საშინაო დავალება: № 9

სახელმძღვანელო : ნ. ხვედელიძე. მათემატიკა ეკონომიკის და ბიზნესისათვის

სასწავლო თემა: თავი 10. ფუნქციის წარმოებული **[197 - 195]**

- **§ 10.1. წარმოებულის ცნება [197 - 200]**
- **§ 10.2. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი [200]**
- **§ 10.4. გაწარმოების წესები და წარმოებულის ცხრილი [202]**

- **საშინაო დავალება:**

§ 10.1. § 10.2. და § 10.4. პარაგრაფებში გარჩეული ყველა ამოცანა.

- **სავარჯიშო № 10. გვ. [207] № 1 (კენტები)**

(სავარჯიშოების პასუხები: გვ. 455)

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა

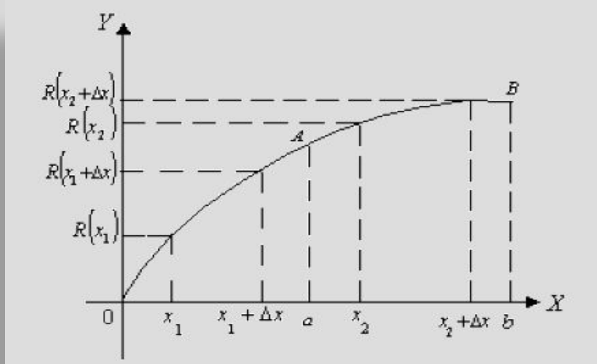
შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება მარჟინალური ფუნქცია?
- რას ეწოდება ფუნქციის წარმოებული წერტილში?
- რას უწოდებენ ფუნქციის წარმოებულის პოვნის ოპერაციას?
- რაში მდგომარეობს წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი?
- მოიყვანეთ ფუნქციის ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და ფარდობის წარმოებულთა გამოსათვლელი ფორმულები.
- ამოწერეთ ძირითადი ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი.

§ 10.1. წარმოებულის ცნება

- მრავალ ეკონომიკურ ამოცანაში გვჭირდება იმის დადგენა, თუ რომელ შუალედებში იზრდება ან კლებულობს ფუნქცია, სად აღწევს ის ლოკალურ მაქსიმუმს ან მინიმუმს. მაგალითად, როდის აღწევს შემოსავლის ფუნქცია $y = R(x)$ მაქსიმუმს, ან როდისაა მოგება $y = P(x)$ მაქსიმალური.

- ვთქვათ, შემოსავლის $y = (TR) = R(x)$ ფუნქციის გრაფიკია წირი, რომელიც გამოსახულია ნახაზზე:



ნახაზიდან ჩანს, რომ $R(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[\,0; b\,]$ შუალედზე, ამასთან იგი უფრო სწრაფად იზრდება $[\,0; a\,]$ შუალედზე, ვიდრე $[\,a; b\,]$ შუალედზე.

ამ ფუნქცის ეკონომიკური შინაარსი შემდეგია: თუ შევადარებთ ერთმანეთს შემოსავლის ზრდას გაყიდული საქონლის ერთი და იმავე Δx რაოდენობით ზრდისას x_1 − დან $x_1 + \Delta x$ − მდე და x_2 − დან $x_2 + \Delta x$ − მდე, დავინახავთ, რომ პირველ შემთხვევაში შემოსავლის ცვლილება (ნამატი) საქონლის ერთეულზე გაანგარიშებით, არის

$$\frac{R(x_1 + \Delta x) - R(x_1)}{\Delta x}$$

ხოლო, მეორე შემთხვევაში:

$$\frac{R(x_2 + \Delta x) - R(x_2)}{\Delta x}$$

➢ ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$R(x_1+\Delta x)\ -\ R(x_1) > R(x_2+\Delta x)\ -\ R(x_2)$$

ამიტომ

$$\frac{R(x_1+\Delta x)\ -\ R(x_1)}{\Delta x} > \frac{R(x_2+\Delta x)\ -\ R(x_2)}{\Delta x}$$

➢ **ეს ნიშნავს შემდეგს:** გაყიდული საქონლის Δx რაოდენობით გაზრდისას შემოსავლის საშუალო ცვლილება (ნამატი) პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით უფრო მეტია $[\,\mathbf{0}; a\,]$ შუალედის x_1 წერტილისათვის, ვიდრე $[\,a; b\,]$ შუალედის x_2 წერტილისათვის.

➢ ე.ი. შეფარდება

$$\frac{R(x+\Delta x)\ -\ R(x)}{\Delta x} \qquad (10.1)$$

აღწერს მთლიანი ამონაგების **"ცვლილების სიჩქარეს"** პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით, როდესაც გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა იზრდება $x-$დან $x+\Delta x-$მდე.

➢ რაც უფრო მცირეა Δx რიცხვი, მით უფრო ზუსტად ახასიათებს (**10.1**) შეფარდება $R(x)$ ფუნქციის **"ცვლილების სიჩქარეს"**.

➢ თუ შემოსავლის ფუნქცია **წრფივია**, მაშინ მისი **"ცვლილების სიჩქარე"** მუდმივია.

➢ მართლაც:

$$y = (TR) = R(x) = P \cdot x$$

შესაბამისად,

$$\frac{R(x+\Delta x)\ -\ R(x)}{\Delta x} = \frac{P\cdot(x+\Delta x)\ - P\cdot x}{\Delta x} = \frac{P\cdot x + P\cdot\Delta x\ - P\cdot x}{\Delta x} = \frac{P\cdot\Delta x}{\Delta x} = P.$$

❑ ე.ი. წრფივი მოდელის შემთხვევაში შემოსავლის **"ცვლილების სიჩქარე"** არ არის დამოკიდებული Δx ნაზრდის შერჩევაზე.

- ზოგად შემთხვევაში კი, ფუნქციის **"ცვლილების სიჩქარის"** იდეალურად ზუსტი მახასიათებელი იქნება (10.1) გამოსახულების $\left[\frac{R(x+\Delta x)-R(x)}{\Delta x}\right]$ ზღვარი, როცა $\Delta x \to 0$. თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ მას **ზღვრული, ანუ მარჟინალური შემოსავალი** ეწოდება და აღინიშნება (MR) სიმბოლოთი. ე.ი.

$$(MR) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(x+\Delta x) - R(x)}{\Delta x} \qquad (10.2)$$

- ამ ტიპის ზღვრებს მივყავართ წარმოებულის ცნებამდე.
- ვთქვათ, მოცემული $y = f(x)$ უწყვეტი ფუნქცია, განსაზღვრული $[a; b]$ შუალედზე და x ამ შუალედის რაიმე წერტილია. არგუმენტის Δx ნაზრდისათვის დავწეროთ ფუნქციის Δy ნაზრდი:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

- ეს გამოსახულება დამოკიდებულია Δx –ზე, ე.ი. ის წარმოედგენს Δx –ის ფუნქციას. Δx –ის ფუნქცია იქნება აგრეთვე შეფარდება:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (10.3)$$

- და თუ არსებობს ამ შეფარდების ზღვარი, როცა $\Delta x \to 0$, მას **ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში.**

- **ფუნქციის წარმოებული x წერტილში ეწოდება ამ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტი ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს (თუ ეს ზღვარი არსებობს), როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფის ნულისაკენ.**
- ფუნქციის წარმოებული აღინიშნება შემდეგნაირად: $f'(x)$; y' ; $\frac{dy}{dx}$ ("დე იგრეკ დე იქსი") ან, $\frac{df(x)}{dx}$.

ამრიგად,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (10.4)$$

- **ამოცანა 1.** გამოვთვალოთ $y = f(x) = x^2 + 2$ ფუნქციის წარმოებული $x = 4$ წერტილში.
- **ამოხსნა.** ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის ნაზრდი $x = 4$ წერტილში

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(4 + \Delta x) - f(4) = (4 + \Delta x)^2 + 2 - \left(4^2 + 2\right) = 8 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x \cdot (\Delta x + 8)$$

და განვიხილოთ შეფარდება:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot (\Delta x + 8)}{\Delta x} = \Delta x + 8\,.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$, მივიღებთ

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 8) = 8\,.$$

- ზუსტად ასევე გამოითვლება $y = x^2$ ფუნქციის წარმოებული ნებისმიერ x წერტილში და ადგილი ექნება ტოლობას:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

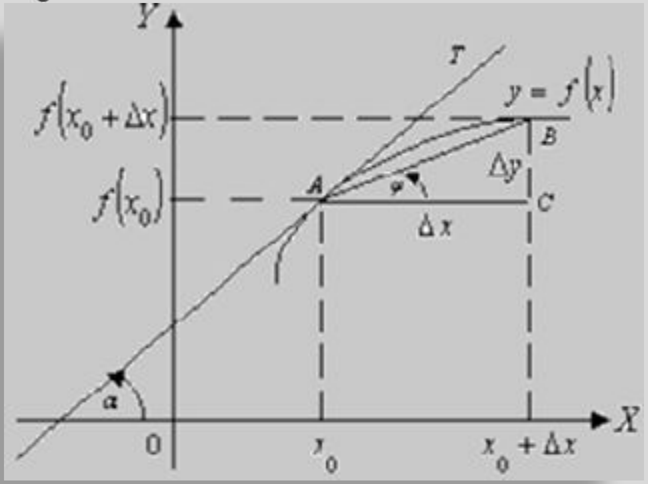
- ამრიგად, ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელად საჭიროა ვიპოვოთ ფუნქციის Δy ნაზრდი და გამოვთვალოთ ზღვარი,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ არსებობს ფუნქციის წარმოებული x წერტილში.
- ფუნქციის **წარმოებულის გამოთვლის ოპერაციას გაწარმოება ეწოდება.**

§ 10.2. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი

- გავეცნოთ წარმოებულის გეომეტრიულ შინაარსს. ვთქვათ, $\boldsymbol{y = f(x)}$ ფუნქციის შესაბამის წირს $\boldsymbol{A(x_0;\, f(x_0))}$ წერტილში გააჩნია მხები .



- გამოვთვალოთ, $\boldsymbol{A(\,x_0;\, f(x_0)\,)}$ და $\boldsymbol{B(\,x_0 + \Delta x;\, f(x_0 + \Delta x)\,)}$ წერტილებზე გამავალი $\boldsymbol{AB}$ მკვეთის $\boldsymbol{OX}$ ღერძთან დახრის $\boldsymbol{\varphi}$ კუთხის ტანგესი: $\left(\mathrm{tg}\,\boldsymbol{\varphi} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ და მივასწრაფოთ $\Delta\boldsymbol{x}$ ნაზრდი ნულისკენ. მაშინ $\boldsymbol{AB}$ წრფე დაიკავებს ზღვრულ მდებარეობას და დაემთხვევა $\boldsymbol{AT}$ მხებს.
- ცხადია, ამ შემთხვევაში $\angle\boldsymbol{BAC}$ მიისწრაფის $\angle\boldsymbol{TAC}$ –კენ ანუ, $\mathrm{tg}\,\boldsymbol{\varphi} \to \mathrm{tg}\,\boldsymbol{\alpha}$.
- წარმოებულის განმარტების თანახმად

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \lim_{\Delta x\to 0} \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\varphi} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{AC}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}}{\boldsymbol{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}} = \boldsymbol{f'(x_0)}$$

- ე.ი. ფუნქციის წარმოებული $\boldsymbol{x_0}$ წერტილში რიცხობრივად ტოლია იმ კუთხის ტანგენსის, რომელსაც $\boldsymbol{f(x)}$ ფუნქციის გრაფიკის $\boldsymbol{A(\,x_0;\, f(x_0)\,)}$წერტილში გავლებული მხები შეადგენს $\boldsymbol{OX}$ ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

§ 10.4. გაწარმოების წესები და წარმოებულების ცხრილი

- **თეორემა 10.2.** თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია რაიმე ინტერვალში, მაშინ ამავე ინტერვალში წარმოებადია აგრეთვე $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (როცა $g(x) \neq 0$), ფუნქციები და მართებულია ტოლობები:

- *ძირითადი ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:*

- სავარჯიშო 1. გამოვთვალოთ ფუნქციების წარმოებულები.

- 2. $y = 3x^2 - \log_2 x$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

- შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left(3x^2 - \log_2 x\right)' = \left(3x^2\right)' - (\log_2 x)' = 3 \cdot \left(x^2\right)' - (\log_2 x)' = 6x - \frac{1}{x \cdot \ln 2}\ .$$

- 4. $y = 5x^2 + 2\sin x$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

- შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left(5x^2 + 2\sin x\right)' = \left(5x^2\right)' + (2\sin x)' = 5 \cdot \left(x^2\right)' + 2 \cdot (\sin x)' = 10x - 2\cos x\ .$$

- 6. $y = 2x^3 - 4\ln x$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

- შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left(2x^3 - 4\ln x\right)' = \left(2x^3\right)' - (4\ln x)' = 2 \cdot \left(x^3\right)' - 4 \cdot (\ln x)' = 6x^2 - \frac{4}{x}\ .$$

- 8. $y = x^2 \cdot e^x$

➤ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

- შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left(x^2 \cdot e^x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x .$$

- 10. $y = 4x^3 \cdot 3\ln x$

➤ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

- შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left(4x^3 \cdot 3\ln x\right)' = 12 \cdot \left[\left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)'\right] = 12 \cdot \left[3x^2 \cdot \ln x + \frac{x^3}{x}\right] = 36x^2 \cdot \ln x + 12x^2 .$$

- 12. $y = 2x^3 \cdot \sin x$

➤ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

- შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left(2x^3 \cdot \sin x\right)' = 2 \cdot \left[\left(x^3\right)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)'\right] = 2 \cdot \left[3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x\right] = 6x^2 \cdot \sin x + 2x^3 \cdot \cos x .$$

❑ **14.** $y = e^x \cdot \ln x$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (e^x \cdot \ln x)' = (e^x)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)' = e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}.$$

❑ **16.** $y = 2^x \cdot \sin x$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (2^x \cdot \sin x)' = (2^x)' \cdot \sin x + 2^x \cdot (\sin x)' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sin x + 2^x \cdot \cos x = 2^x(\ln 2 \cdot \sin x + \cos x).$$

❑ **18.** $y = \frac{x^3}{\sin x}$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left[\frac{x^3}{\sin x}\right]' = \frac{(x^3)' \cdot \sin x - x^3 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3x^2 \cdot \sin x - x^3 \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$$

❑ 20. $y = \frac{2^x}{\cos x}$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left[\frac{2^x}{\cos x}\right]' = \frac{(2^x)' \cdot \cos x - 2^x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{2^x \ln 2 \cdot \cos x + 2^x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{2^x(\ln 2 \cdot \cos x + \sin x)}{\cos^2 x}.$$

❑ 22. $y = \frac{3x^2 - 3x + 1}{\cos x}$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left[\frac{3x^2 - 3x + 1}{\cos x}\right]' = \frac{(3x^2 - 3x + 1)' \cdot \cos x - (3x^2 - 3x + 1) \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{(6x - 3) \cdot \cos x + (3x^2 - 3x + 1) \cdot \sin x}{\cos^2 x}.$$

❑ 24. $y = \frac{tgx}{2x - 1}$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left[\frac{tgx}{2x - 1}\right]' = \frac{(tgx)' \cdot (2x - 1) - tgx \cdot (2x - 1)'}{(2x - 1)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (2x - 1) - 2 \cdot tgx}{(2x - 1)^2}.$$

❑ 26. $y = \log_5 x + e^x \cdot \cos x$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (\log_5 x + e^x \cdot \cos x)' = (\log_5 x)' + [e^x \cdot \cos x]' = \frac{1}{x \cdot \ln 5} + [(e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)'] =$$

$$= \frac{1}{x \cdot \ln 5} + e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x = \frac{1}{x \cdot \ln 5} + e^x \cdot (\cos x - \sin x)$$

❑ 28. $y = \mathrm{tg}x + x^2 \cdot \sin x$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (tgx + x^2 \cdot \sin x)' = (tgx)' + (x^2 \cdot \sin x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x \, .$$

❑ 30. $y = 3x^2 + \frac{e^x}{\cos x}$

➢ **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left(3x^2 + \frac{e^x}{\cos x}\right)' = (3x^2)' + \left(\frac{e^x}{\cos x}\right)' = 6x + \frac{(e^x)' \cdot \cos x - e^x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = 6x + \frac{e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x}{(\cos x)^2} = 6x + \frac{e^x \cdot (\cos x + \sin x)}{(\cos x)^2}.$$

- **32.** $y = 2^x \cdot \arccos x$

- **ამოხსნა.** თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

- შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (2^x \cdot \arccos x)' = (2^x)' \cdot \arccos x + 2^x \cdot (\arccos x)' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \arccos x - \frac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}.$$