

ВОЕННО–МЕДИЦИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

имени С.М. Кирова

Кафедра биологической и медицинской физики

ЛЕКЦИЯ № 2

**по дисциплине «Физика, математика»
на тему: «Интегрирование функций»**

**для курсантов I курса ФПВ, ФПиУГВ и
спецфакультета**

**Исполнитель: к. ф.-м. наук доцент
Н.Г. Новикова**

1. Понятие неопределенного интеграла

- При дифференцировании мы искали производную по заданной функции $y=F(x)$, то есть нужно было найти $f(x)=F'(x)$.
- Можно поставить обратную задачу: восстановить продифференцированную функцию, т.е., зная производную $f(x)$, найти такую функцию $F(x)$, чтобы $F'(x) = f(x)$.



- ▶ Например, известна скорость перемещения точки $v(t)$, а найти нужно закон ее перемещения: $S(t)$.
- ▶ Эта задача является более трудной, чем задача дифференцирования. Для решения подобных задач вводятся новые понятия и действия.

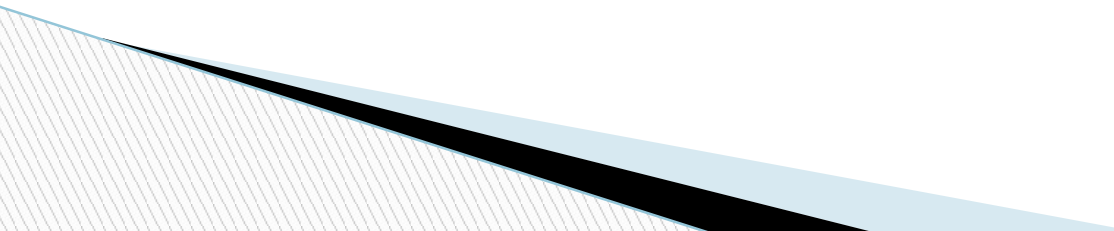
- **Определение:** Дифференцируемая функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на интервале (a,b) , если $F'(x)=f(x)$ на интервале (a,b) .
- Например, для $f(x) = x^2$ первообразная $F(x) = x^3/3$, так как $F'(x) = (x^3/3)' = x^2$.
- Для $f(x) = \cos x$ первообразной будет $F(x) = \sin x$, так как $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

- Первообразная для заданной функции $f(x)$ существует только, если эта функция непрерывна на (a, b) .
- Кроме того, первообразных – множество, и отличаются они только постоянным слагаемым.
- Действительно, $\sin x + 2$, $\sin x - 2$, $\sin x + C$ – все эти функции будут являться первообразными для функции $f(x) = \cos x$.

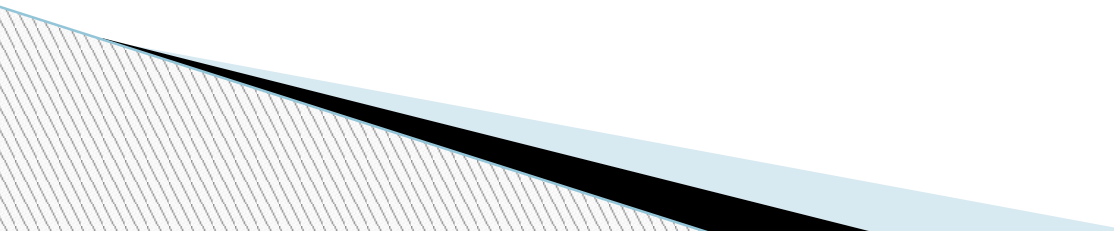
▣ **Определение:** Выражение $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная величина, определяющее множество первообразных для функции $f(x)$, называется **неопределенным интегралом** и

обозначается символом $\int f(x)dx$

т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$

- Знак \int - знак неопределенного интеграла;
 - $f(x)dx$ - подынтегральное выражение;
 - $f(x)$ - подынтегральная функция.
- 

▣ **Определение:** Операция нахождения первообразной по заданной производной или дифференциалу называется **интегрированием.**

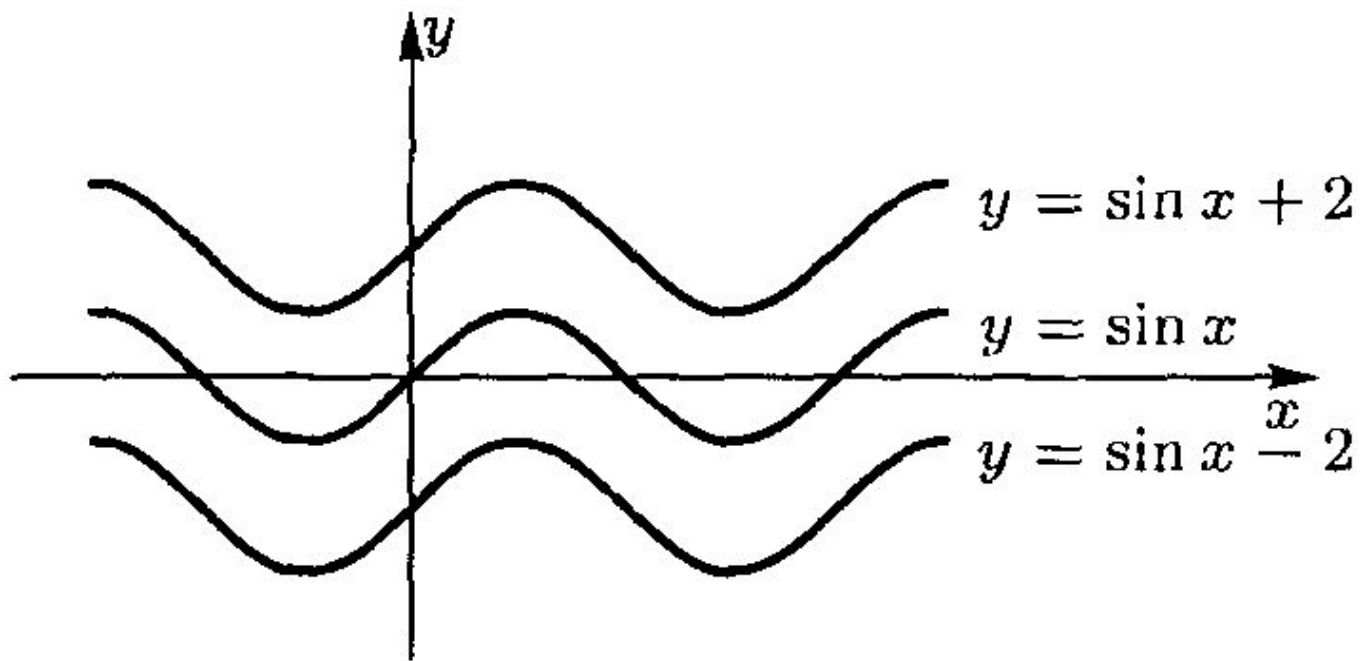


- Интегрирование – действие, **обратное** дифференцированию.
- Его можно **проверить дифференцированием**, причем дифференцирование однозначно, а интегрирование дает ответ с точностью до постоянной.

- Придавая постоянной величине C различные значения C_1, C_2, C_3 , получим различные функции $y_1(x)=F(x)+C_1, y_2(x)=F(x)+C_2, y_3(x)=F(x)+C_3$, каждая из которых задает на координатной плоскости кривую, называемую **интегральной**.
- Все графики интегральных кривых сдвинуты друг относительно друга вдоль оси **OY**.

- Следовательно, геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых.

Пример семейства интегральных кривых



- Чтобы находить первообразные, необходимо составить и выучить наизусть **таблицу неопределенных интегралов** от основных элементарных функций.
- Она получается в результате обращения соответствующих формул дифференцирования.
- Например, если $(\sin x)' = \cos x$, то $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Таблица основных неопределенных интегралов

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$
$$(n \neq -1)$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3. \int e^x dx = e^x + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$
$$a \neq 1, a > 0$$

$$5. \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$6. \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$9^* \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$10^* \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$12^* \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$14.^* \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$15.^* \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$16.^* \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \\ = \ln |x + \sqrt{x^2+m}| + C$$

2. Свойства неопределенных интегралов

- ▣ 1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

- 2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + C) = F'(x) dx = f(x) dx.$$

- 3) Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной:

$$\int d(F(x)) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$$

Пример 1. $\int dx = x + C.$

Пример 2. $\int d(e^x) = e^x + C.$

- ▣ 4) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx = k (F(x) + C)$$

Пример 3. $\int \frac{5dx}{x} = 5 \int \frac{dx}{x} = 5 \ln |x| + C.$

- 5) Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

Пример 4.

$$\int \left(3x^2 + \frac{\sin x}{2} \right) dx = \int 3x^2 dx + \int \frac{\sin x}{2} dx = 3 \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \cos x + C.$$

3. Непосредственное интегрирование

- Этот метод заключается в прямом использовании табличных интегралов и свойств.

Примеры.

$$\begin{aligned} 1. \int \left(6x^5 + \frac{\sin x}{2} - 10 \right) dx &= 6 \int x^5 dx + \frac{1}{2} \int \sin x dx - \\ - 10 \int dx &= 6 \frac{x^6}{6} - \frac{1}{2} \cos x - 10x + C = x^6 - \frac{1}{2} \cos x - 10x + C. \end{aligned}$$

Метод разложения

- Этот метод заключается в разложении подынтегральной функции в комбинацию более простых функций с использованием известных формул.

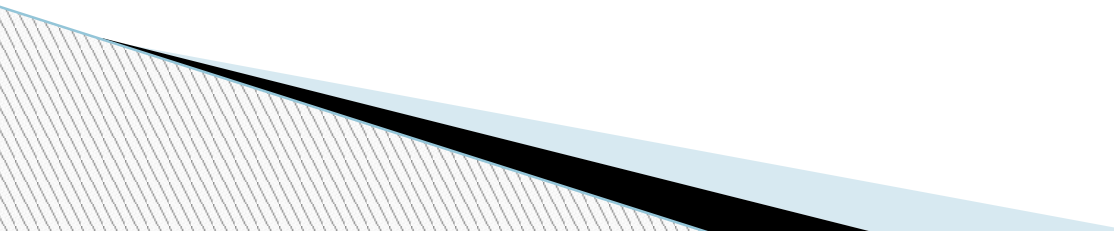
Примеры.

$$\begin{aligned} 1. \int \left(\frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^2} \right) dx &= \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - x + \ln|x| - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C \end{aligned}$$

$$3. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C$$

3. Основные методы интегрирования

- Таких методов два:
 - а) метод **замены переменной**;
 - б) **интегрирование по частям**.
- 

Метод замены переменной

- Метод основан на замене переменной в неопределенном интеграле с целью свести его нахождение к нахождению такого неопределенного интеграла, который может быть найден методом разложения.
- Другими словами, необходимо получить:

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy, \text{ где } y = \varphi(x)$$

□ Пример: Найти неопределенный интеграл:

$$\int \cos 2x dx$$

□ Этот интеграл не является табличным.

□ Произведем замену: $y = 2x$

□ Тогда $dy = (y)' dx = 2 dx$

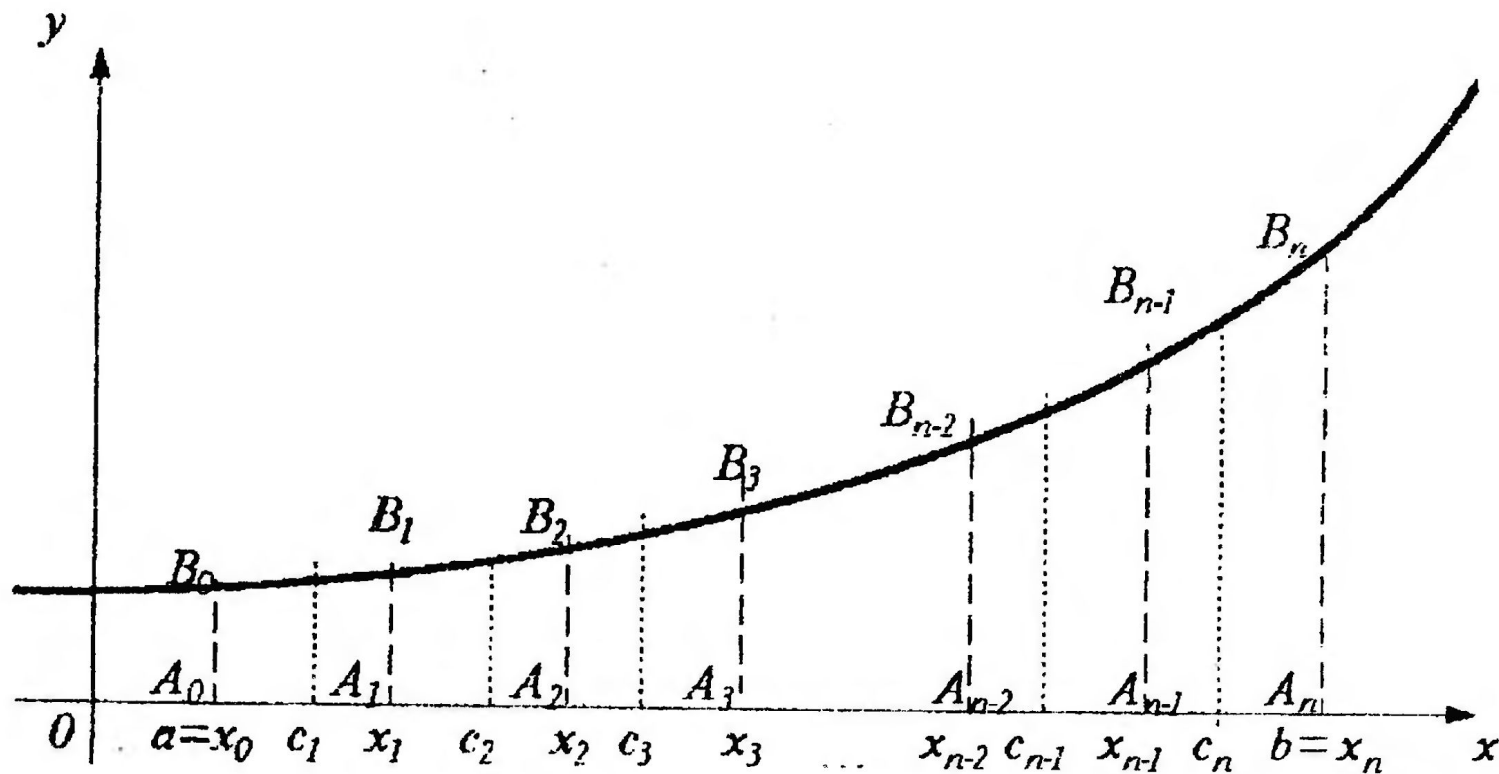
□ $dx = dy/2$

□ Соответственно:

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos y dy = \frac{1}{2} \sin y + C = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

4. Определенный интеграл

- Рассмотрим некоторую непрерывную на конечном отрезке $[a, b]$ функцию $y=f(x)$.
- Разделим отрезок $[a, b]$ на n частей (необязательно равных) и обозначим абсциссы точек деления $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$ в порядке возрастания следующим образом:
 - $x_0=a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n=b$



- Из точек деления восставим перпендикуляры к оси абсцисс до их пересечения с графиком функции в точках, соответственно:

$$B_0, B_1, B_2, \dots, B_{n-2}, B_{n-1}, B_n$$

- На каждом из отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]$ (эти отрезки в отличие от всего отрезка $[a, b]$ называют **частичными отрезками**) выберем по одной точке (необязательно в центре отрезка), обозначив их, соответственно, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}, c_n$.
- Из этих точек также восставим перпендикуляры к оси абсцисс до их пересечения с графиком функции.

- Составим сумму произведений значений функции $y=f(x)$ в точках c_i , где индекс i – номер частичного отрезка ($1, 2, 3, \dots, n$), на величины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующих отрезков:

$$I_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$$

□ или, в сокращенной записи

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

□ где символ $\sum_{i=1}^n$

означает суммирование по индексу i ,
последовательно изменяющемуся от 1 до n
включительно.

- Сумма I_n называется **интегральной суммой** функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

▣ **Определение:** Если существует конечный предел интегральной суммы функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ при стремлении к 0 величины максимального из частичных отрезков, не зависящий от способа разделения данного отрезка на частичные отрезки и выбора на них точек c_i , то такой предел называют **определенным интегралом** от этой функции на данном отрезке и обозначают следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} I_n = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

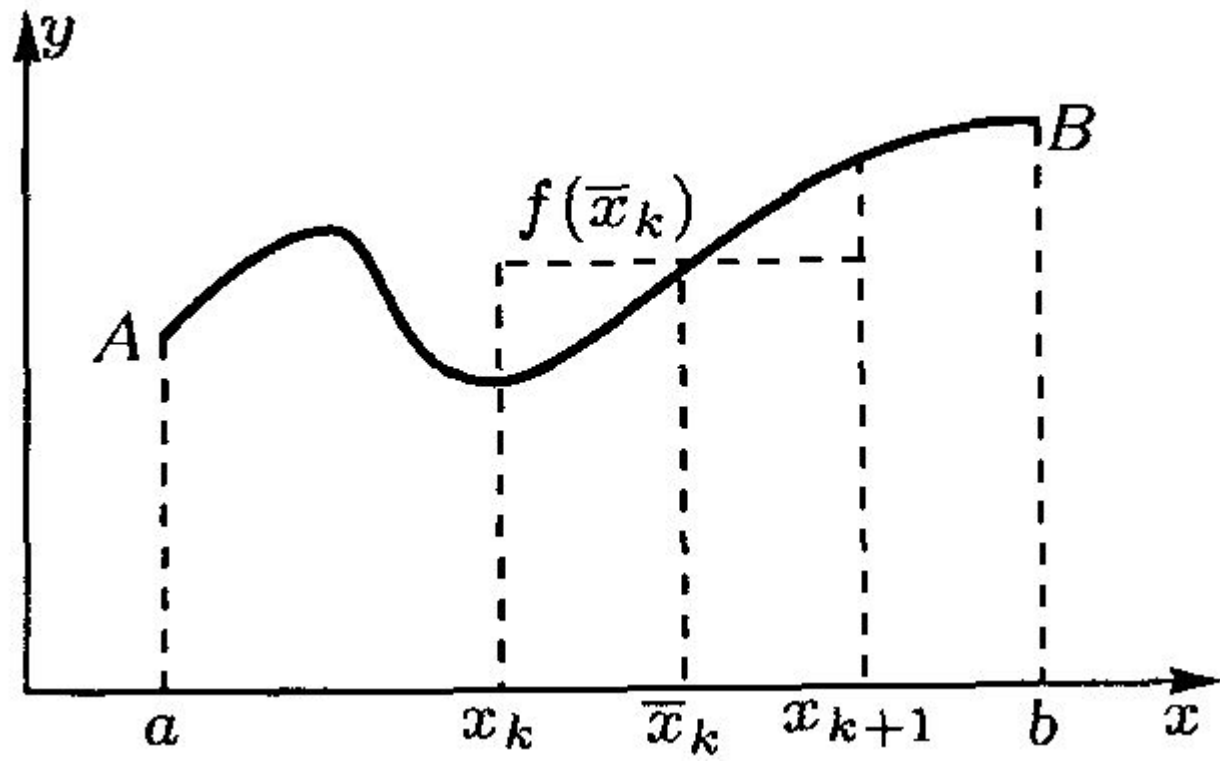
- Функция $f(x)$ – *подынтегральная функция*,
- x – *переменная интегрирования*.
- Числа a и b (границы отрезка $[a, b]$) называют, соответственно, нижним и верхним *пределами интегрирования*.

Основное отличие определенного интеграла от неопределенного:

- Неопределенный интеграл – это семейство первообразных **функций**;
- Определенный интеграл – **число!**

Геометрический смысл определенного интеграла:

- Определенный интеграл равен **площади криволинейной трапеции**, т.е. плоской фигуры, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, снизу – осью абсцисс, слева – прямой линией $x = a$, справа – прямой линией $x = b$.



5. Свойства определенного интеграла

- 1. Определенный интеграл с одинаковыми верхним и нижним пределами равен 0:

- ▶ $\int_a^a f(x) dx = 0.$

- 2. При перемене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл, сохраняя свое значение, меняет знак:

- ▶ $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

- ▶ 3. Если отрезок интегрирования $[a,b]$ разбить на несколько участков $[a,d], [d,c], \dots, [k,b]$, то определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равен сумме определенных интегралов от этой функции на каждом из частичных отрезков:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^c f(x) dx + \dots + \int_k^b f(x) dx$$

- ▶ 4. Постоянный множитель можно выносить из-под знака определенного интеграла:

$$\int_a^b m f(x) dx = m \int_a^b f(x) dx$$

- ▶ 5. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен сумме определенных интегралов от каждого слагаемого:

$$\text{▶ } \int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx$$

- ▶ 6. Величина определенного интеграла от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, равна приращению любой из первообразных этой функции на данном отрезке:

$$\text{▶ } \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

□ Формулу называют **формулой Ньютона-Лейбница.**

-
- ▶ **1.** $\int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$
 - ▶ **2.** $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_a^b = \ln|b| - \ln|a| = \ln \left| \frac{b}{a} \right|.$
 - ▶ **3.** $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$

6. Основные методы вычисления определенных интегралов

▣ ▶ а) Метод разложения (непосредственного интегрирования)

$$\text{▶ } \int_0^{\pi/4} (\sqrt{x} + 2\sin x) dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} x^{1/2} dx + 2 \int_0^{\pi/4} \sin x dx =$$

$$\text{▶ } = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^{\pi/4} - 2 \cos x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{3/2} - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2.$$

□ ▶ **б) Метод замены переменной**

$$\text{▶ } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \mid u = \cos x, du = -\sin x dx \mid =$$

$$- \int_1^0 \frac{du}{1+u^2} =$$

$$\text{▶ } = - \arcsin u \Big|_1^0 = \frac{\pi}{2}.$$

- **Обратите внимание:**
- 1) при замене переменной соответствующим образом **изменяют и пределы интегрирования** ($\cos 0 = 1$; $\cos(\pi/2) = 0$);
- 2) если замена переменной и пределов интегрирования выполнена правильно, то **нет необходимости возвращаться к исходной переменной x** (нам необходимо получить **число**, которое будет одинаковым в обоих случаях).

▣ б) Метод интегрирования по частям