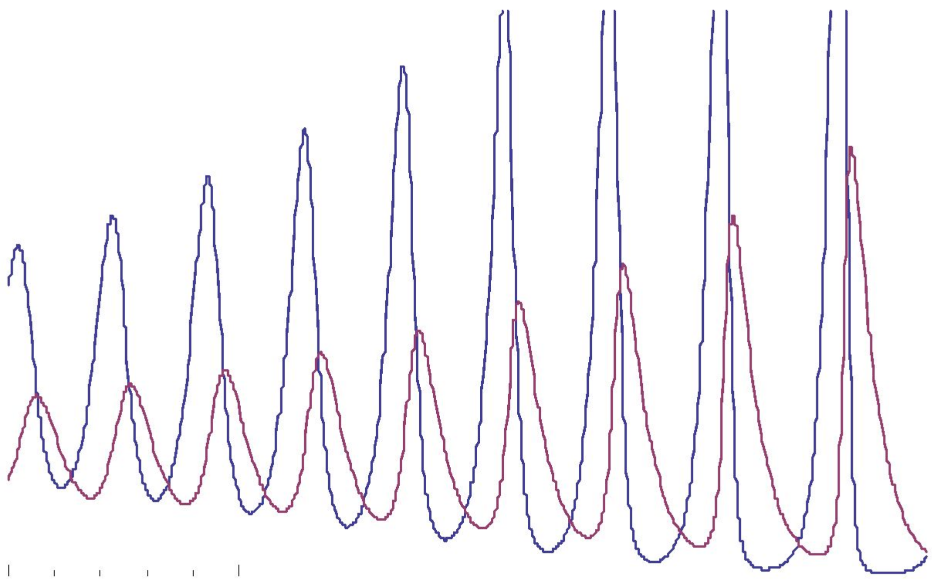
```
ParametricPlot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. dd1], {t, 0, 20}]
```



Временная эволюция амплитуд

Наблюдается более медленное развитие неустойчивости, вызванное взаимодействием мод

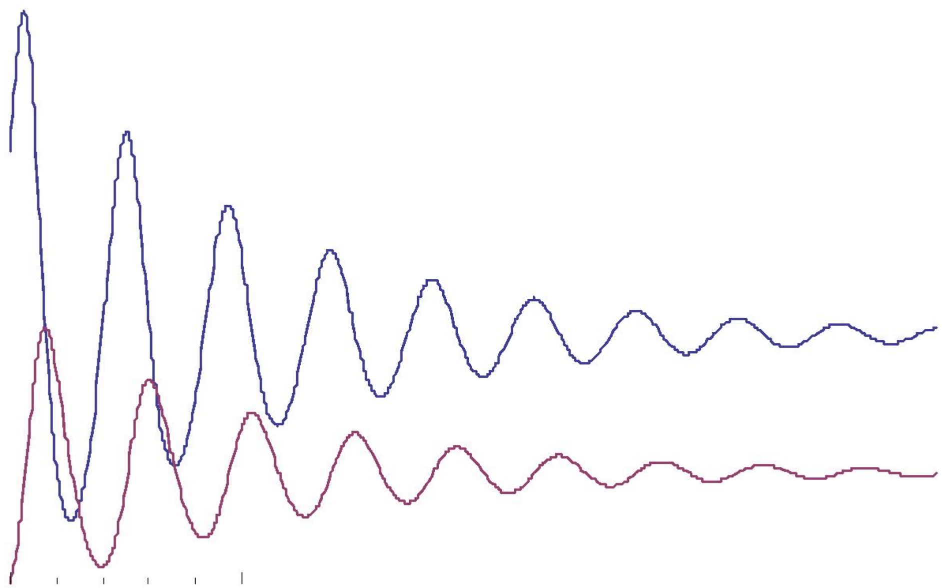
```
Plot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. dd1], {t, 0, 20}]
```



Динамика взаимодействия мод в устойчивом режиме

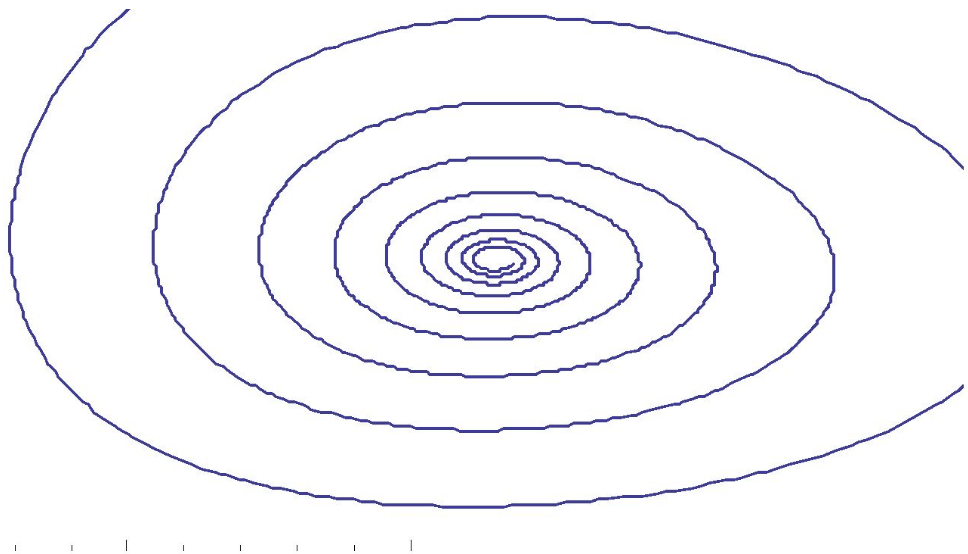
Задание новых параметров системы

```
a = 4
b = 2.5
alfa = -0.1
Plot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. dd3], {t, 0, 20}]
```



Фазовый портрет системы в устойчивом режиме

```
ParametricPlot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. dd3], {t, 0, 20}]
```



Наблюдается устойчивый фокус

Дифуравнения, обеспечивающие устойчивое развитие системы

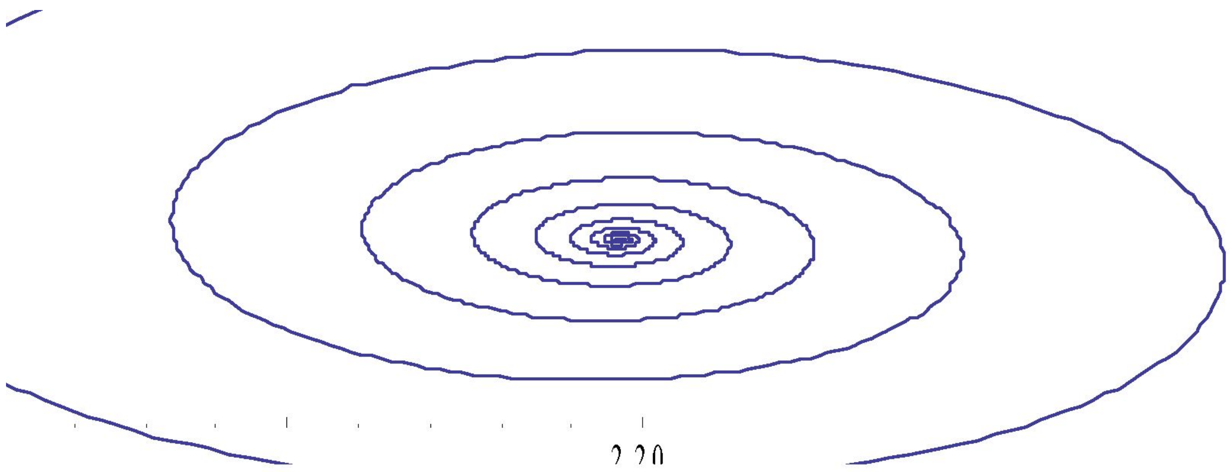
```
a = 5
b = 4
c = 2
d = 1
alfa = 0.17
```

```
ss = NDSolve[{x1'[t] == (a - b * x2[t]) * x1[t] - alfa * x1[t]^2,
   x2'[t] == (-c + d * x1[t]) * x2[t] - alfa * x2[t]^2, x1[0] == 3, x2[0] == 1},
   {x1, x2}, {t, 0, 30}]

{{x1 → InterpolatingFunction[{{0., 30.}}, <>],
  x2 → InterpolatingFunction[{{0., 30.}}, <>]}}
```

Фазовый портрет системы в режиме устойчивого взаимодействия мод

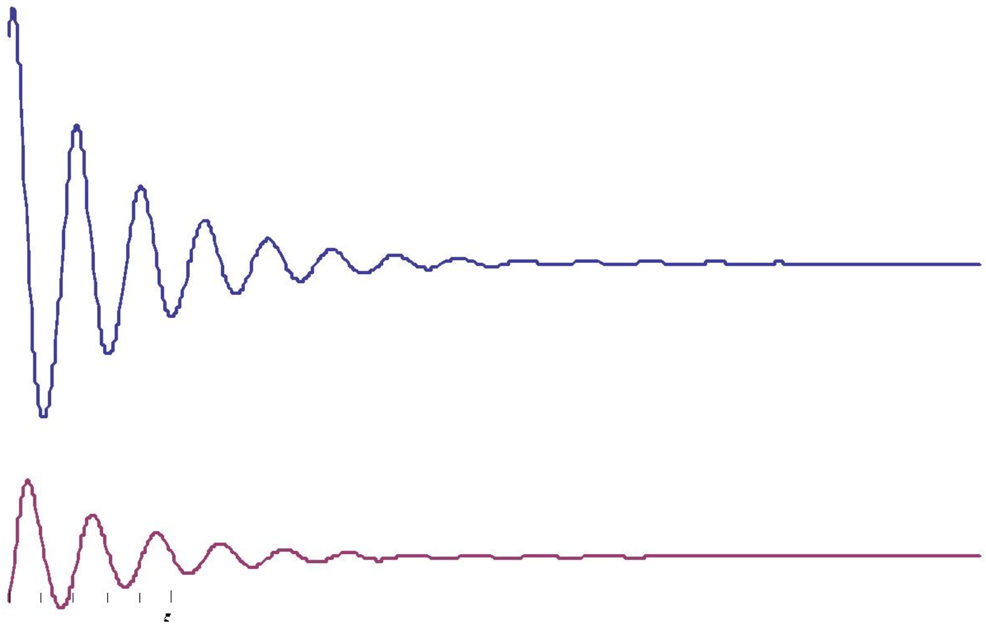
```
ParametricPlot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. ss], {t, 0, 30}]
```



- Наблюдается быстрая эволюция систмы к устойчивому состоянию с устойчивым фокусом.

Взаимодействие приводит к переходу системы в устойчивое состояние с изменением энергии мод

```
Plot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. ss], {t, 0, 30}]
```



Решение дифуравнения первого порядка методом Рунге –Кутта -4

```
sol21 = NDSolve[{y'[x] + y[x] Cos[x] == 1/2 Sin[2 x], y[0] == 0}, y[x], {x, 0, 1},
  Method -> {"ExplicitRungeKutta", "DifferenceOrder" -> 4}, StartingStepSize -> 0.05]

z1 = Plot[{y[x] /. sol2}, {x, 0, 1}]
```

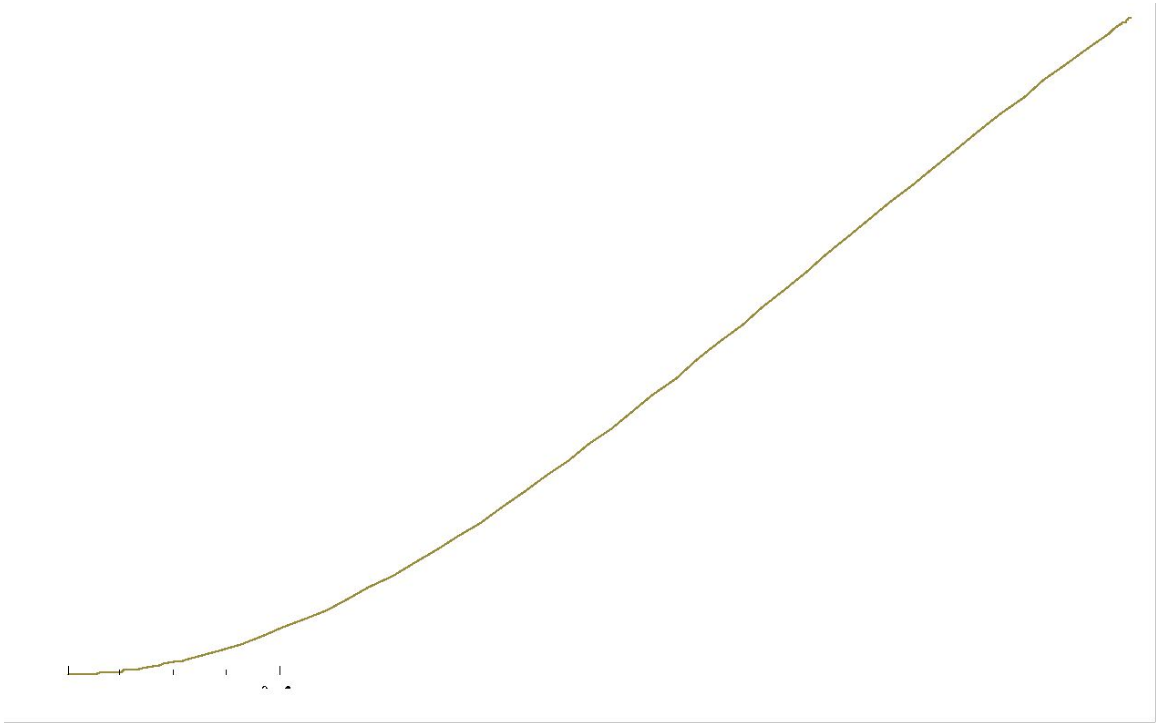
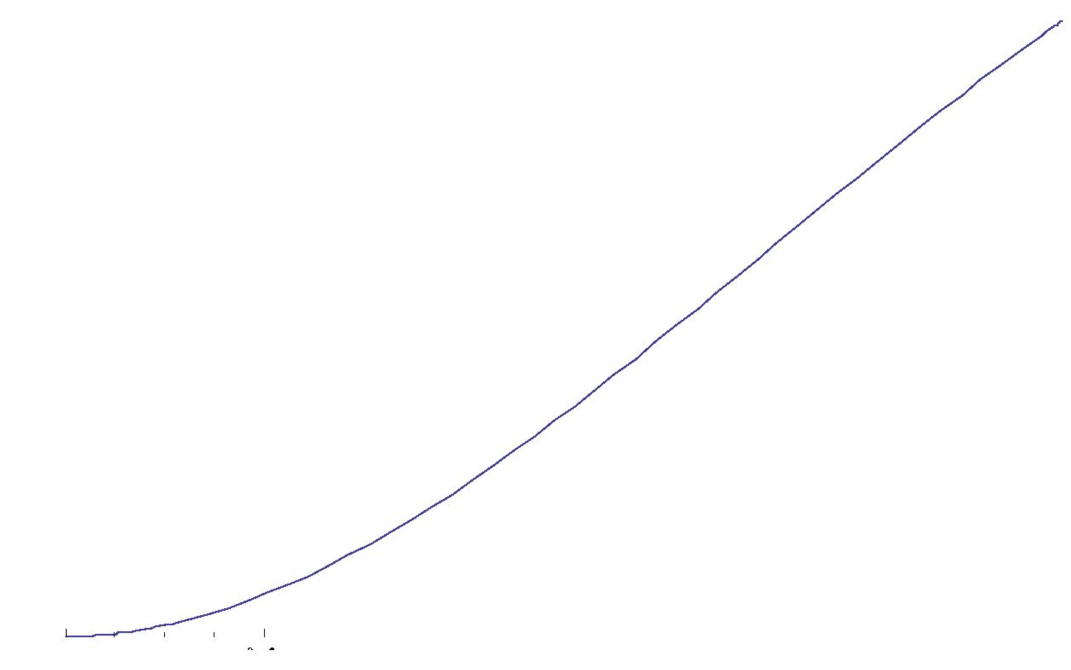


График точного решения

$$z = \text{Plot}\left[\text{Sin}[x] + e^{-\text{Sin}[x]} - 1,\ \{x, 0, 1\}\right]$$



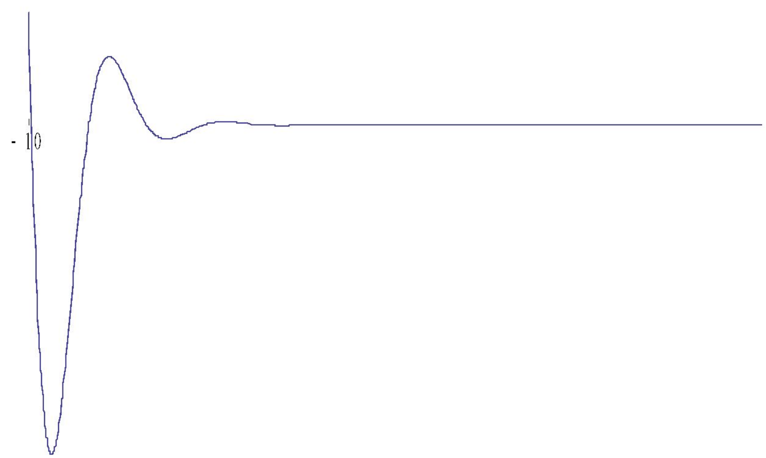
Решение неоднородного дифуравнения второго порядка

Задача 4

```
f4[x_] := - 2 Sin[x];
a1 = 2; a2 = 5; a = - π/2;
sol4 = DSolve[{y''[x] + a1 y'[x] + a2 y[x] == f4[x], y[a] == 6, y'[a] == 2}, y[x], x] // FullSimplify
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{5}\left(\mathrm{Cos}[x] - 2\,\mathrm{Sin}[x]\right) - \frac{1}{10} e^{-\frac{\pi}{2}-x}\left(56\,\mathrm{Cos}[2x] + 37\,\mathrm{Sin}[2x]\right)\right\}\right\}$$

```
Plot[y[x] /. sol4, {x, - 10, 10}, PlotRange → All]
```



Аппроксимация эмпирических данных в пакете Maple 12

> X := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9];

X := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

> Y := [.25, .111, 0.71e-1, 0.53e-1, 0.42e-1, 0.39e-1, 0.33e-1, 0.31e-1, 0.29e-1];

Y := [0.25, 0.111, 0.071, 0.053, 0.042, 0.039, 0.033, 0.031, 0.029]

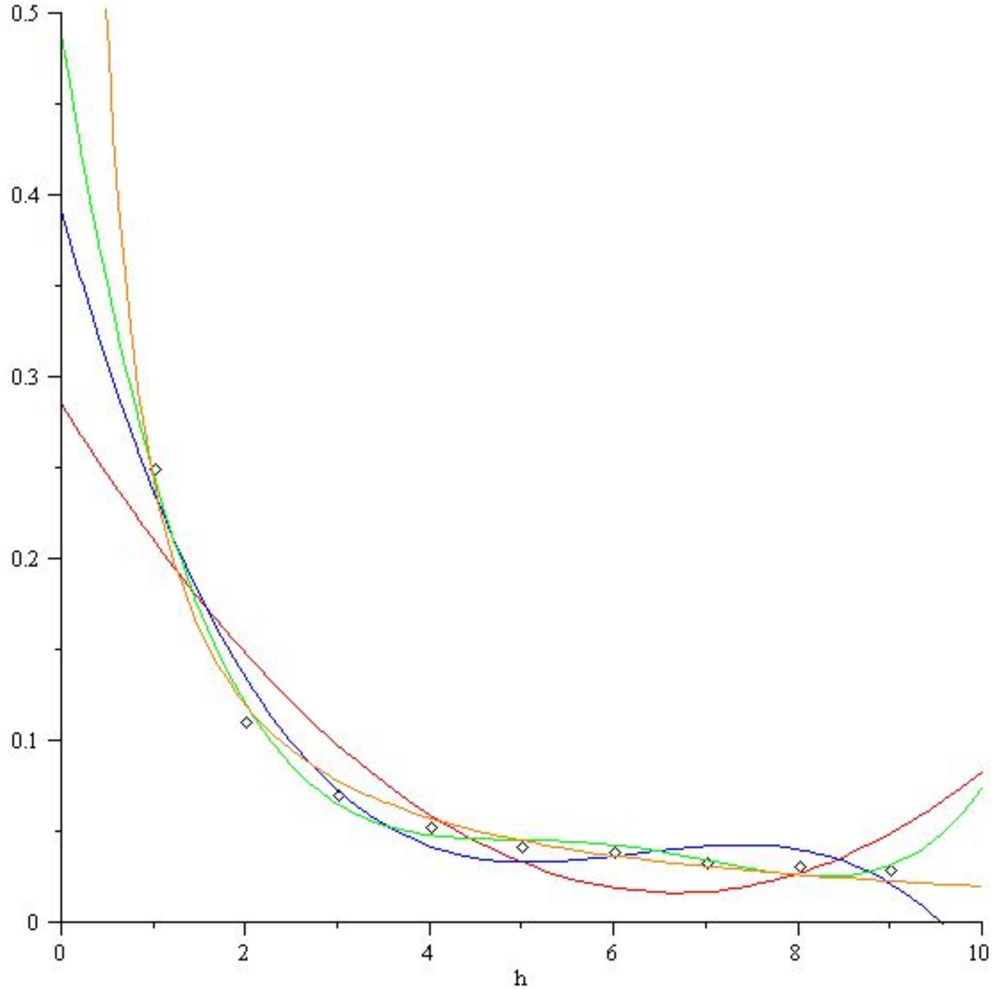
> with(CurveFitting);[BSpline, BSplineCurve, Interactive, InteractiveChangeSlider, LeastSquares, PolynomialInterpolation, RationalInterpolation, Spline, ThieleInterpolation]> af1 := proc (v) options operator, arrow; LeastSquares(X, Y, v, curve = a*v^2+b*v+c) end proc;
/ 2 \ af1 := v -> CurveFitting:-LeastSquares\X, Y, v, curve = a v + b v + c/> LeastSquares(X, Y, v, curve = a*v^2+b*v+c); 2
0.2849047619 - 0.0805147186147184140 v + 0.00602813852813851009 v > af2 := proc (v) options operator, arrow; LeastSquares(X, Y, v, curve = a*v^3+b*v^2+c*v+d) end proc;
/ 3 2 \af2 := v -> CurveFitting:-LeastSquares\X, Y, v, curve = a v + b v + c v + d/> LeastSquares(X, Y, v, curve = a*v^3+b*v^2+c*v+d);
3 0.3912380952 - 0.182336940836941020 v - 0.00161111111111111372 v
2 + 0.0301948051948052361 v > af3 := proc (v) options operator, arrow; LeastSquares(X, Y, v, curve = a*v^4+b*v^3+c*v^2+d*v+e) end proc; /
af3 := v -> CurveFitting:-LeastSquares\X, Y, v, 4 3 2 \
curve = a v + b v + c v + d v + e/

Приближение данных различными аналитическими функциями

- af4 := proc (v) options operator, arrow; LeastSquares(X, Y, v, curve = a/v+b) end proc; / a \ af4 := v -> CurveFitting:-LeastSquares|X, Y, v, curve = - + b| \ v /> LeastSquares(X, Y, v, curve = a/v+b);
- $$-0.005046237196+\frac{0.249001074430480280}{v}$$
- plotdata := pointplot(data);
- > paf1 := plot(af1(h), h = 0 .. 10, color = red);
- > paf2 := plot(af2(h), h = 0 .. 10, color = blue);
- > paf3 := plot(af3(h), h = 0 .. 10, color = green);
- > paf4 := plot(af4(h), h = 0 .. 10, af4 = 0 .. .5, color = coral);> with(plots);

Графическое представление аппроксимации

$display(plotdata, paf1, paf2, paf3, paf4, axes = normal)$



Решение дифуравнения первого порядка методом РК4 в пакете Maple 12

$$ode := diff(y(x), x) = x + 3 \cdot \frac{y(x)}{x};$$

$$ode := \frac{d}{dx} y(x) = x + \frac{3\, y(x)}{x}$$

$ic := y(1) = 0 :$

$del := dsolve(\{ode, ic\}, numeric, method = classical[rk4], output = array([1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0]))$

$$del := \begin{bmatrix} [\, x \;\; y(x) \,] \\ \begin{bmatrix} 1. & 0. \\ 1.2 & 0.287999998194802 12 \\ 1.4 & 0.783999995799086 24 \\ 1.6 & 1.53599999270704 74 \\ 1.8 & 2.59199998880958 78 \\ 2.0 & 3.99999998399779 16 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Шаг 0.05

$$de3 := dsolve(\{ode, ic\}, numeric, method = classical[rk4], output = array([1., 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.25, 1.3, 1.35, 1.4, 1.45, 1.5, 1.55, 1.6, 1.65, 1.7, 1.75, 1.8, 1.85, 1.9, 1.95, 2.0]));$$

$$de3 := \begin{bmatrix} [\, x \;\; y(x) \,] \\ \begin{bmatrix} 1. & 0. \\ 1.05 & 0.0551249999598675475 \\ 1.1 & 0.120999999916498055 \\ 1.15 & 0.198374999869752128 \\ 1.2 & 0.287999999819480212 \\ 1.25 & 0.390624999765524283 \\ 1.3 & 0.506999999707721582 \\ 1.35 & 0.637874999645906106 \\ 1.4 & 0.783999999579908624 \\ 1.45 & 0.946124999509560638 \\ 1.5 & 1.12499999943469154 \\ 1.55 & 1.32137499935512981 \\ 1.6 & 1.53599999927070474 \\ 1.65 & 1.76962499918124494 \\ 1.7 & 2.02299999908658101 \\ 1.75 & 2.29687499898654224 \\ 1.8 & 2.59199999888095878 \\ 1.85 & 2.90912499876965969 \\ 1.9 & 3.24899999865247492 \\ 1.95 & 3.61237499852923793 \\ 2.0 & 3.99999999839977916 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

> pf := plot(phi(x), x = 1 .. 2, color = blue);

> a1 := odeplot(de1, 1 .. 2, style = point, symbolsize = 20);

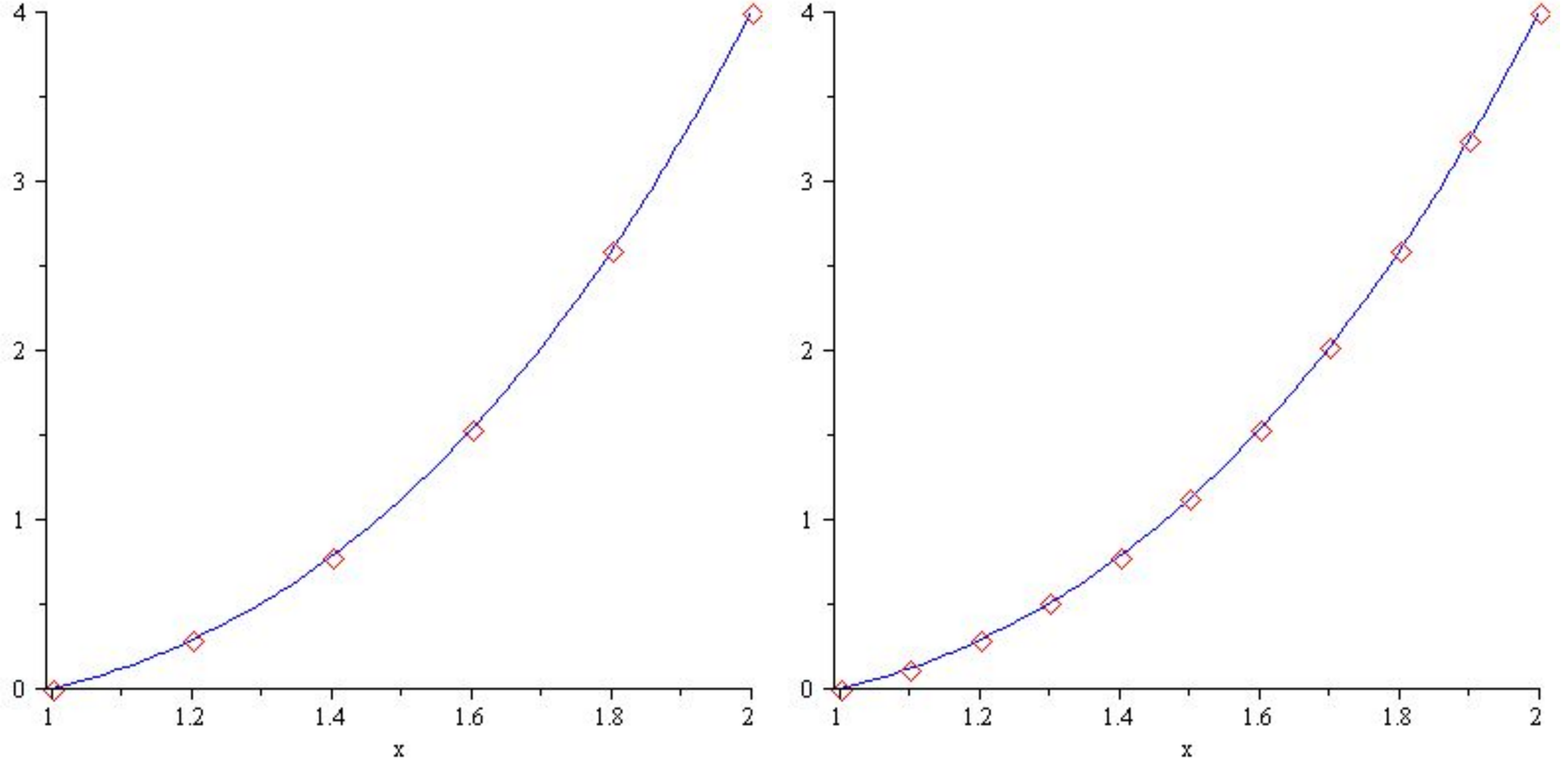
> a2 := odeplot(de2, 1 .. 2, style = point, symbolsize = 20);

> a3 := odeplot(de3, 1 .. 2, style = point, symbolsize = 20);

> display(pf, a1);

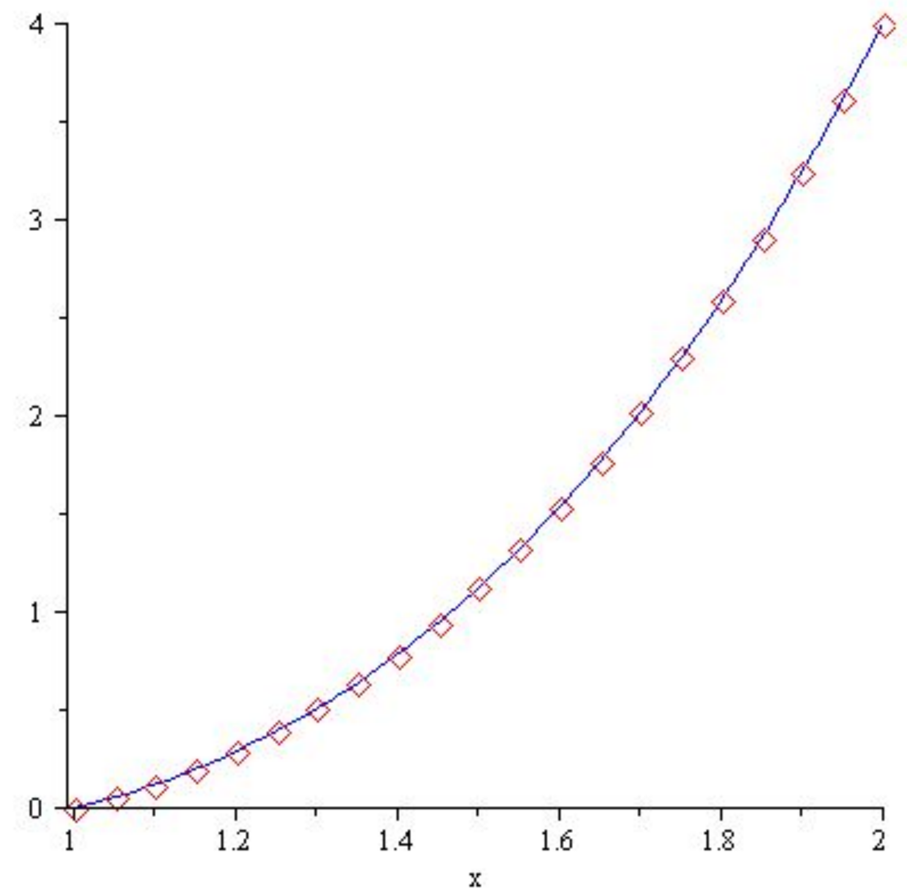
Нахождение функции с шагом 0.2 и 0.4

display(pf, a2);



Численное решение ДУ методом РК с шагом 0.02

$display(pf, a3);$



Решение ДУ второго порядка методом РК4 сведением к системе двух уравнений первого порядка

> ode := x^2*(diff(y(x), `$`(x, 2)))-6*y(x);

> ic := y(1) = 1, (D(y))(1) = 3;

> $c := \left[\left[YP_1 = p_2, YP_2 = \frac{6\,p_1}{x^2}\right], \left[p_1 = y(x), p_2 = \frac{d}{dx}\,y(x)\right], 1, [1, 3]\right]$

- p1 := proc (x) options operator, arrow; y(x) end proc; p2 := proc (x) options operator, arrow; (D(y))(x) end proc;
- > sys := diff(p1(x), x) = p2(x), diff(p2(x), x) = 6*p1(x)/x^2;
- > icp := p1(1) = 1, p2(1) = 3;
- > x1[0] := a; for i from 0 to n1-1 do x1[i+1] := x1[i]+h1 end do;

$des1 := dsolve(\{sys, icp\}, numeric, method = classical[rk4], output = array([1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.]));$#

Решение неоднородного ДУ второго порядка методом РК4

$$eulersols(ode, y(x));$$

$$\left[x^3, \frac{1}{x^2}\right]$$

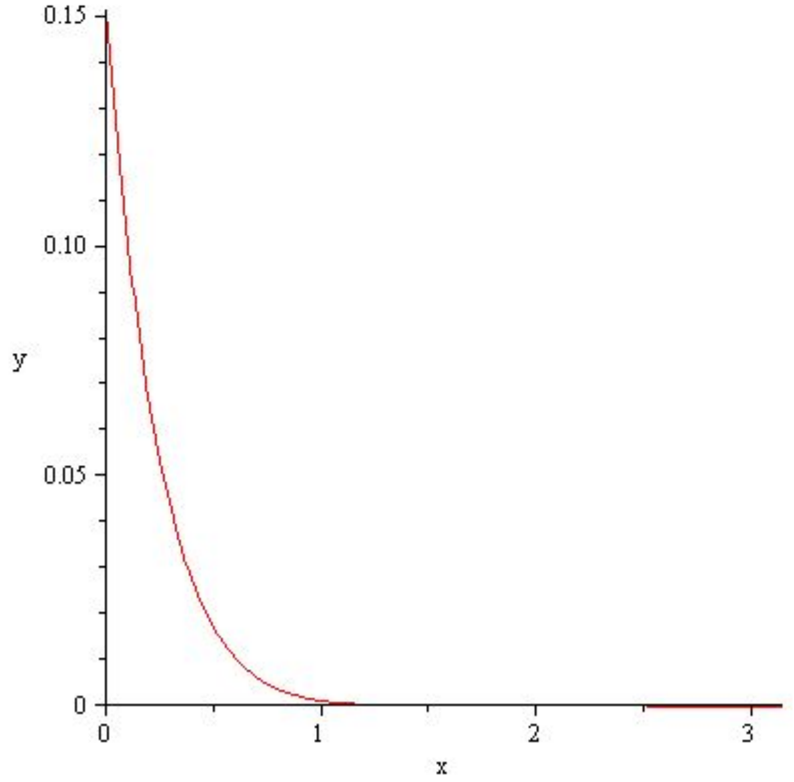
- f := proc (x) options operator, arrow; exp(-3*x)*cos(x) end proc;
- > a1 := 2; a2 := 0; a := (1/2)*Pi;
- > ode := diff(y(x), `$`(x, 2))+a1*(diff(y(x), x))+a2*y(x);
- > ic := y(a) = 0, (D(y))(a) = 0;

$$de := dsolve(ode, y(x));$$

$$de := y(x) = \_C1 + \_C2\, e^{(-2\,x)}$$

Решение ДУ, графическое представление

> den := dsolve({ic, ode = f(x)}, y(x), numeric);
> odeplot(den, 0 .. Pi);



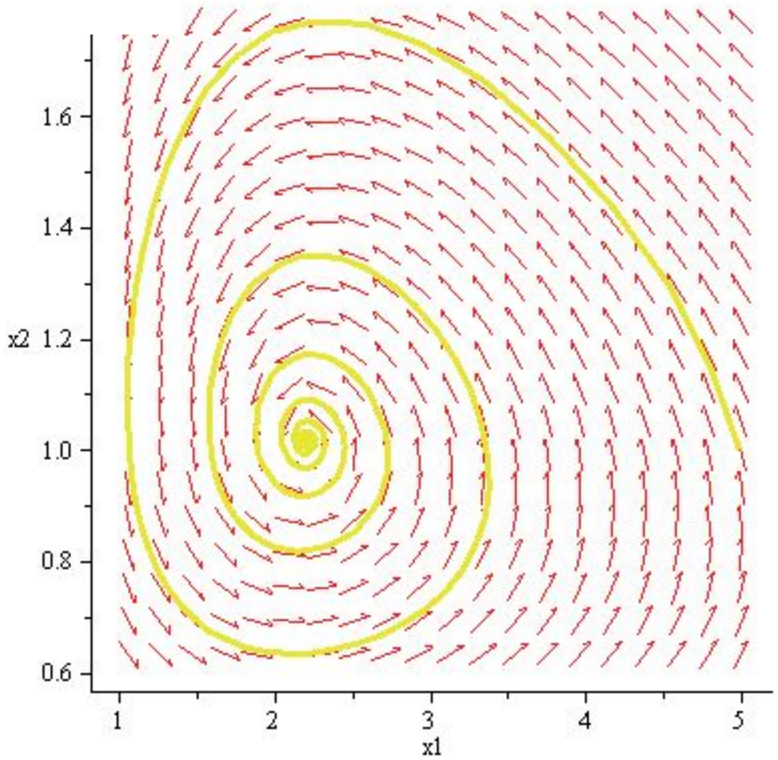
Решение системы ДУ первого порядка. Режимы эволюции мод

```
restart;> ode1 := diff(x1(t), t) = (a-b*x2(t))*x1(t)-alpha*x1(t)^2;
> ode2 := diff(x2(t), t) = (-c+d*x1(t))*x2(t)-alpha*x2(t)^2;
> a := 4; b := 3.5; c := 2; d := 1; alpha := .2;
> ic := x1(0) = 3, x2(0) = 1;
> de := dsolve({ic, ode1, ode2}, {x1(t), x2(t)}, numeric);> with(plots);
```

Фазовый портрет системы

$with(DEtools):$

$phaseportrait([ode1, ode2], [x1(t), x2(t)], t = 0..20, [[x1(0) = 5, x2(0) = 1]], stepsize = 0.05)$



Решение уравнения второго порядка в пакете Maple v.12

```
> Eq := x*((D@@2)(y))(x)-(x+1)*(D(y))(x)-(2*(x-1))*y(x) = 0;
          x*((D@@2)(y))(x)-(x+1)*(D(y))(x)-(2*(x-1))*y(x) = 0
> Orcon := y(1) = exp(2), (D(y))(1) = 2*exp(2);
     y(1) = exp(2), D(y)(1) = 2 exp(2)
> dsolve({Eq, Orcon}, y(x));
                        y(x) = exp(2 x)
```