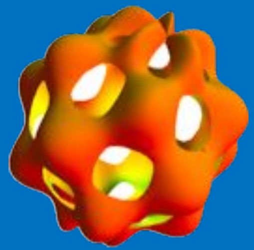
МЧС России
Санкт-Петербургский университет
Государственной противопожарной службы



Кафедра высшей математики и системного моделирования сложных процессов

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной
Тема 7. Производная и дифференциал

Лекция 7.1.

Понятие производной

Учебные цели:

- 1. Раскрыть содержание понятия производной.
- 2. Рассмотреть геометрический и физический смысл производной.
- 3. Сформировать представление о производных основных элементарных функций, правилах дифференцирования, производной сложной функции.

Учебные вопросы:

1. Определение производной
2. Геометрический и физический смысл производной.
3. Правила дифференцирования. Производная сложной функции

Начиная с сегодняшней лекции, мы переходим к изучению основных положений дифференциального исчисления – раздела математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применение к исследованию функций. Оформление дифференциального исчисления в самостоятельную математическую дисциплину связано с именами И.Ньютона (1643 – 1727) и Г. Лейбница (1646 – 1716), проводившими исследования независимо друг от друга.

Создание дифференциального исчисления (наряду с интегральным исчислением) открыло новую эпоху в развитии математики. Оно повлекло за собой появление ряда математических дисциплин: теории рядов, теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и вариационного исчисления. Методы математического анализа нашли применение во всех разделах математики и других точных наук. Благодаря дифференциальному исчислению неизмеримо расширилась область приложений математики к вопросам естествознания и техники.

Центральным аппаратом дифференциального исчисления служат понятия производной и дифференциала. Понятие производной возникло из большого числа задач естествознания и математики, приводящихся к вычислению пределов отношений некоторого типа бесконечно малых. Важнейшие из них – построение касательной к кривой и определение скорости движения точки.

На сегодняшней лекции мы изучим понятие производной, геометрический и физический смысл производной, правила дифференцирования, в том числе правила дифференцирования сложных функций.

Вопрос 1. Определение

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на некотором интервале $(a; b)$. Возьмем любую точку $x_0 \in (a;\ b)$ и добавим к x_0 некоторую величину Δx, называемую *приращением независимой переменной,* такую, что точка $x_0 + \Delta x$ также принадлежит $(a; b)$ (Рис. 1.)

Обозначим через Δy разность:

$\Delta y = f(\ x_0 + \Delta x) - \ f(x_0)$,

называемую *приращением функции*.

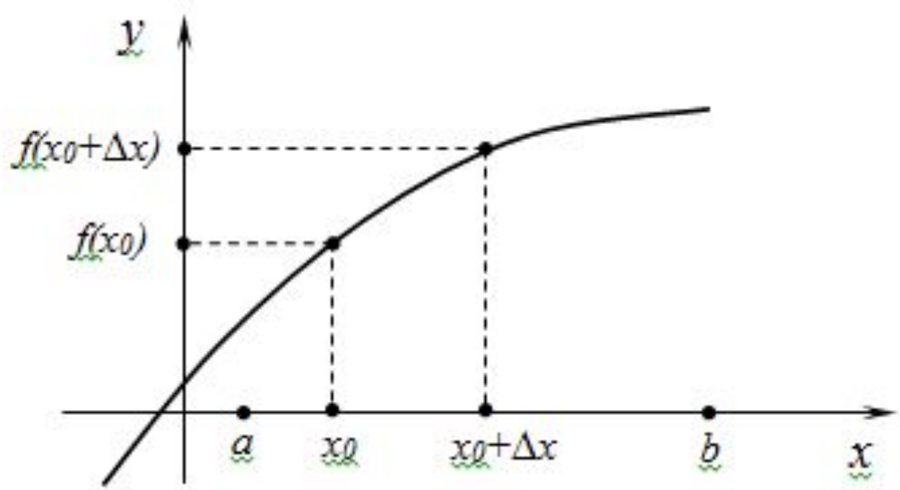


Рис. 1

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует).

Производная обозначается: $y'(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$; $f'(x)$ (для любой точки x).

Смысл термина: производная функции $y = f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, *произведенная* из данной функции.

Итак, по определению, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой на этом промежутке*. Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* функции.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение

1. Задаем приращение аргумента $\Delta x \neq 0$.

2. Находим приращение функции Δy: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 =$

$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

3. Составим отношение:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

4. По определению производной, находим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Получили: $(x^2)' = 2x$.

Пример 2. Найти производную постоянной функции $y = C$.(Решить самостоятельно.)

Решение

1. Пусть $\Delta x \neq 0$.

2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Получили: $C' = 0$.

Видим, что процесс нахождения производной по ее определению достаточно трудоемкий. Его применяют только для доказательства основных правил дифференцирования и формул для производных основных элементарных функций, которые сведены в таблицу производных.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $\left(x^m\right)' = mx^{m-1}, m \in R,$ – производная *степенной функции.*

1.1. $C' = 0$ – производная постоянной.

1.2. $x' = 1$ – производная независимой переменной.

2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a,\ a > 0,$ производная *показательной функции*.

2.1. $\left(e^x\right)' = e^x$.

3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1$ – производная *логарифмической функции*.

3.1. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

4. Производные *тригонометрических функций*:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5. Производные *обратных тригонометрических функций*:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|<1 \qquad\qquad (\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|<1 \qquad\qquad (\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x, то она непрерывна в этой точке.

То есть в точках разрыва функция не может иметь производной.

Замечание. Обратное не верно, т.е. из непрерывности функции $y = f(x)$ в некоторой точке x не следует дифференцируемость функции в этой точке.

Вопрос 2. Геометрический и физический смысл

Выясним геометрический смысл производной.

Функция $y = f(x)$ определяет на плоскости некоторую кривую (рис. 2).

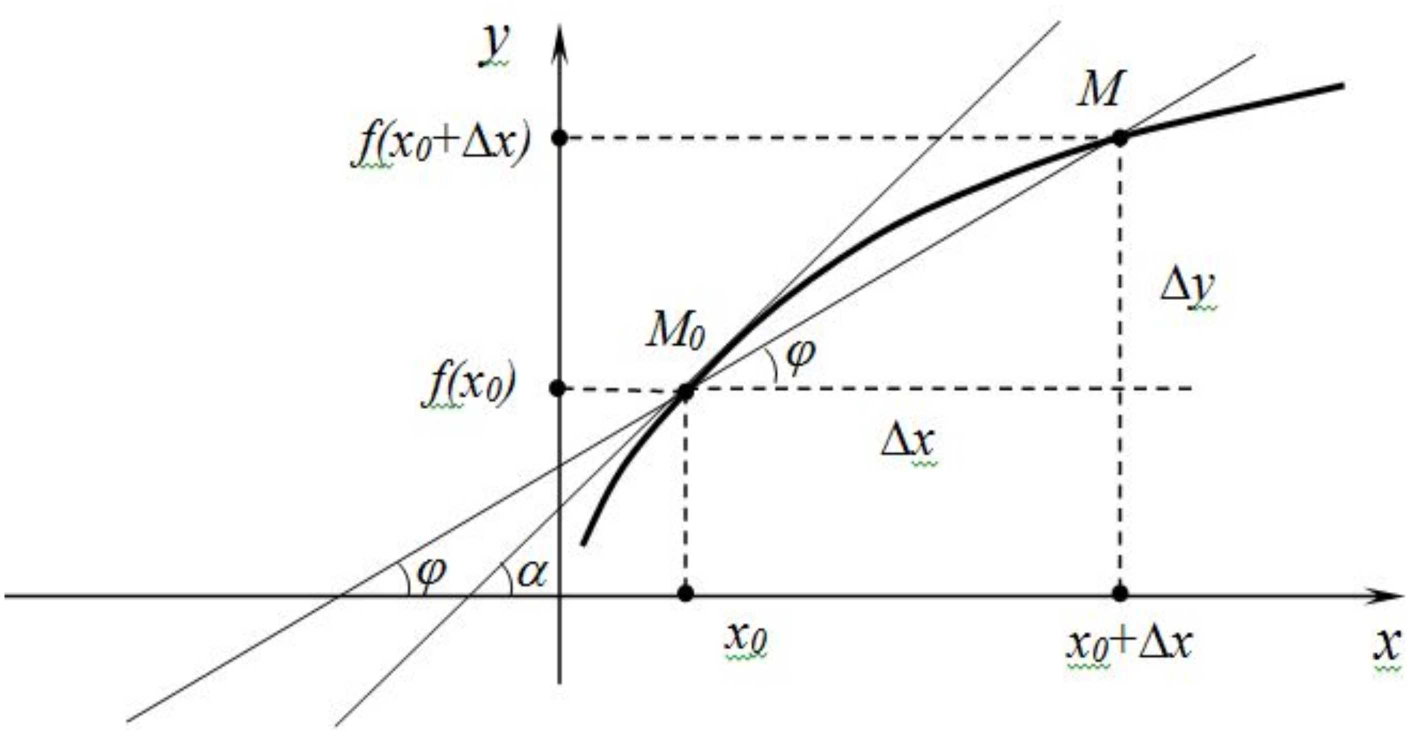


Рис. 2

Возьмем на кривой точку $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$. Придадим точке x_0 приращение Δx и рассмотрим точку $M\left(x_0+\Delta x; f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$ Через эти две точки проведем секущую, которая образует угол φ с положительным направлением оси Ox. Угловой коэффициент секущей равен:

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Предположим, что $\Delta x \to 0$, тогда отмеченные точки на кривой сближаются: $M \to M_0$.

В пределе секущая превращается в касательную к кривой в точке $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$. Ее угловой коэффициент, то есть тангенс угла наклона к положительному направлению оси Ox:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким образом, *геометрический смысл производной*:

значение производной в некоторой точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в данной точке, то есть тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в этой точке с положительным направлением оси Ox.

Выясним физический смысл производной.

Пусть некоторая материальная точка (тело) M движется неравномерно по некоторой прямой (рис. 3).

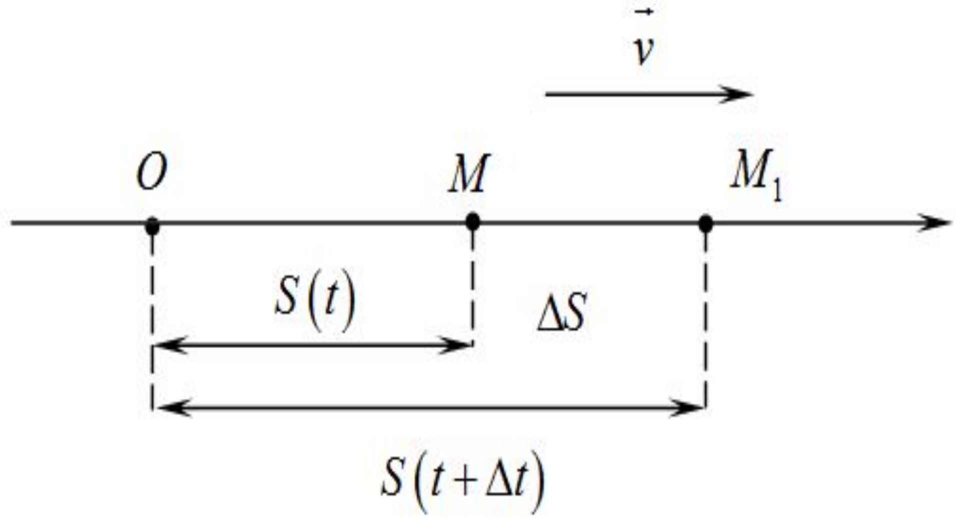


Рис. 3

Перемещение, отсчитываемое от момента времени $t=0$, есть функция от времени:

$$s = f(t). \qquad (1)$$

Формула (1) описывает закон движения точки.

Если Δt – приращение времени, то

$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ – приращение перемещения.

Тогда $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v_{\text{ср}}$ – средняя скорость движения точки за время Δt.

Для того чтобы точнее выразить скорость с помощью средней скорости, надо уменьшить промежуток времени Δt.

Скорость движения в данный момент времени (*мгновенная скорость*) – это предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$:

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Итак, скоростью движения в данный момент называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt, когда приращение времени стремится к 0.

Таким образом, мы выяснили *механический смысл производной*: скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t: $v = s'(t)$.

В общем случае, если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная $f'(x)$ есть *скорость протекания этого процесса*. В этом состоит *физический смысл производной*.

Приведем **пример**. Скорость роста площади пожара представляет собой прирост площади пожара за промежуток времени и зависит от многих факторов: скорости распространения горения, формы площади пожара, наличия преград на путях распространения горения, эффективности ведения боевых действий и т.д. Скорость роста площади пожара является важным параметром исследуемого пожара. Зная ее, можно определить, с какой скоростью следовало бы наращивать расход огнетушащих веществ, чтобы прекратить распространение горения и затем ликвидировать пожар с минимальным ущербом. Она определяется по формуле: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Вопрос 3. Правила дифференцирования. Производная сложной функции

Таблицы производных основных элементарных функций, составленной на основе определения производной, недостаточно для решения задач дифференцирования различных функций. Необходимы дополнительные правила, позволяющие вычислять производные элементарных и других функций. Рассмотрим эти правила.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке, и справедливы следующие правила.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке, и справедливы следующие правила.

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. Производная суммы (разности):

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

2. Производная произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

3. Производная частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (v \neq 0);$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(Cu)' = Cu', \text{ где } C = const.$$

Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ − *сложная функция* с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x («функция от функции»).

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'(u)$ в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ в точке x также имеет производную, которая равна:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{2}$$

То есть *производная сложной функции по независимой переменной **x** равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу **u** на производную промежуточного аргумента по **x**.*

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Пример 3. Дана функция $y = \sin(x^2)$. Найти y'_x.

Решение. Функцию представим как $y = \sin u$, $u = x^2 \Rightarrow y'_u = \cos u$, $u'_x = 2x$.

Применяя формулу для производной сложной функции, получаем

$$y'_x = \cos u \cdot 2x.$$

Подставляя вместо u его выражение, окончательно получаем:

$$y'_x = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Итак, мы познакомились с понятием производной функции, ее геометрическим и физическим смыслом, правилами дифференцирования. Рассмотрели особенности дифференцирования сложной функции.

Практическое занятие по данной теме будет посвящено вычислению производных с помощью таблицы и правил дифференцирования.

Задание на самоподготовку:

1. **Изучить рекомендуемую литературу.**
2. **Доработать (дополнить) конспект**