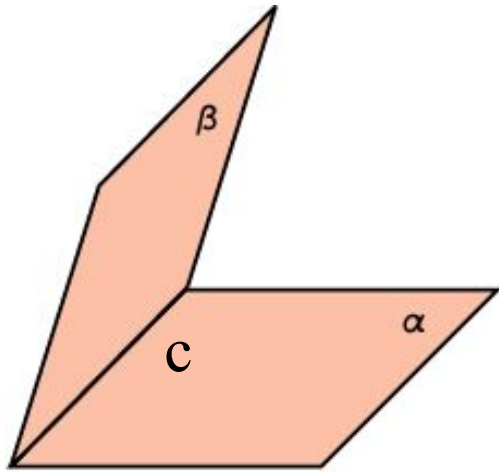
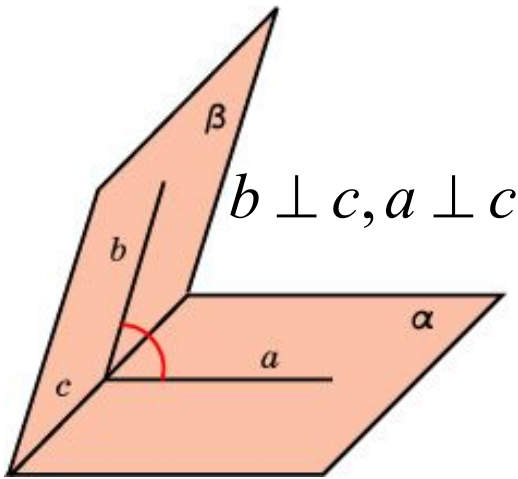


# ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ



Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой.

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный лучами с вершиной на граничной прямой, стороны которого лежат на гранях двугранного угла и перпендикулярны граничной прямой.



Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Какой угол образует ребро двугранного угла с любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?

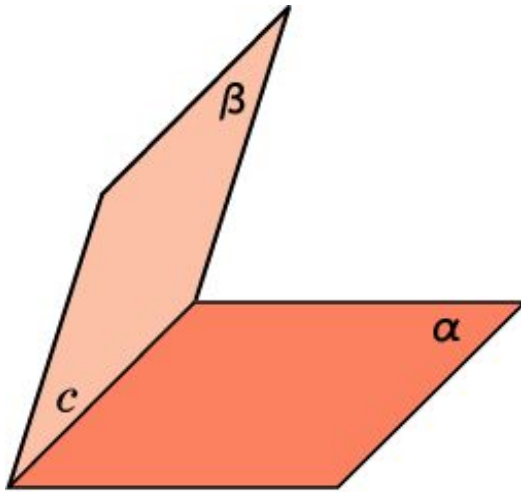


Рис. 1

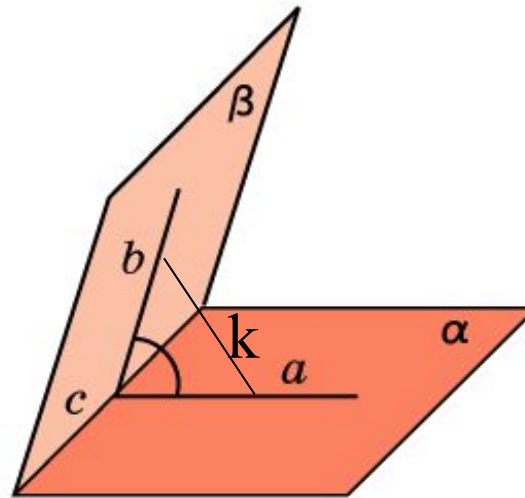
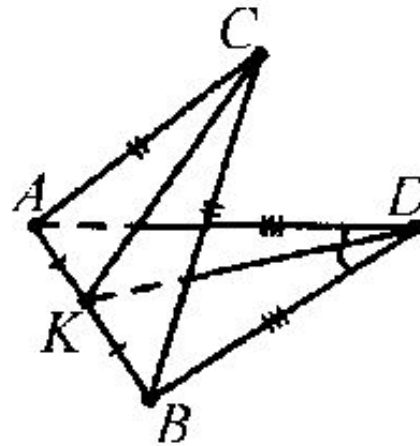


Рис. 2

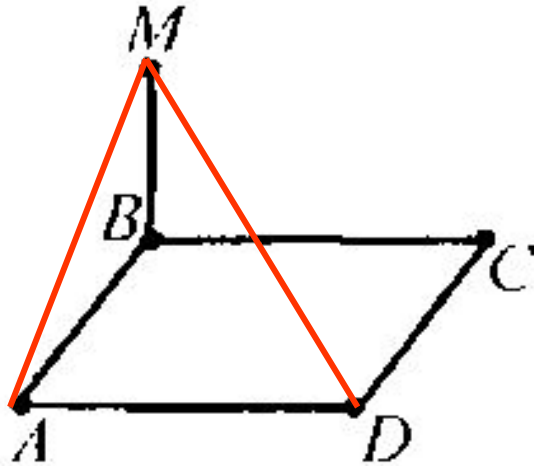
Ответ:  $90^\circ$ .

Плоскости двух равнобедренных треугольников с общим основанием образуют двугранный угол. Верно ли утверждение о том, что высоты, проведенные к общему основанию треугольников, образуют линейный угол двугранного угла?



Ответ: Да.

Треугольник  $MAV$  и квадрат  $ABCD$  заданы таким образом, что  $MB$  - перпендикуляр к плоскости квадрата. Какой угол можно считать углом между плоскостями  $AMD$  и  $ABC$ ?

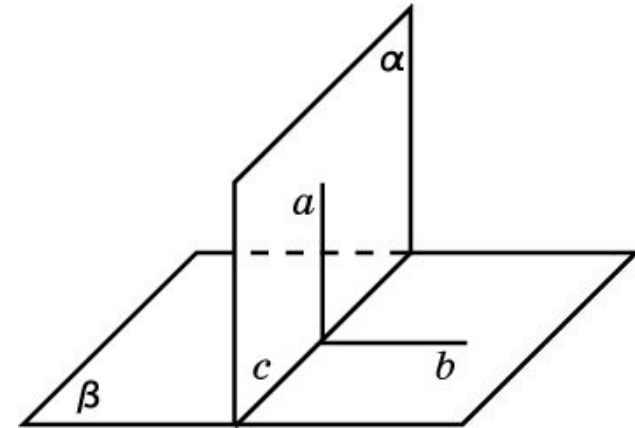


Ответ:  $MAV$ .

# ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости называются **перпендикулярными**, если угол между ними прямой.

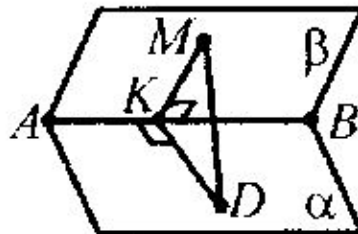
**Теорема. (Признак перпендикулярности двух плоскостей.)** Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



Дано :  $a \perp \beta, a \in \alpha$

Д – ть :  $\alpha \perp \beta$

**Следствие.** Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.



Дано :  $KMD \perp AB$

Д – ть :  $KMD \perp \alpha, KMD \perp \beta.$

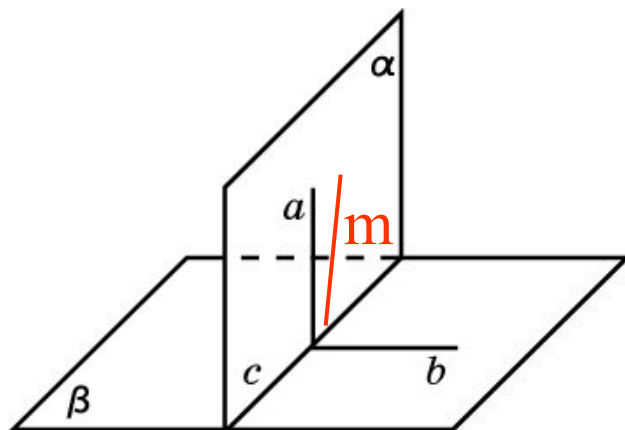
Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

Ответ: Нет.

Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через данную прямую?

**Ответ:** Бесконечно много, если прямая перпендикулярна плоскости, и одну в противном случае.

Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $\beta$ . Будет ли всякая прямая плоскости  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $\beta$ ?



Ответ: Нет.



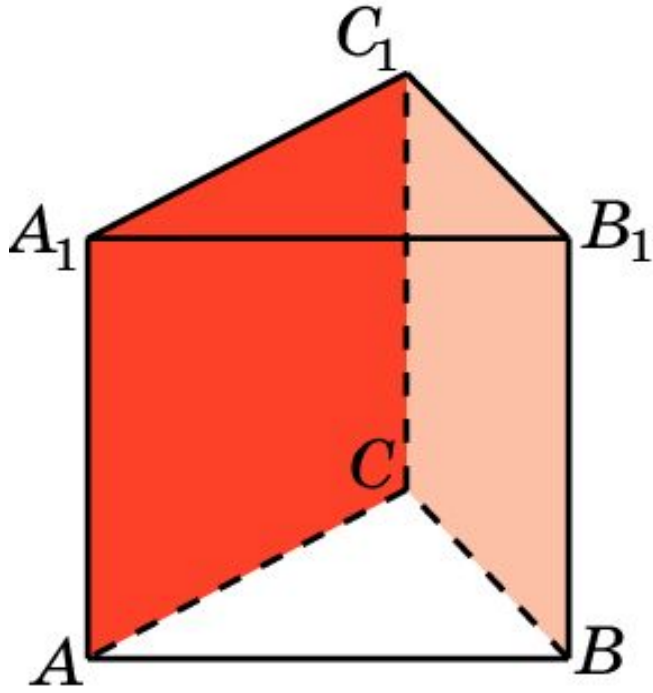
Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная данной плоскости, перпендикулярна и данной прямой?

Ответ: Нет.

Плоскость и прямая параллельны. Будет ли верно утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная прямой, перпендикулярна и данной плоскости?

Ответ: Да.

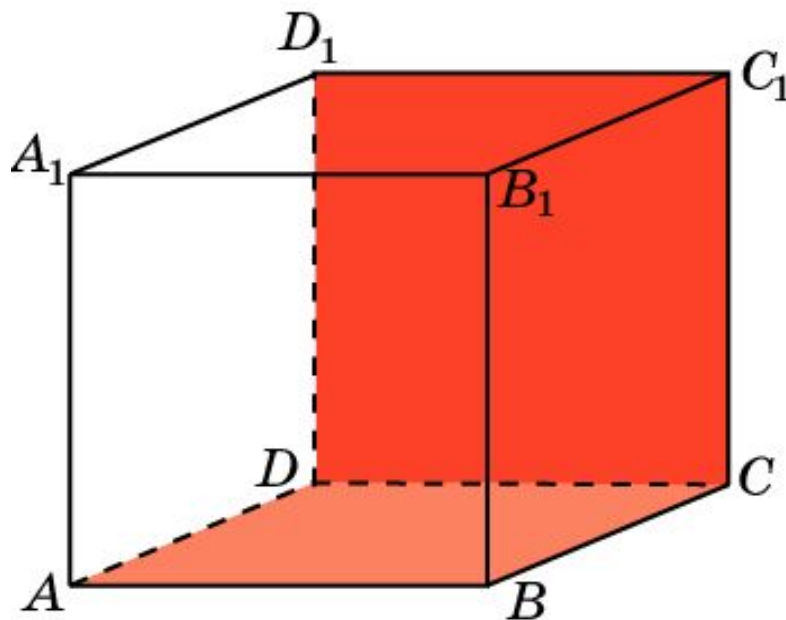
В правильной треугольной призме найдите угол между боковыми гранями.



Ответ:  $60^\circ$ .

## Упражнение 1

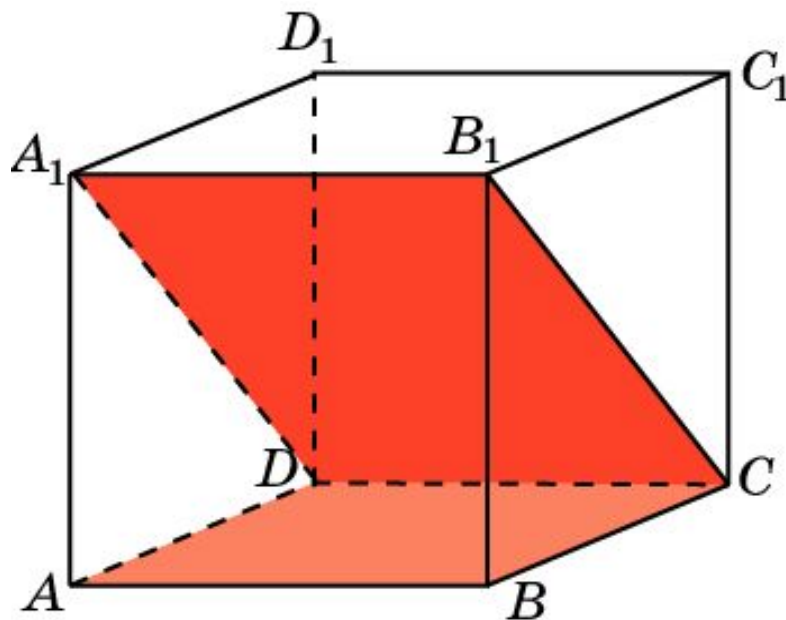
В кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $CDD_1$ .



Ответ:  $90^\circ$ .

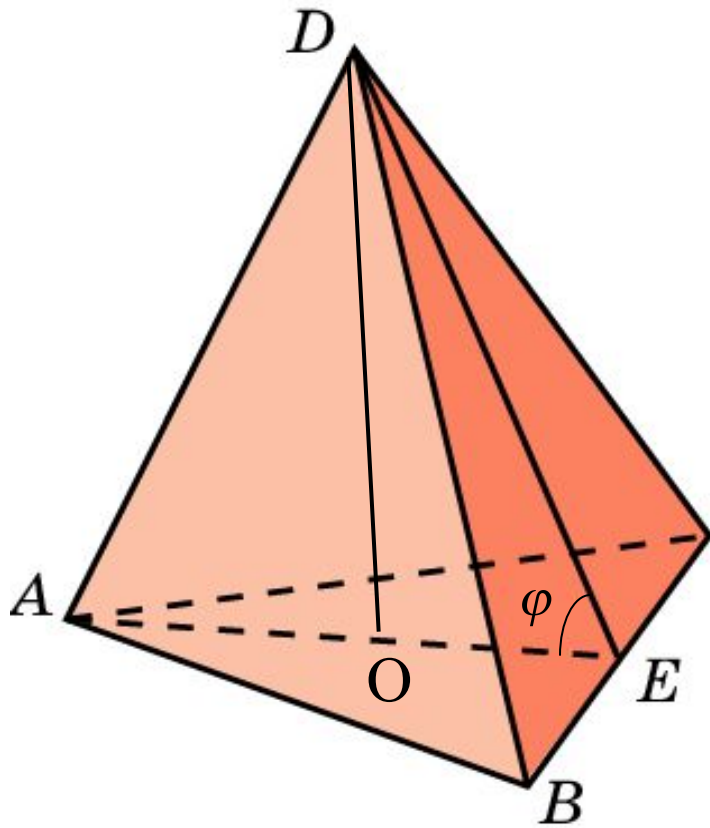
## Упражнение 2

В кубе  $A\dots D_1$  найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $CDA_1$ .



Ответ:  $45^\circ$ .

Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.



**Решение:** Пусть  $ABCD$  – правильный тетраэдр с ребром 1. Из вершин  $A$  и  $D$  опустим перпендикуляры  $AE$  и  $DE$  на ребро  $BC$ . Угол  $AED$  будет линейным углом  $\varphi$  искомого двугранного угла. В треугольнике  $ADE$  имеем:

$$AD = 1, AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

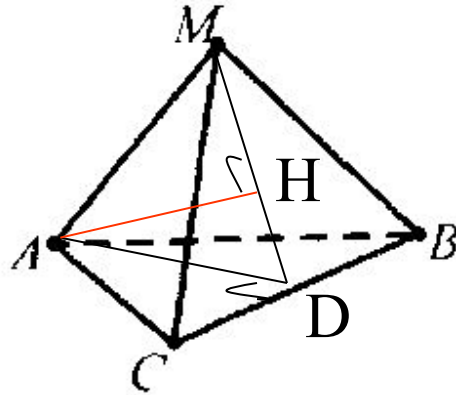
Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = \frac{1}{3}. \text{ Откуда } \varphi \approx 70^\circ 30'. \text{ Или } OE = \frac{1}{3} AE.$$

**Ответ:**  $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ ,  $\varphi \approx 70^\circ 30'$ .

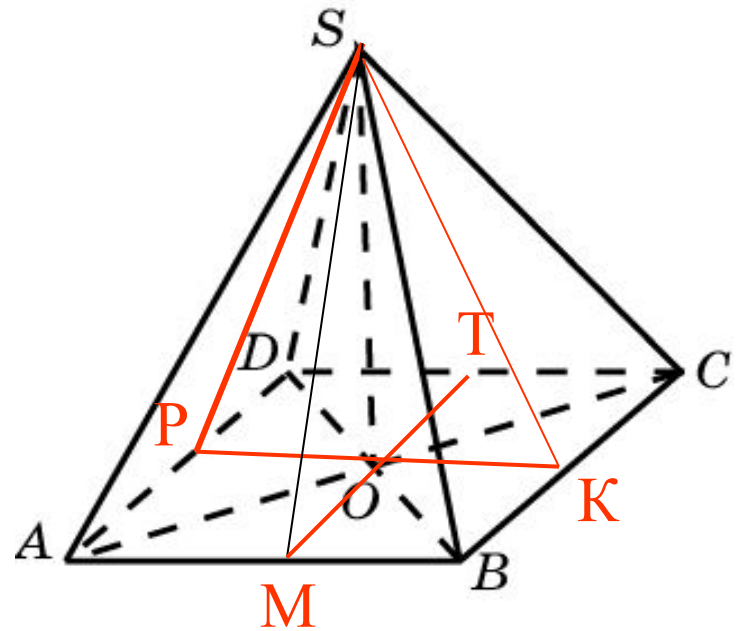
## Упражнение 3

Через сторону  $BC$  треугольника  $ABC$  проведена плоскость  $\alpha$  под углом  $30^\circ$  к плоскости треугольника. Высота  $AD$  треугольника  $ABC$  равна  $a$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  треугольника до плоскости  $\alpha$ .



Ответ:  $\frac{a}{2}$ .

Основанием высоты четырехугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Верно ли, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны, если основанием пирамиды является: а) квадрат; б) параллелограмм; в) ромб; г) равнобедренная трапеция?



**Ответ:** а) Да; б) нет; в) да; г) нет.



В основании прямой призмы параллелограмм со сторонами 4 дм и 5 дм. Угол между ними  $30^\circ$ . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, если известно, что она пересекает все боковые ребра и образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ .

Ответ:  $10\sqrt{2}$  дм<sup>2</sup>.