

საშინაო დავალება: N^o 9

სახელმძღვანელო : ნ. ხვედელიძე. მათემატიკა ეკონომიკის და ბიზნესისათვის

სასწავლო თემა: თავი 10. ფუნქციის წარმოებული [197 - 195]

- § 10.1. წარმოებულის ცნება [197 - 200]
- § 10.2. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი [200]
- § 10.4. გაწარმოების წესები და წარმოებულის ცხრილი [202]

□ საშინაო დავალება:

§ 10.1. § 10.2. და § 10.4. პარაგრაფებში გარჩეული ყველა ამოცანა.

□ საფარჯიშო N^o 10. გვ. [207] N^o 1 (კენჭები)

(საფარჯიშოების პასუხები: გვ. 455)

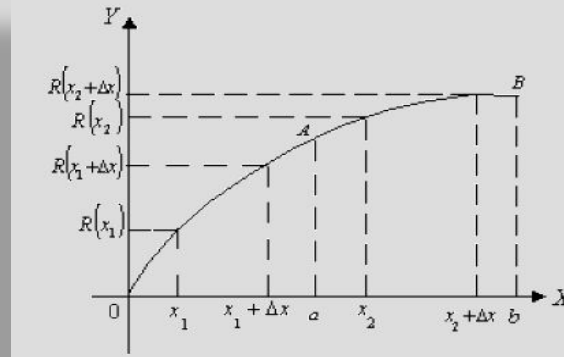
შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა

შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება მარკინალური ფუნქცია?
- რას ეწოდება ფუნქციის წარმოებული წერტილში?
- რას უწოდებენ ფუნქციის წარმოებულის პონის ოპერაციას?
- რაში მდგომარეობს წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი?
- მოიყვანეთ ფუნქციის ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და ფარდობის წარმოებულთა გამოსათვლელი ფორმულები.
- ამოწერეთ ძირითადი ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი.

§ 10.1. წარმოებულის ცნება

- მრავალ ეკონომიკურ ამოცანაში გვჭირდება იმის დადგენა, თუ რომელ შუალედებში იზრდება ან კლებულობს ფუნქცია, სადა აღწევს ის ლოკალურ მაქსიმუმს ან მინიმუმს. მაგალითად, როდის აღწევს შემოსავლის ფუნქცია $y = R(x)$ მაქსიმუმს, ან როდისაა მოგება $y = P(x)$ მაქსიმალური.
- ვთქვათ, შემოსავლის $y = (TR) = R(x)$ ფუნქციის გრაფიკია წირი, რომელიც გამოსახულია ნახაზზე:



ნახაზიდან ჩანს, რომ $R(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[0; b]$ შუალედზე, ამასთან იგი უფრო სწრაფად იზრდება $[0; a]$ შუალედზე, ვიდრე $[a; b]$ შუალედზე.

ამ ფუნქციის ეკონომიკური შინაარსი შემდეგია: თუ შევადარებთ ერთმანეთს შემოსავლის ზრდას გაყიდული საქონლის ერთი და იმავე Δx რაოდენობით ზრდისას $x_1 -$ დან $x_1 + \Delta x -$ მდე და $x_2 -$ დან $x_2 + \Delta x -$ მდე, დავინახავთ, რომ პირველ შემთხვევაში შემოსავლის ცვლილება (ნამატი) საქონლის ერთეულზე გაანგარიშებით, არის

$$\frac{R(x_1 + \Delta x) - R(x_1)}{\Delta x}$$

ხოლო, მეორე შემთხვევაში:

$$\frac{R(x_2 + \Delta x) - R(x_2)}{\Delta x}$$

➤ ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$R(x_1 + \Delta x) - R(x_1) > R(x_2 + \Delta x) - R(x_2)$$

ამიტომ

$$\frac{R(x_1 + \Delta x) - R(x_1)}{\Delta x} > \frac{R(x_2 + \Delta x) - R(x_2)}{\Delta x}$$

➤ ეს ნიშნავს შემდეგს: გაყიდული საქონლის Δx რაოდენობით გაზრდისას შემოსავლის საშუალო ცვლილება (ნამატი) პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით უფრო მეტია $[0; a]$ შუალედის x_1 წერტილისათვის, ვიდრე $[a; b]$ შუალედის x_2 წერტილისათვის.

➤ ე.ი. შეფარდება

$$\frac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x} \tag{10.1}$$

აღწერს მთლიანი ამონაგების “ცვლილების სიჩქარეს” პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით, როდესაც გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა იზრდება x -დან $x + \Delta x$ -მდე.

➤ რაც უფრო მცირეა Δx რიცხვი, მით უფრო ზუსტად ახასიათებს (10.1) შეფარდება $R(x)$ ფუნქციის “ცვლილების სიჩქარეს”.

➤ თუ შემოსავლის ფუნქცია წრფივია, მაშინ მისი “ცვლილების სიჩქარე” მუდმივია.

➤ მართლაც:

$$y = (TR) = R(x) = P \cdot x$$

შესაბამისად,

$$\frac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x} = \frac{P \cdot (x + \Delta x) - P \cdot x}{\Delta x} = \frac{P \cdot x + P \cdot \Delta x - P \cdot x}{\Delta x} = \frac{P \cdot \Delta x}{\Delta x} = P.$$

□ ე.ი. წრფივი მოდელის შემთხვევაში შემოსავლის “ცვლილების სიჩქარე” არ არის დამოკიდებული Δx ნაზრდის შერჩევაზე.

- ❑ ზოგად შემთხვევაში კი, ფუნქციის “ცვლილების სიჩქარის” იდეალურად ზუსტი მახასიათებელი იქნება (10.1) გამოსახულების $\left[\frac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x} \right]$ ზღვარი, როცა $\Delta x \rightarrow 0$. თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ მას ზღვრული, ანუ მარჩინალური შემოსავალი ეწოდება და აღინიშნება (MR) სიმბოლოთი. ე.ი.

$$(MR) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x} \quad (10.2)$$

- ამ ტიპის ზღვრებს მივყავართ წარმოებულის ცნებამდე.
- ვთქვათ, მოცემული $y = f(x)$ უწყვეტი ფუნქცია, განსაზღვრული $[a; b]$ შუალედზე და x ამ შუალედის რაიმე წერტილია. არგუმენტის Δx ნაზრდისათვის დავწეროთ ფუნქციის Δy ნაზრდი:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

- ეს გამოსახულება დამოკიდებულია Δx -ზე, ე.ი. ის წარმოედგენს Δx -ის ფუნქციას. Δx -ის ფუნქცია იქნება აგრეთვე შეფარდება:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (10.3)$$

- და თუ არსებობს ამ შეფარდების ზღვარი, როცა $\Delta x \rightarrow 0$, მას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში.
- ❑ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში ეწოდება ამ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტი ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს (თუ ეს ზღვარი არსებობს), როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფის ნულისაკენ.

- ფუნქციის წარმოებული აღინიშნება შემდეგნაირად: $f'(x)$; y' ; $\frac{dy}{dx}$ ("დე იგრეკ დე იქსი") ან, $\frac{df(x)}{dx}$.

ამრიგად,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (10.4)$$

❑ ამოცანა 1. გამოვთვალოთ $y = f(x) = x^2 + 2$ ფუნქციის წარმოებული $x = 4$ წერტილში.

❑ ამოხსნა. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის ნაზრდი $x = 4$ წერტილში

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(4 + \Delta x) - f(4) = (4 + \Delta x)^2 + 2 - (4^2 + 2) = 8 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x \cdot (\Delta x + 8)$$

და განვიხილოთ შეფარდება:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot (\Delta x + 8)}{\Delta x} = \Delta x + 8.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 8) = 8.$$

➤ ზუსტად ასევე გამოითვლება $y = x^2$ ფუნქციის წარმოებული ნებისმიერ x წერტილში და ადგილი ექნება ტოლობას:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

➤ ამრიგად, ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელად საჭიროა ვიპოვოთ ფუნქციის Δy ნაზრდი და გამოვთვალოთ ზღვარი,

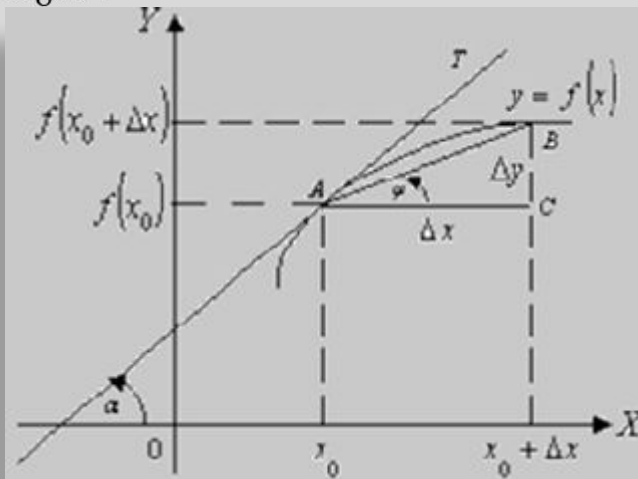
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

➤ თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ არსებობს ფუნქციის წარმოებული x წერტილში.

❑ ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის ოპერაციას გაწარმოება ეწოდება.

§ 10.2. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი

- გავეცნოთ წარმოებულის გეომეტრიულ შინაარსს. ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქციის შესაბამის წირს $A(x_0; f(x_0))$ წერტილში გააჩნია მხები .



- გამოვთვალოთ, $A(x_0; f(x_0))$ და $B(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ წერტილებზე გამავალი AB მკვეთის OX ღერძთან დახრის φ კუთხის ტანგენსი: $(\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ და მივასწრაფოთ Δx ნაზრდი ნულისკენ. მაშინ AB წრფე დაიკავებს ზღვრულ მდებარეობას და დაემთხვევა AT მხებს.
- ცხადია, ამ შემთხვევაში $\angle BAC$ მიისწრაფვის $\angle TAC$ -კენ ანუ, $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$.
- წარმოებულის განმარტების თანახმად

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{BC}{AC} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

- ე.ი. ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში რიცხობრივად ტოლია იმ კუთხის ტანგენსის, რომელსაც $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $A(x_0; f(x_0))$ წერტილში გავლებული მხები შეადგენს OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

§ 10.4. გაწარმოების წესები და წარმოებულების ცხრილი

- თეორემა 10.2. თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია რაიმე ინტერვალში, მაშინ ამავე ინტერვალში წარმოებადია აგრეთვე $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (როცა $g(x) \neq 0$), ფუნქციები და მართებულია ტოლობები:

- ძირითადი ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:

სავარჯიშო 1. გამოვთვალოთ ფუნქციების წარმოებულები.

2. $y = 3x^2 - \log_2 x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (3x^2 - \log_2 x)' = (3x^2)' - (\log_2 x)' = 3 \cdot (x^2)' - (\log_2 x)' = 6x - \frac{1}{x \cdot \ln 2} .$$

4. $y = 5x^2 + 2 \sin x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (5x^2 + 2 \sin x)' = (5x^2)' + (2 \sin x)' = 5 \cdot (x^2)' + 2 \cdot (\sin x)' = 10x - 2 \cos x .$$

6. $y = 2x^3 - 4 \ln x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (2x^3 - 4 \ln x)' = (2x^3)' - (4 \ln x)' = 2 \cdot (x^3)' - 4 \cdot (\ln x)' = 6x^2 - \frac{4}{x} .$$

❑ 8. $y = x^2 \cdot e^x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (x^2 \cdot e^x)' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x .$$

❑ 10. $y = 4x^3 \cdot 3 \ln x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (4x^3 \cdot 3 \ln x)' = 12 \cdot [(x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)'] = 12 \cdot \left[3x^2 \cdot \ln x + \frac{x^3}{x} \right] = 36x^2 \cdot \ln x + 12x^2 .$$

❑ 12. $y = 2x^3 \cdot \sin x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (2x^3 \cdot \sin x)' = 2 \cdot [(x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)'] = 2 \cdot [3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x] = 6x^2 \cdot \sin x + 2x^3 \cdot \cos x .$$

14. $y = e^x \cdot \ln x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (e^x \cdot \ln x)' = (e^x)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)' = e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}.$$

16. $y = 2^x \cdot \sin x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (2^x \cdot \sin x)' = (2^x)' \cdot \sin x + 2^x \cdot (\sin x)' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sin x + 2^x \cdot \cos x = 2^x (\ln 2 \cdot \sin x + \cos x).$$

18. $y = \frac{x^3}{\sin x}$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left[\frac{x^3}{\sin x} \right]' = \frac{(x^3)' \cdot \sin x - x^3 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3x^2 \cdot \sin x - x^3 \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$$

□ 20. $y = \frac{2^x}{\cos x}$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

□ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left[\frac{2^x}{\cos x} \right]' = \frac{(2^x)' \cdot \cos x - 2^x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{2^x \ln 2 \cdot \cos x + 2^x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{2^x (\ln 2 \cdot \cos x + \sin x)}{\cos^2 x}.$$

□ 22. $y = \frac{3x^2 - 3x + 1}{\cos x}$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

□ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left[\frac{3x^2 - 3x + 1}{\cos x} \right]' = \frac{(3x^2 - 3x + 1)' \cdot \cos x - (3x^2 - 3x + 1) \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{(6x - 3) \cdot \cos x + (3x^2 - 3x + 1) \cdot \sin x}{\cos^2 x}.$$

□ 24. $y = \frac{tgx}{2x-1}$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

□ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left[\frac{tgx}{2x-1} \right]' = \frac{(tgx)' \cdot (2x-1) - tgx \cdot (2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (2x-1) - 2 \cdot tgx}{(2x-1)^2}.$$

❑ 26. $y = \log_5 x + e^x \cdot \cos x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

--	--	--	--

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} y' &= (\log_5 x + e^x \cdot \cos x)' = (\log_5 x)' + [e^x \cdot \cos x]' = \frac{1}{x \cdot \ln 5} + [(e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)'] = \\ &= \frac{1}{x \cdot \ln 5} + e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x = \frac{1}{x \cdot \ln 5} + e^x \cdot (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

❑ 28. $y = \operatorname{tg} x + x^2 \cdot \sin x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

--	--	--	--

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (\operatorname{tg} x + x^2 \cdot \sin x)' = (\operatorname{tg} x)' + (x^2 \cdot \sin x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x .$$

❑ 30. $y = 3x^2 + \frac{e^x}{\cos x}$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:

--	--	--	--	--

❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = \left(3x^2 + \frac{e^x}{\cos x} \right)' = (3x^2)' + \left(\frac{e^x}{\cos x} \right)' = 6x + \frac{(e^x)' \cdot \cos x - e^x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = 6x + \frac{e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x}{(\cos x)^2} = 6x + \frac{e^x \cdot (\cos x + \sin x)}{(\cos x)^2} .$$

❑ 32. $y = 2^x \cdot \arccos x$

➤ ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და წარმოებულების ცხრილს, კერძოდ:



❑ შესაბამისად, მივიღებთ:

$$y' = (2^x \cdot \arccos x)' = (2^x)' \cdot \arccos x + 2^x \cdot (\arccos x)' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \arccos x - \frac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}.$$