ВОЕННО–МЕДИЦИНСКАЯ АКАДЕМИЯ
имени С.М. Кирова
Кафедра биологической и медицинской физики

ЛЕКЦИЯ № 2

по дисциплине «Физика, математика»
на тему: «Интегрирование функций»

для курсантов I курса ФПВ, ФПиУГВ и спецфакультета

Исполнитель: к. ф.-м. наук доцент
Н.Г. Новикова

1. Понятие неопределенного интеграла

- При дифференцировании мы искали производную по заданной функции ***y=F(x)***, то есть нужно было найти $f(x)=F'(x)$.

- Можно поставить обратную задачу: восстановить продифференцированную функцию, т.е., зная производную $f(x)$, найти такую функцию ***F(x)***, чтобы $F'(x) = f(x)$.

- Например, известна скорость перемещения точки $v(t)$, а найти нужно закон ее перемещения: $S(t)$.
- Эта задача является более трудной, чем задача дифференцирования. Для решения подобных задач вводятся новые понятия и действия.

- **Определение: Дифференцируемая функция *F(x)*** называется **первообразной** для функции ***f(x)*** на интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$ на интервале (a,b).

- Например, для $f(x)=x^2$ первообразная $F(x)=x^3/3$, так как $F'(x)=(x^3/3)'=x^2$.

- Для $f(x)=\cos x$ первообразной будет $F(x)=\sin x$, так как $F'(x)=(\sin x)'=\cos x$.

- Первообразная для заданной функции $f(x)$ существует только, если эта функция непрерывна на (a,b).
- Кроме того, первообразных – множество, и отличаются они только постоянным слагаемым.
- Действительно, $\sin x+2$, $\sin x-2$, $\sin x+C$ – все эти функции будут являться первообразными для функции $f(x)=\cos x$.

- **Определение: Выражение** ***F(x)+C***, где ***C*** - произвольная постоянная величина, определяющее множество первообразных для функции *f*(*x*), называется **неопределенным интегралом** и обозначается символом $\int f(x)dx$

т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$

- Знак $\int$ - знак неопределенного интеграла;
- $f(x)dx$ – подынтегральное выражение;
- $f(x)$ – подынтегральная функция.

- **Определение:** Операция нахождения первообразной по заданной производной или дифференциалу называется **интегрированием**.

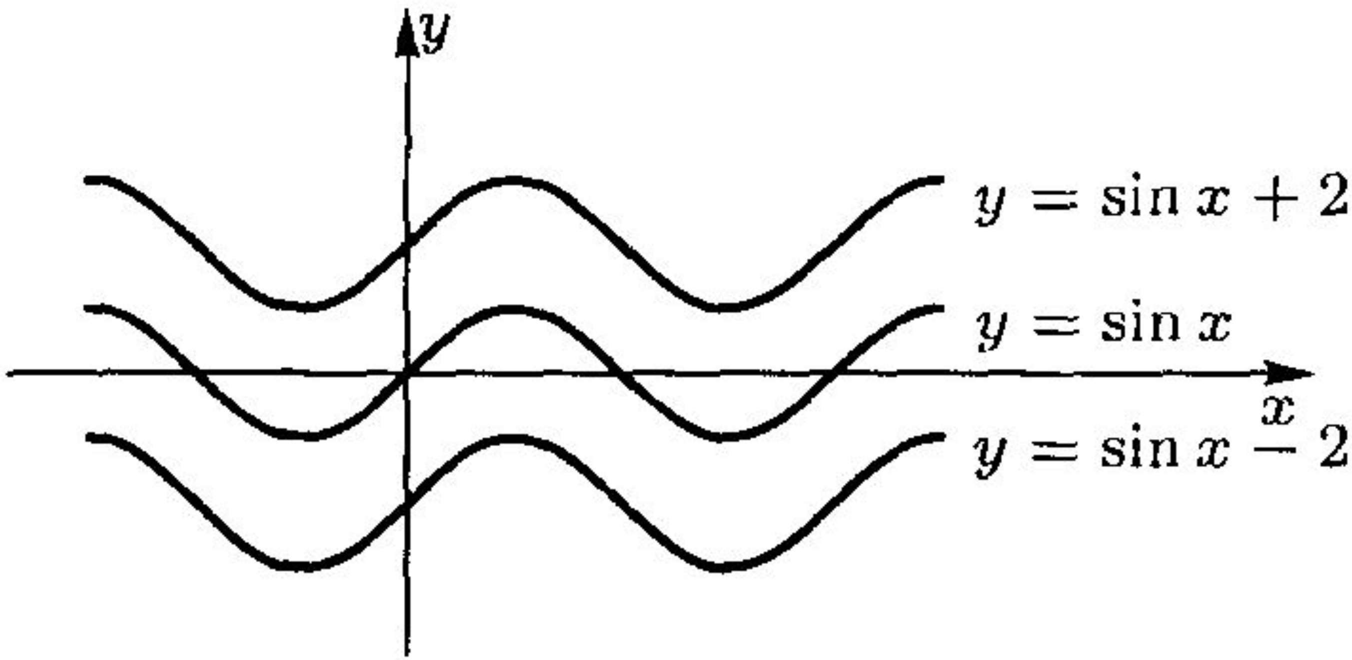
- Интегрирование – действие, обратное дифференцированию.
- Его можно проверить дифференцированием, причем дифференцирование однозначно, а интегрирование дает ответ с точностью до постоянной.

- Придавая постоянной величине C различные значения C_1, C_2, C_3, получим различные функции $y_1(x)=F(x)+C_1$, $y_2(x)=F(x)+C_2$, $y_3(x)=F(x)+C_3$, каждая из которых задает на координатной плоскости кривую, называемую интегральной.

- Все графики интегральных кривых сдвинуты друг относительно друга вдоль оси OY.

- Следовательно, геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых.

Пример семейства интегральных кривых



- Чтобы находить первообразные, необходимо составить и выучить наизусть таблицу неопределенных интегралов от основных элементарных функций.
- Она получается в результате обращения соответствующих формул дифференцирования.
- Например, если $(\sin x)' = \cos x$, то $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1.	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $(n \neq -1)$
2.	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
3.	$\int e^x\,dx = e^x + C$
4.	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$ $a \neq 1, a > 0$

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9* $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
10* $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
12* $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
14.* $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
15.* $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C$
16.* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2+m} \right\rvert + C$

2. Свойства неопределенных интегралов

- 1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

- 2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\,(F(x) + C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

- 3) Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной:

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Пример 1. $\int dx = x + C.$

Пример 2. $\int d(e^x) = e^x + C.$

- 4) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx = k\,(F(x) + C)$$

Пример 3. $\displaystyle\int \frac{5dx}{x} = 5\int \frac{dx}{x} = 5\ln|x| + C.$

- 5) Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx$$

Пример 4.

$$\int \left(3x^2 + \frac{\sin x}{2}\right) dx = \int 3x^2\, dx + \int \frac{\sin x}{2}\, dx = 3\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

3. Непосредственное интегрирование

- Этот метод заключается в прямом использовании табличных интегралов и свойств.

Примеры.

$$1.\ \int\left(6x^5+\frac{\sin x}{2}-10\right)dx=6\int x^5\,dx+\frac{1}{2}\int\sin x\,dx-$$

$$-10\int dx=6\frac{x^6}{6}-\frac{1}{2}\cos x-10x+C=x^6-\frac{1}{2}\cos x-10x+C.$$

Метод разложения

- Этот метод заключается в разложении подынтегральной функции в комбинацию более простых функций с использованием известных формул.

Примеры.

1. $$\int\left(\frac{x^4-x^2+x+1}{x^2}\right)dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+\ln|x|-\frac{1}{x}+C.$$

$$\textbf{2.}\ \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

$$\textbf{3.}\ \int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1 - \cos x}{2}\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$$

3. Основные методы интегрирования

- Таких методов два:
- а) метод **замены переменной**;
- б) **интегрирование по частям**.

Метод замены переменной

- Метод основан на замене переменной в неопределенном интеграле с целью свести его нахождение к нахождению такого неопределенного интеграла, который может быть найден методом разложения.
- Другими словами, необходимо получить:

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy, \text{ где } y = \varphi(x)$$

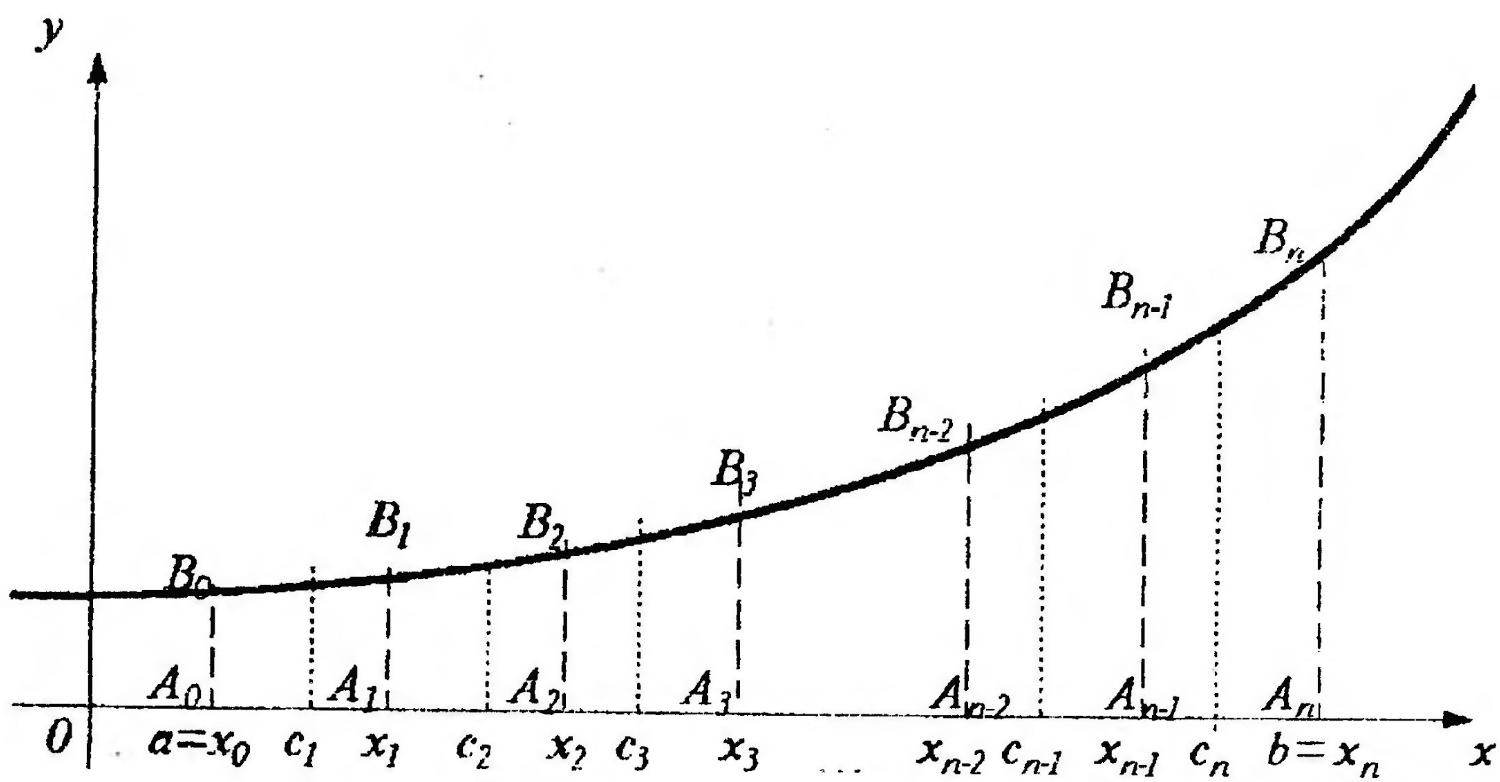
- Пример: Найти неопределенный интеграл: $\int \cos 2x dx$
- Этот интеграл не является табличным.
- Произведем замену: $y = 2x$
- Тогда $dy=(y)'dx=2dx$
- $dx = dy/2$
- Соответственно:

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos y\, dy = \frac{1}{2}\sin y + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

4. Определенный интеграл

- Рассмотрим некоторую непрерывную на конечном отрезке $[a,b]$ функцию $y=f(x)$.

- Разделим отрезок $[a,b]$ на n частей (необязательно равных) и обозначим абсциссы точек деления A_0, A_1, A_2, …, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n в порядке возрастания следующим образом:
- $x_0=a$, x_1, x_2, x_3, …, x_{n-2}, x_{n-1}, $x_n=b$



y
x
0
B_0
B_1
B_2
B_3
B_{n-2}
B_{n-1}
B_n
A_0
A_1
A_2
A_3
A_{n-2}
A_{n-1}
A_n
$a=x_0$ c_1 x_1 c_2 x_2 c_3 x_3 ... x_{n-2} c_{n-1} x_{n-1} c_n $b=x_n$

- Из точек деления восставим перпендикуляры к оси абсцисс до их пересечения с графиком функции в точках, соответственно:

$$B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{n-2}, B_{n-1}, B_n$$

- На каждом из отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, …, $[x_{n-2}, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_n]$ (эти отрезки в отличие от всего отрезка $[a,b]$ называют частичными отрезками) выберем по одной точке (необязательно в центре отрезка), обозначив их, соответственно, c_1, c_2, c_3, …, c_{n-2}, c_{n-1}, c_n.
- Из этих точек также восставим перпендикуляры к оси абсцисс до их пересечения с графиком функции.

- Составим сумму произведений значений функции $y=f(x)$ в точках c_i, где индекс i – номер частичного отрезка ($1, 2, 3, \ldots, n$), на величины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующих отрезков:

$$I_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$

- или, в сокращенной записи

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

- где символ $\sum_{i=1}^{n}$

  означает суммирование по индексу i , последовательно изменяющемуся от 1 до n включительно.

- Сумма I_n называется **интегральной суммой функции** $y=f(x)$ **на отрезке** $[a,b]$.

- **Определение:** Если существует конечный предел интегральной суммы функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ при стремлении к 0 величины максимального из частичных отрезков, не зависящий от способа разделения данного отрезка на частичные отрезки и выбора на них точек c_i, то такой предел называют **определенным интегралом** от этой функции на данном отрезке и обозначают следующим образом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} I_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

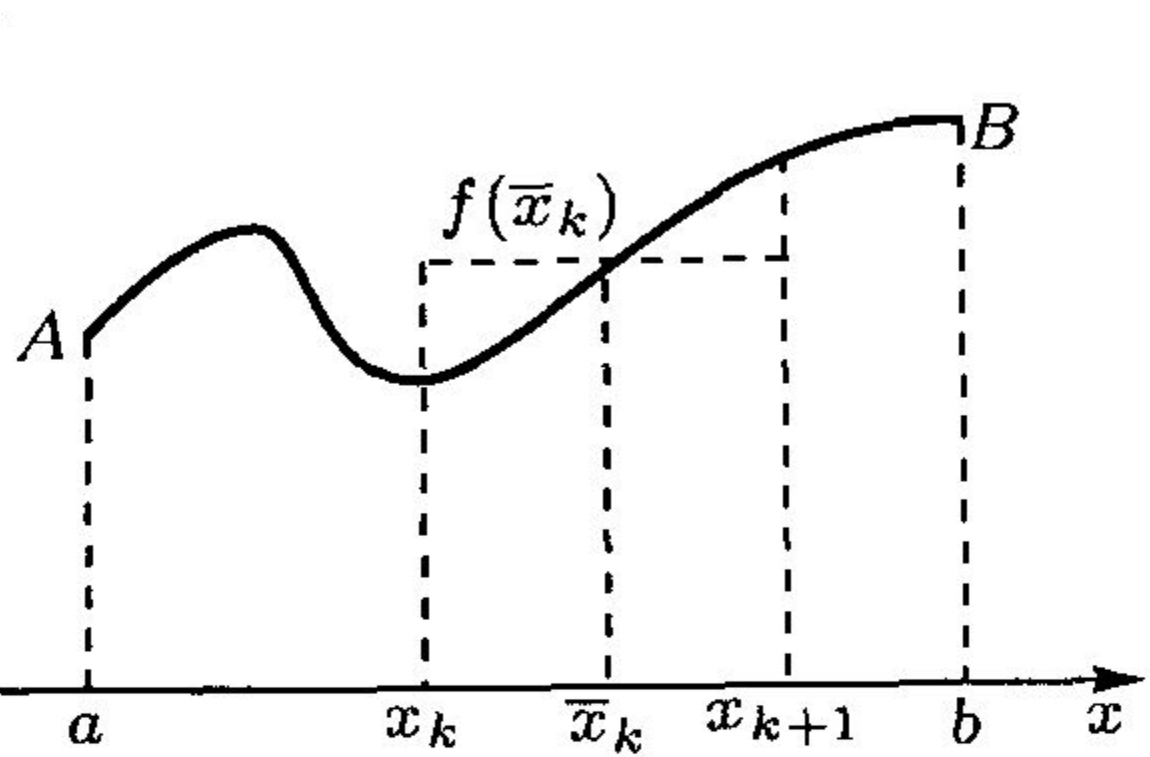
- Функция *f(x)* – *подынтегральная функция*,
- ***x*** – *переменная интегрирования*.
- Числа ***a*** и *b* (границы отрезка [*a*,*b*]) называют, соответственно, нижним и верхним *пределами интегрирования*.

Основное отличие определенного интеграла от неопределенного:

- Неопределенный интеграл – это семейство первообразных функций;
- Определенный интеграл – число!

Геометрический смысл определенного интеграла:

- Определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, т.е. плоской фигуры, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, снизу – осью абсцисс, слева – прямой линией $x=a$, справа – прямой линией $x=b$.



y
B
$f(\overline{x}_k)$
A
a
x_k
$\overline{x}_k$
x_{k+1}
b
x

5. Свойства определенного интеграла

- 1. Определенный интеграл с одинаковыми верхним и нижним пределами равен 0:
- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- 2. При перемене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл, сохраняя свое значение, меняет знак:
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

- 3. Если отрезок интегрирования $[a,b]$ разбить на несколько участков $[a,d]$, $[d,c]$,…, $[k,b]$, то определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равен сумме определенных интегралов от этой функции на каждом из частичных отрезков:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^c f(x)dx + \cdots + \int_k^b f(x)dx$$

- 4. Постоянный множитель можно выносить из-под знака определенного интеграла:

- $$\int_a^b mf(x)dx = m\int_a^b f(x)dx$$

- 5. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен сумме определенных интегралов от каждого слагаемого:

- $$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$$

- 6. Величина определенного интеграла от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, равна приращению любой из первообразных этой функции на данном отрезке:

- $$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Формулу называют **формулой Ньютона-Лейбница**.

- **1.** $\int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 |_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$

- **2.** $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|x| \,|_a^b = \ln|b| - \ln|a| = \ln\left|\frac{b}{a}\right|.$

- **3.** $\int_0^{\pi/2} cosx\, dx = \sin x \,|_0^{\pi/2} = 1.$

6. Основные методы вычисления определенных интегралов

- а) Метод разложения (непосредственного интегрирования)

- $\int_0^{\pi/4}(\sqrt{x}+2sinx)dx=$

$=\int_0^{\pi/4}x^{1/2}dx+2\int_0^{\pi/4}sinx\,dx=$

- $=\frac{2}{3}x^{3/2}|_0^{\pi/4}-2cosx|_0^{\pi/4}=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3/2}-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2.$

б) Метод замены переменной

- $\int_0^{\pi/2} \frac{sinx}{1+cos^2 x} dx = \mid u = cos\ x,\ du = -sinx\ dx \mid =$

$- \int_1^0 \frac{du}{1+u^2} =$

- $= - arcsin\, u\, |_1^0 = \frac{\pi}{2}.$

- **Обратите внимание**:
- 1) при замене переменной соответствующим образом **изменяют и пределы интегрирования** (*cos* 0 = 1; cos (π/2) = 0);
- 2) если замена переменной и пределов интегрирования выполнена правильно, то **нет необходимости возвращаться к исходной переменной *x*** (нам необходимо получить **число**, которое будет одинаковым в обоих случаях).

- **б) Метод интегрирования по частям**