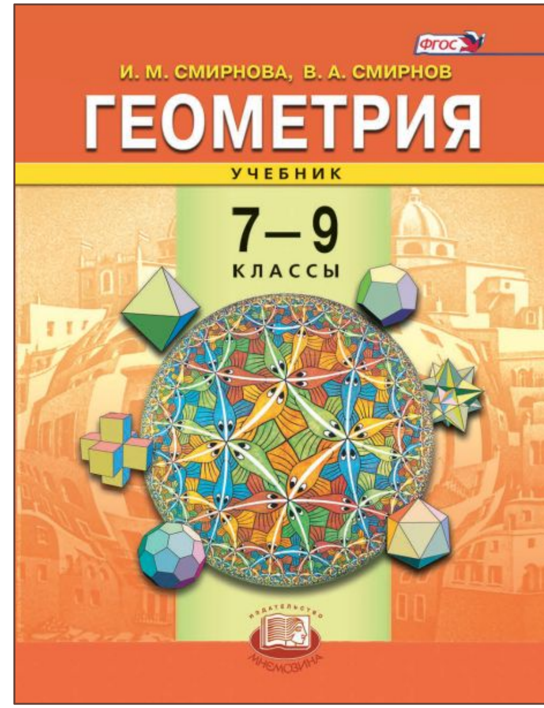
издательство Мнемозина

ВЕБИНАРЫ



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК. 7 КЛАСС

Презентация к **§ 19, 21*-23*** учебника
«Геометрия. **7-9** классы»
И.М. Смирновой и В.А. Смирнова

ВЕДУЩИЙ: **Смирнов Владимир Алексеевич**, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики МПГУ, автор учебников по геометрии для 5-6 7-9 и 10-11 классов

E-mail: v-a-smirnov@mail.ru Сайт: vasmirnov.ru

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии для 5-11 классов

Авторы:
Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.
Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

Учебно-методический комплект по геометрии

Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов

Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов

Программа по геометрии для 5-6 классов

Дидактические материалы
7-9 классы
7 класс (новые)
8 класс (новые)
9 класс (новые)

Уроки геометрии с “Power Point”
5-6 классы
7-9 классы
10-11 классы

Геометрия с "GeoGebra".

Элементарная математика для студентов педагогических вузов

Статьи и пособия о преподавании геометрии в школе

Видеолекции и вебинары   Подготовка к ОГЭ   Подготовка к ЕГЭ

Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

48 Геометрическое место точек

Одним из методов решения задач на построение является метод геометрических мест.

<u>**Геометрическим местом точек**</u> называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определённым свойством.

Например, окружность можно определить как геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки. Важное геометрическое место точек даёт следующая теорема:

Теорема 5.3

Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.

Доказательство.

Пусть A и B — данные точки, a — прямая, проходящая через середину O отрезка AB перпендикулярно к нему (рис. 105). Докажем, что:

1) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B; 2) каждая точка D плоскости, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a.

То, что каждая точка C прямой a находится на одинаковом расстоянии от точек A и B, следует из равенства треугольников AOC и BOC. У этих треугольников углы при вершине O прямые, сторона OC общая, а $AO = OB$, так как O — середина отрезка AB.

Покажем теперь, что каждая точка D плоскости, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a. Рассмотрим треугольник ADB. Он равнобедренный, так как $AD = BD$. В нём DO — медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана, проведённая к основанию, является высотой. Значит, точка D лежит на прямой a. Теорема доказана.

49 Метод геометрических мест

Сущность метода геометрических мест, используемого при решении задач на построение, состоит в следующем.

Пусть, решая задачу на построение, нам надо найти точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, т. е. является их точкой пересечения. Если эти геометрические места простые (скажем, состоят из прямых и окружностей), то мы можем их построить и найти интересующую нас точку X. Приведём пример.

Задача (45). Даны три точки: A, B, C. Постройте точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

Решение.

Искомая точка X удовлетворяет двум следующим условиям:
1) она одинаково удалена от точек A и B;
2) она находится на данном расстоянии от точки C.

Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть прямая, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину (рис. 106).

Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть окружность данного радиуса с центром в точке C. Искомая точка X лежит на пересечении этих геометрических мест.

4.1. Геометрические места точек

Вспомним, как мы определяли окружность. Вспомнили? Теперь заметим, что окружность мы определяли как ***геометрическое место точек*** (рис. 156). Что это значит?

Рис. 156

Под геометрическим местом точек будем понимать множество всех точек, обладающих определённым геометрическим свойством по отношению к какой-либо геометрической фигуре или другому объекту.

В случае окружности это множество состоит из всех точек плоскости, удалённых на заданное расстояние от фиксированной точки плоскости. В дальнейшем будет выяснено, что это не единственный способ задания окружности как геометрического места точек (ГМТ).

Очень часто в качестве геометрического места точек выступает прямая линия или части прямой. Дальше мы рассмотрим некоторые важнейшие случаи.

Серединный перпендикуляр к отрезку

Что представляет собой геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от концов заданного отрезка прямой на плоскости?

Сформулируем этот вопрос в виде задачи.

Задача 1. *Дан отрезок AB, который лежит в некоторой плоскости. Найдите все точки M плоскости, для которых $AM = MB$.*

Решение. Ответ следует из известных вам свойств равнобедренного треугольника.

Искомым геометрическим местом точек является прямая, перпендикулярная AB и проходящая через середину AB (рис. 157). Такую прямую называют ***серединным перпендикуляром*** к AB. Серединный перпендикуляр является осью симметрии, при которой A переходит в B (и наоборот).

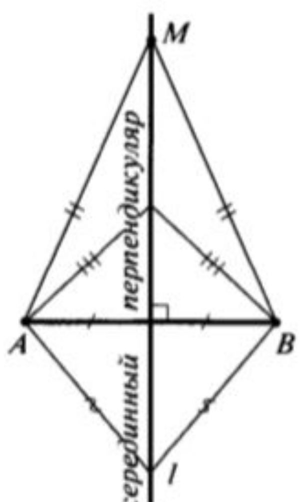


Рис. 157

В самом деле, если M — такая точка плоскости, что $AM = MB$, то, согласно

Биссектриса угла

Биссектрису угла также можно рассматривать как геометрическое место точек.

Задача 2. *Докажите, что геометрическим местом точек, расположенных внутри данного угла и равноудалённых от его сторон, является биссектриса этого угла.*

Решение. Как и в предыдущем случае, мы должны провести следующие два рассуждения.

1. Если точка M расположена внутри угла и находится на равных расстояниях от его сторон, то M лежит на биссектрисе этого угла.

Опустив перпендикуляры MA и MB на стороны угла (рис. 158), из равенства $MA = MB$ на основании соответствующего признака равенства прямоугольных треугольников получим, что треугольники OMA и OMB равны. Значит, равны углы MOA и MOB, т. е. OM — биссектриса угла AOB.

2. Если точка M лежит на биссектрисе, то M равноудалена от сторон угла.

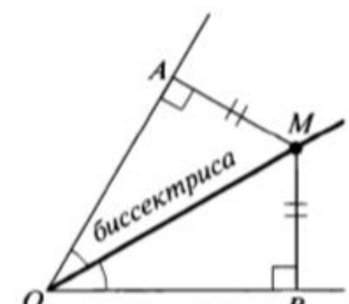


Рис. 158

Параграф 19
Геометрические места точек

Геометрическим местом точек (ГМТ) называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

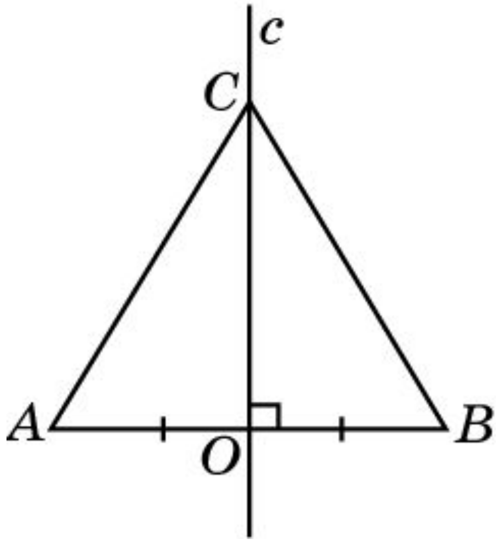
Примерами геометрических мест точек являются:

Окружность – ГМТ, удаленных от данной точки на данное расстояние;

Круг – ГМТ, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное.

Серединный перпендикуляр

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.



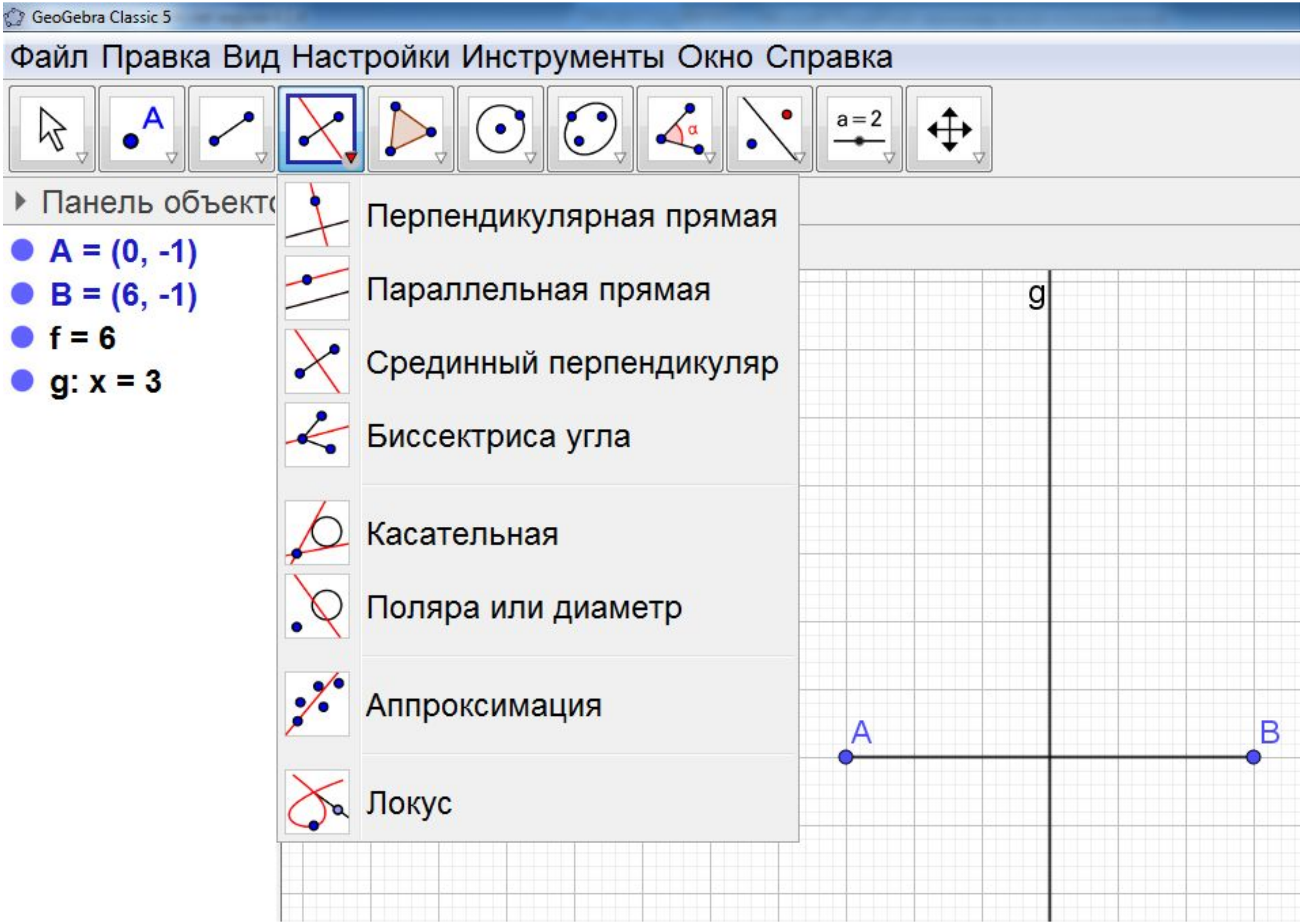
Теорема. Серединный перпендикуляр к отрезку является ГМТ, одинаково удаленных от концов этого отрезка.

Доказательство. Пусть дан отрезок AB и O – его середина. Если точка C одинаково удалена от точек A, B и принадлежит прямой AB, то она должна совпадать с точкой O.

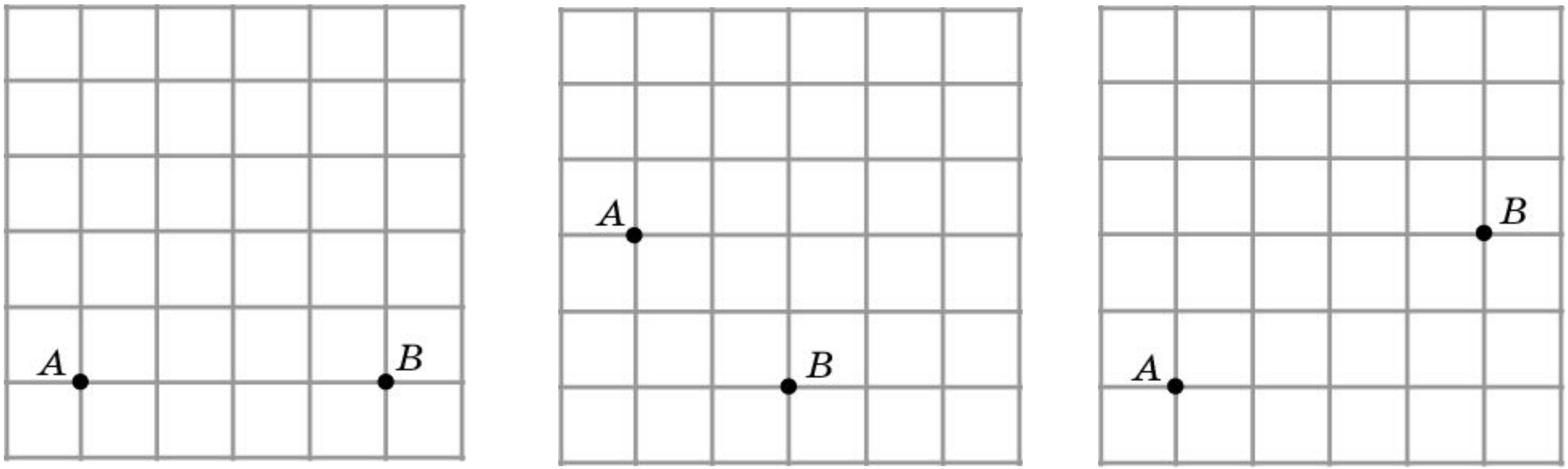
Если C не принадлежит прямой AB, то треугольник ABC равнобедренный и его медиана CO является также и высотой. Значит, точка C принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB.

Обратно, пусть точка C принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB. Если C совпадает с точкой O, то она равноудалена от концов отрезка AB. Если C не совпадает с точкой O, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по катетам). Следовательно, $AC=BC$.

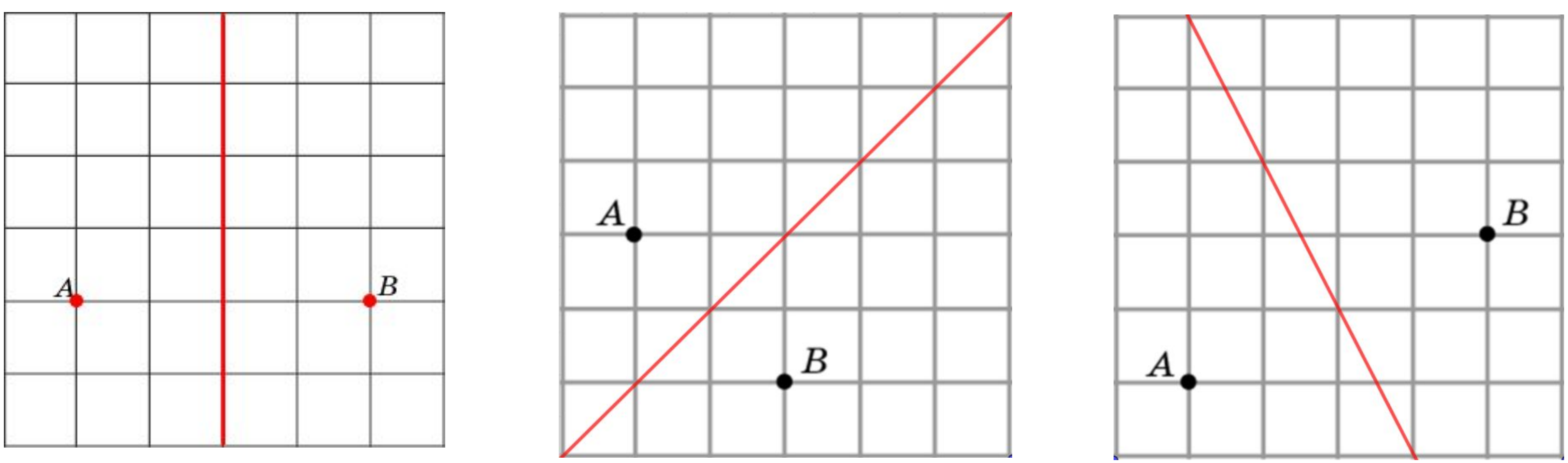
Построение серединного перпендикуляра с использованием программы GeoGebra



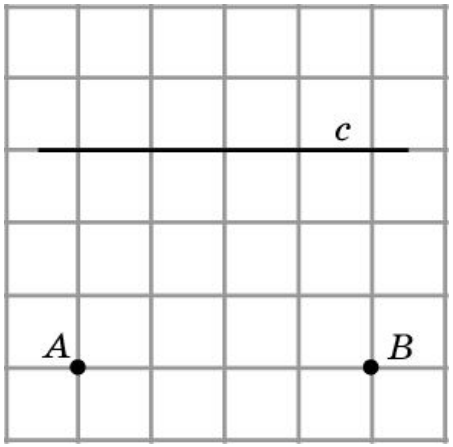
Изобразите ГМТ, равноудаленных от точек A и B.

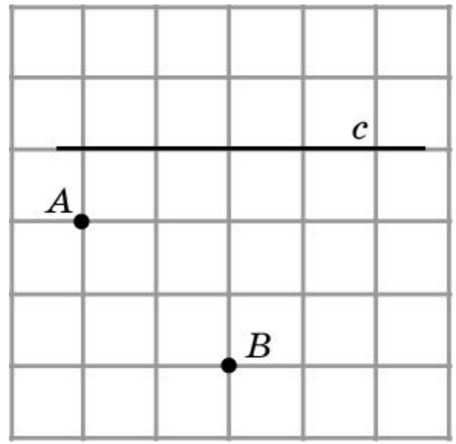


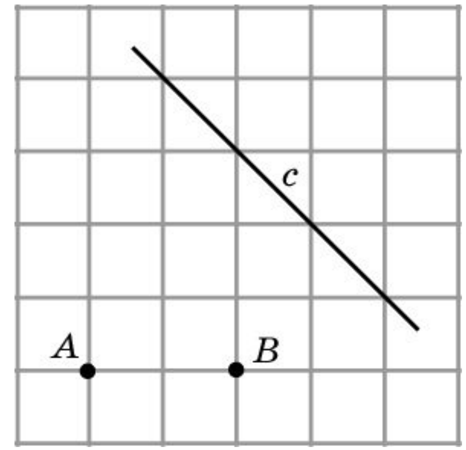
Ответ:



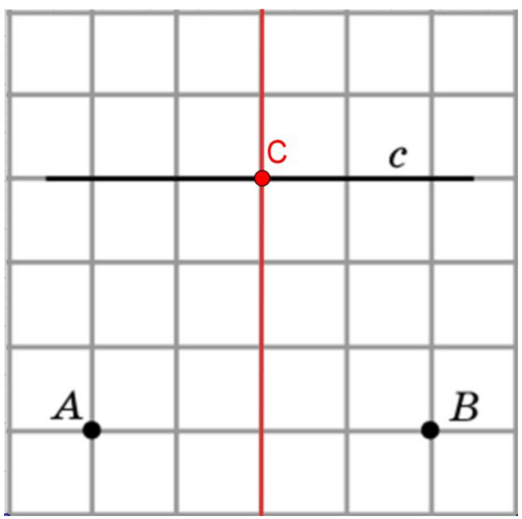
На прямой c отметьте точку, равноудаленную от точек A, B.

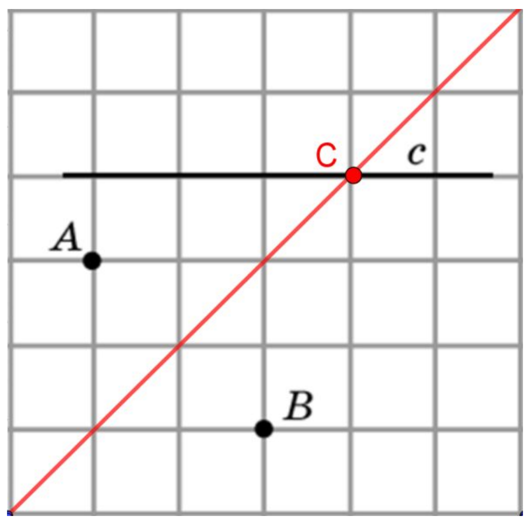


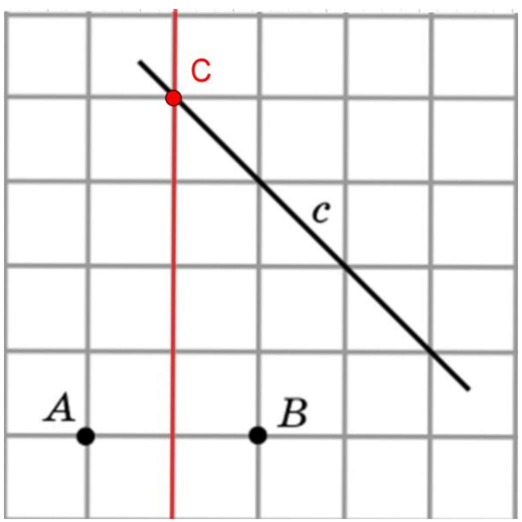




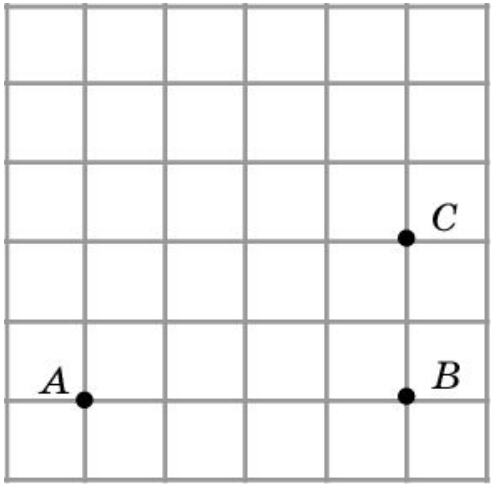
Ответ:

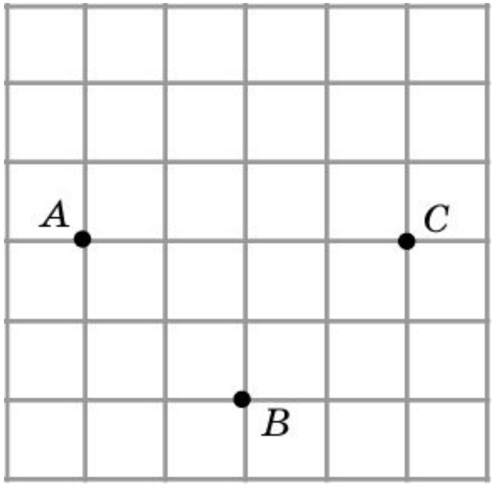


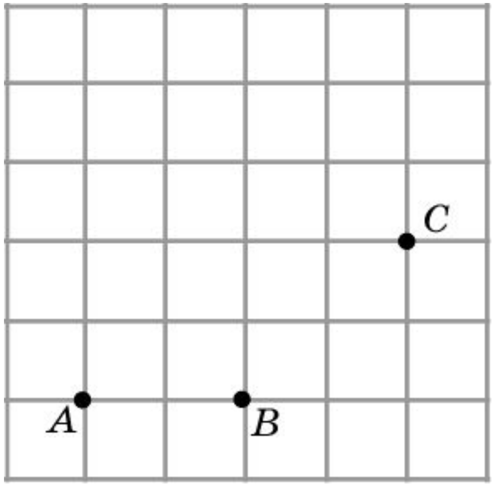




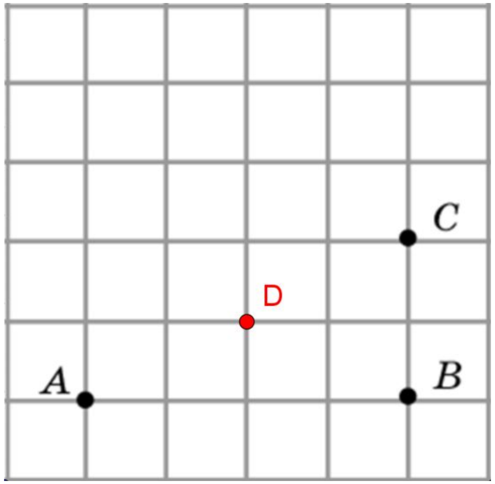
Отметьте точку, равноудаленную от точек A, B и C.

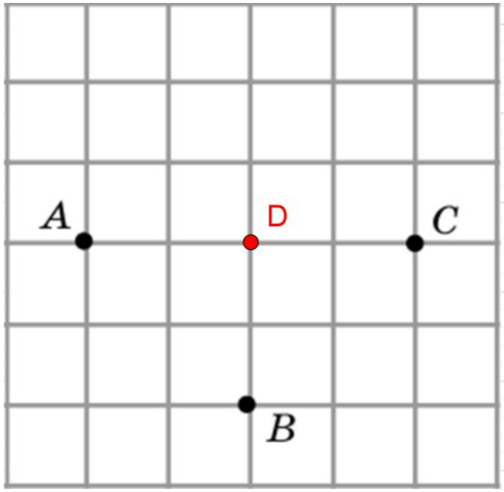


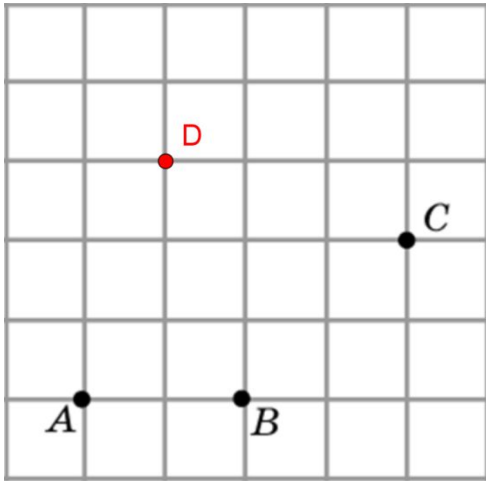




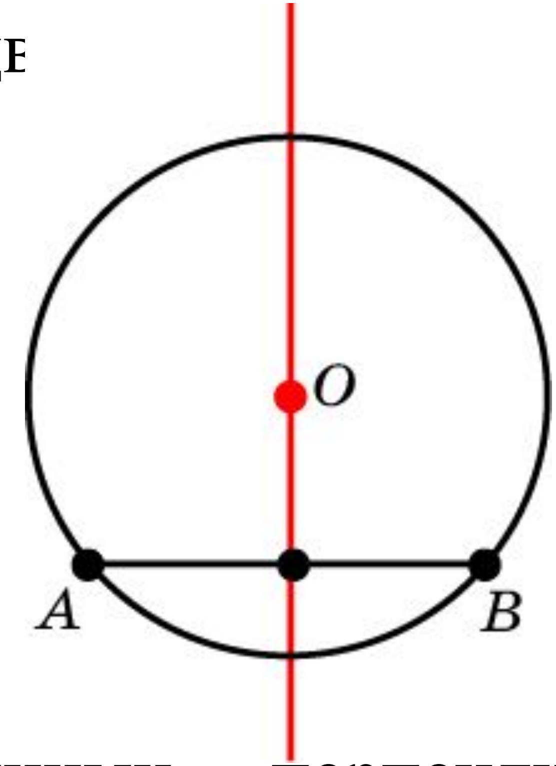
Ответ:





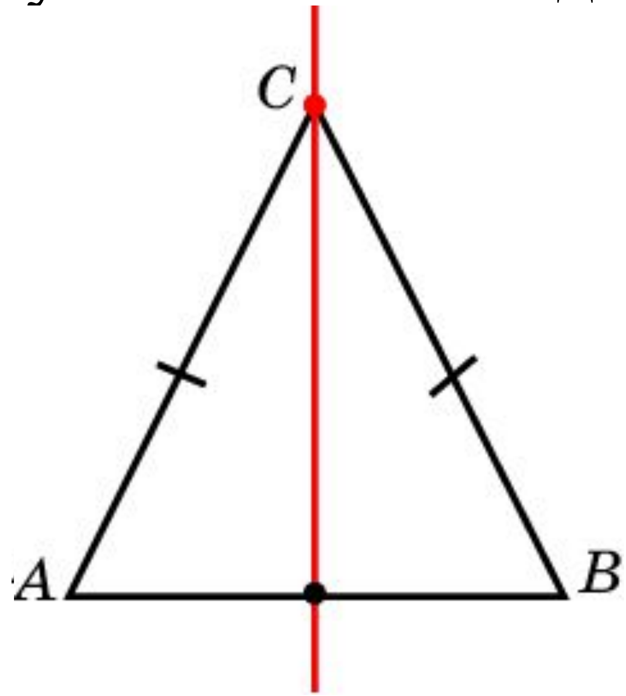


Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через дв



Ответ: Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему две данные точки.

Найдите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с заданным основанием AB.

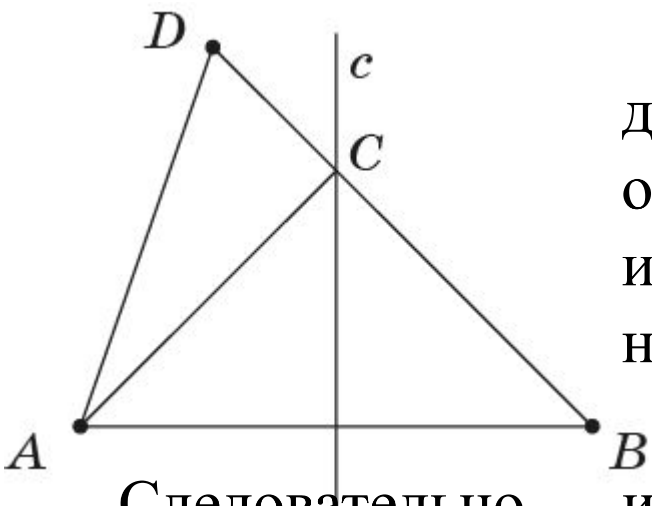


Ответ: Серединный перпендикуляр к отрезку AB без середины этого отрезка.

Для данных точек A и B найдите ГМТ точек, D расстояние от которых до точки A меньше чем расстояние до точки B.

Решение. Докажем, что искомым ГМТ является полуплоскость, ограниченная серединным перпендикуляром к отрезку AB, содержащая точку A, без этого серединного перпендикуляра.

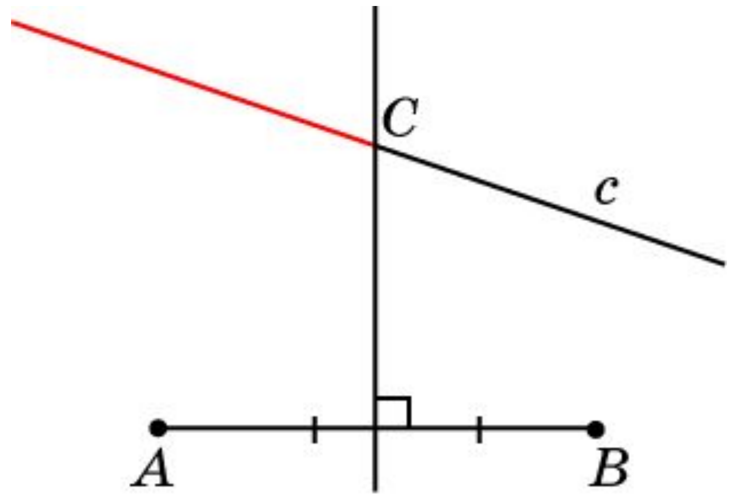
Пусть D – внутренняя точка этой полуплоскости. Проведём отрезок AB. Обозначим C точку его пересечения с серединным перпендикуляром c. Воспользуемся неравенством треугольника, применённому к треугольнику ACD. Имеем $AD < AC + CD = BC + CD = BD$.



Аналогичным образом доказывается, что для внутренних точек E полуплоскости, ограниченной серединным перпендикуляром и содержащей точку B, выполняется неравенство $AE > BE$.

Следовательно, искомым ГМТ является полуплоскость, ограниченная серединным перпендикуляром к отрезку AB, содержащая точку A, без этого серединного перпендикуляра.

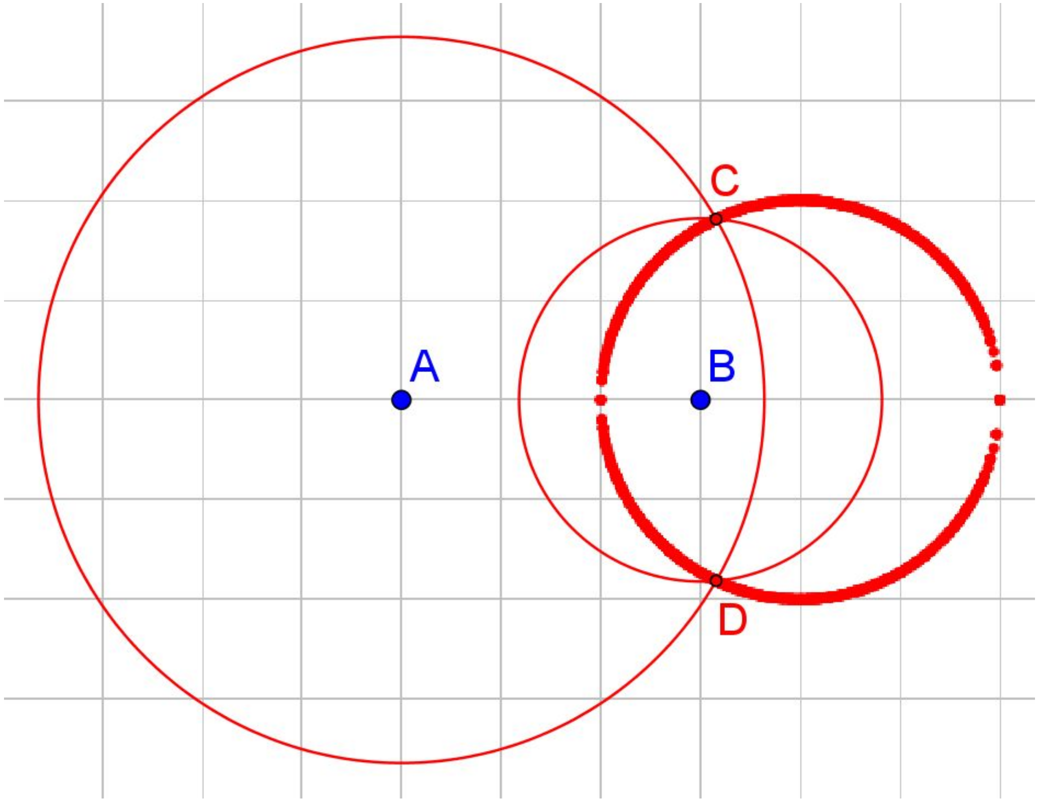
Пусть A и B точки плоскости, c - прямая. Укажите геометрическое место точек прямой c, расположенных ближе к A, чем к B. В каком случае таких точек нет?



Ответ: Часть прямой c, лежащая внутри полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром к отрезку AB и точкой A. Если прямая c целиком лежит в полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром и точкой B, то таких точек нет.

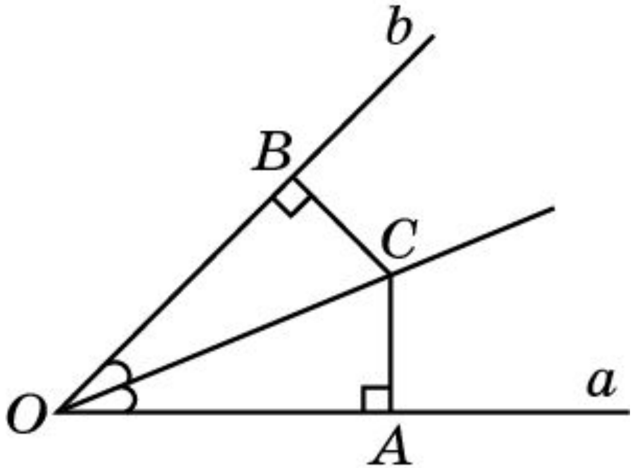
(*). Для данных точек A и B изобразите ГМТ, удалённых от A на расстояние, в 2 раза большее, чем расстояние от точки B.

Ответ. Окружность. Она называется окружностью Аполлония.



Биссектриса угла

Теорема. Биссектриса угла является ГМТ, лежащих внутри этого угла и одинаково удаленных от его сторон.

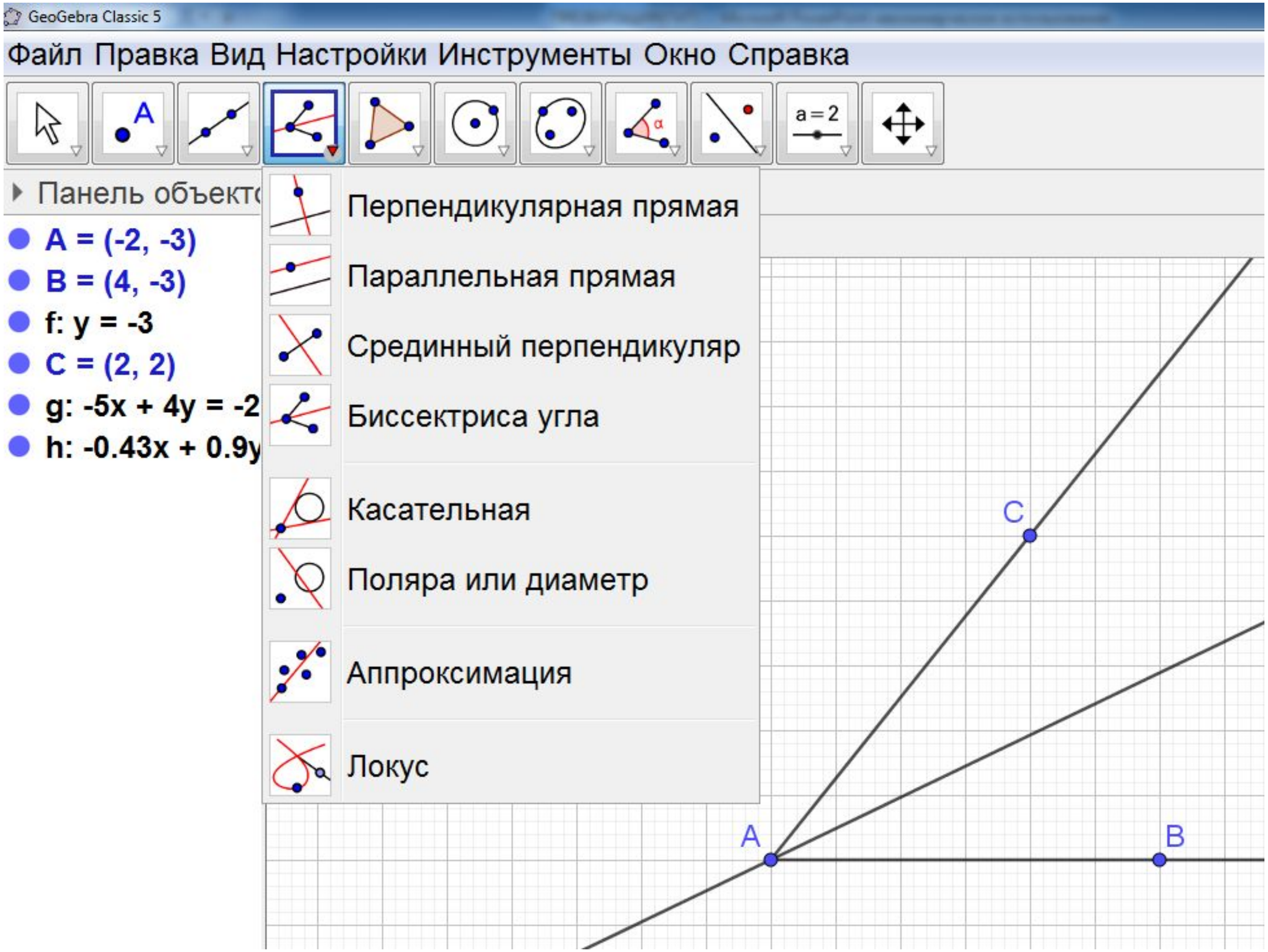


Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной в точке O и сторонами a, b. Пусть точка C лежит внутри данного угла. Опустим из нее перпендикуляры CA и CB на стороны a и b.

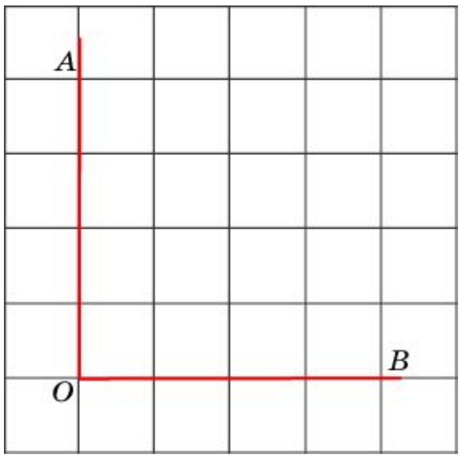
Если $CA = CB$, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, углы AOC и BOC равны. Значит, точка C принадлежит биссектрисе угла.

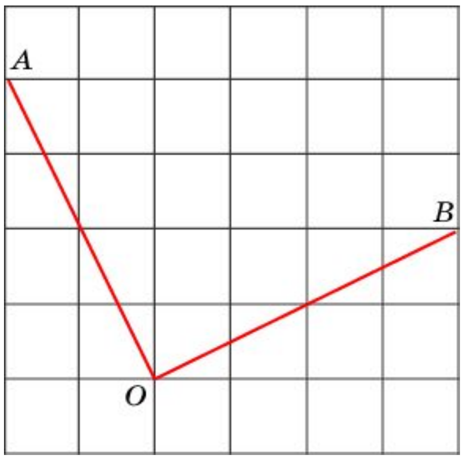
Обратно, если точка C принадлежит биссектрисе угла, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AC = BC$. Значит, точка C одинаково удалена от сторон данного угла.

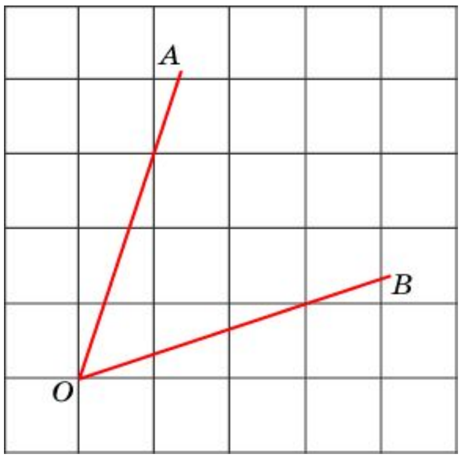
Построение биссектрисы с использованием программы GeoGebra



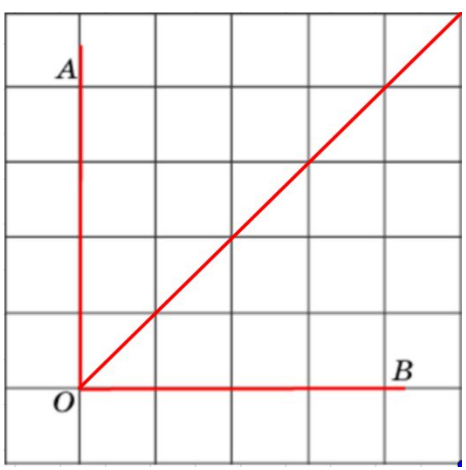
Изобразите геометрическое место внутренних точек угла AOB, равноудаленных от его сторон.

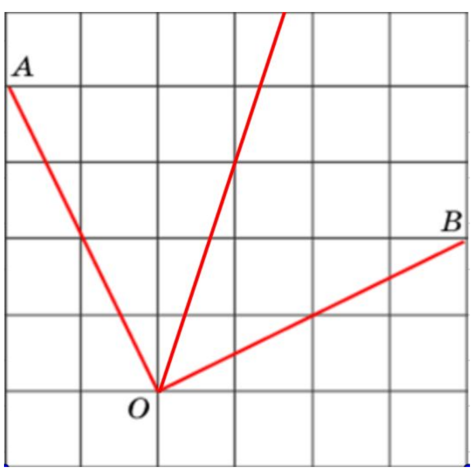


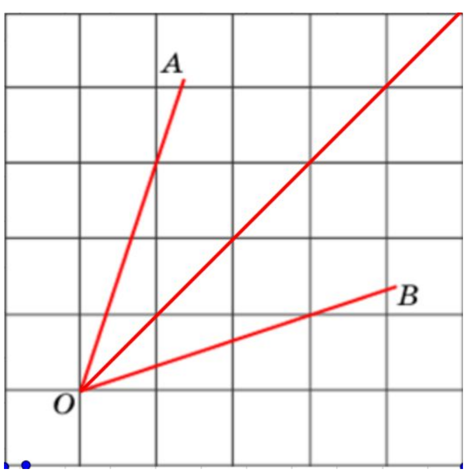




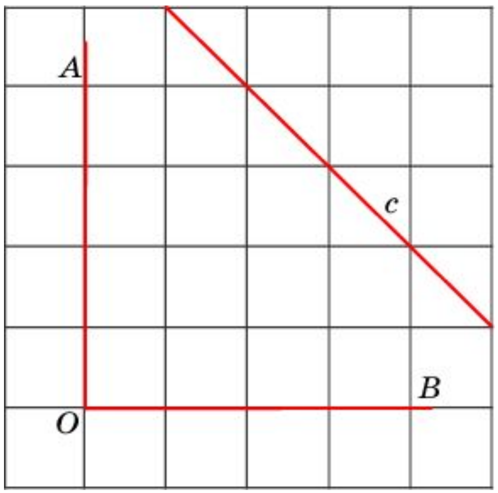
Ответ.

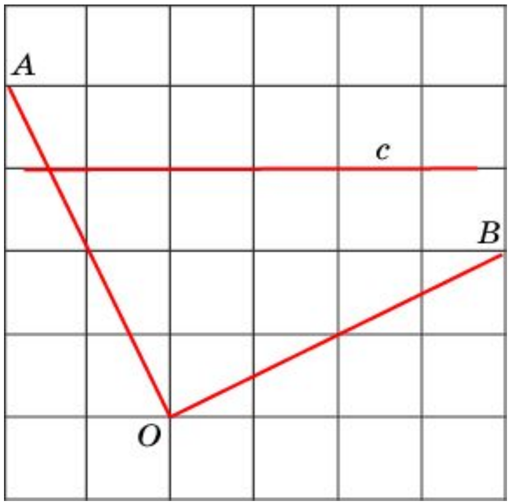




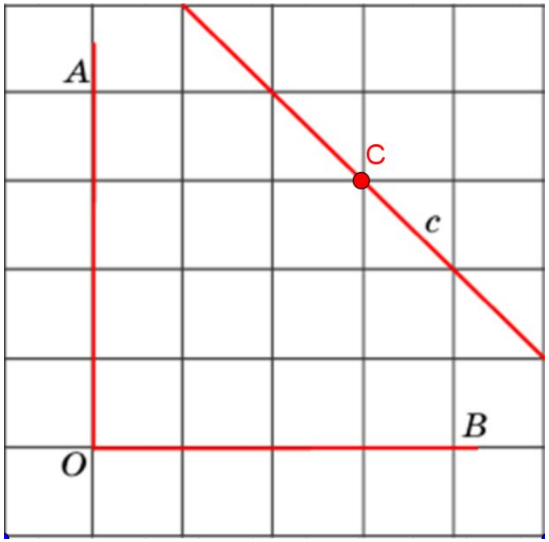


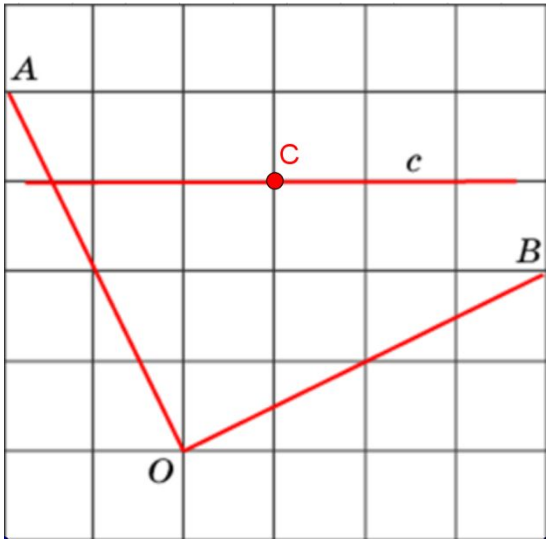
На прямой c отметьте точку C, равноудаленную от сторон угла AOB.



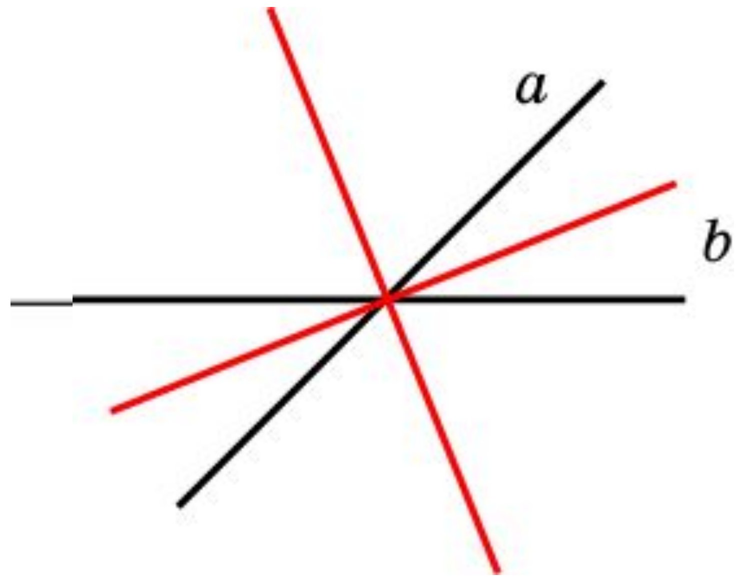


Ответ.



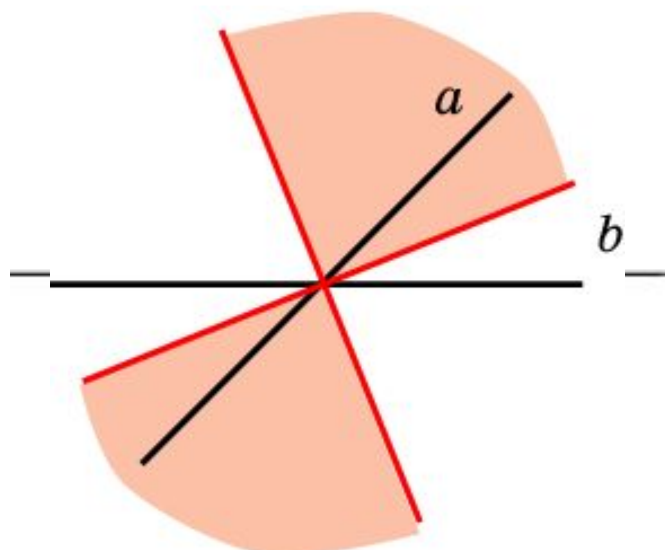


Найдите геометрическое место точек, одинаково удаленных от двух пересекающихся прямых a и b



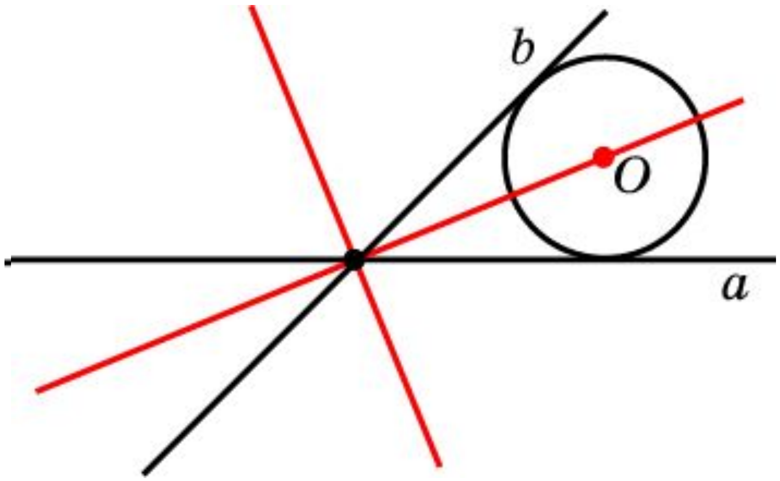
Ответ. Точки, принадлежащие биссектрисам четырех углов, образованных данными прямыми;

Для двух данных пересекающихся прямых a и b найдите геометрическое место точек, расположенных ближе к a чем к b



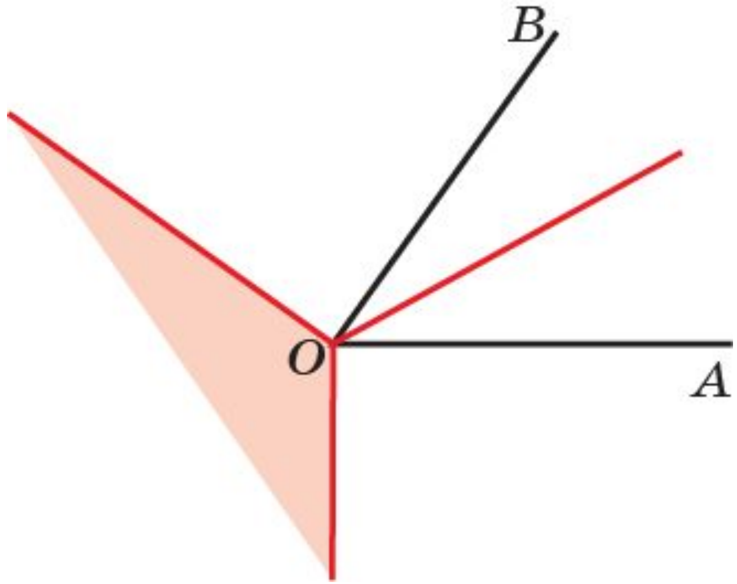
Ответ. внутренности двух вертикальных углов, образованных биссектрисами.

Найдите геометрическое место центров окружностей касающихся двух данных пересекающихся прямых.



Ответ: Биссектрисы углов, образующихся при пересечении данных прямых, без точки пересечения этих прямых.

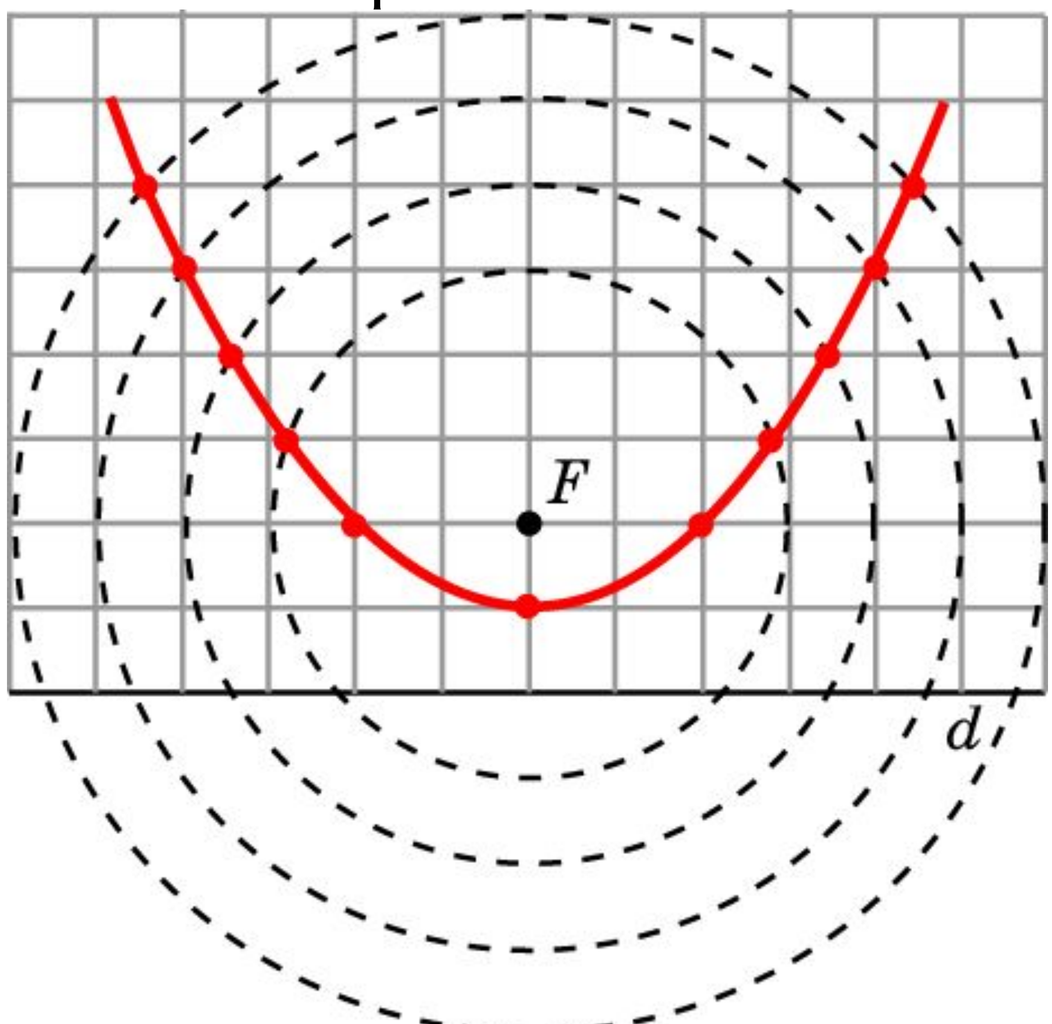
(*) Найдите ГМТ, равноудалённых от сторон угла AOB.



Ответ.

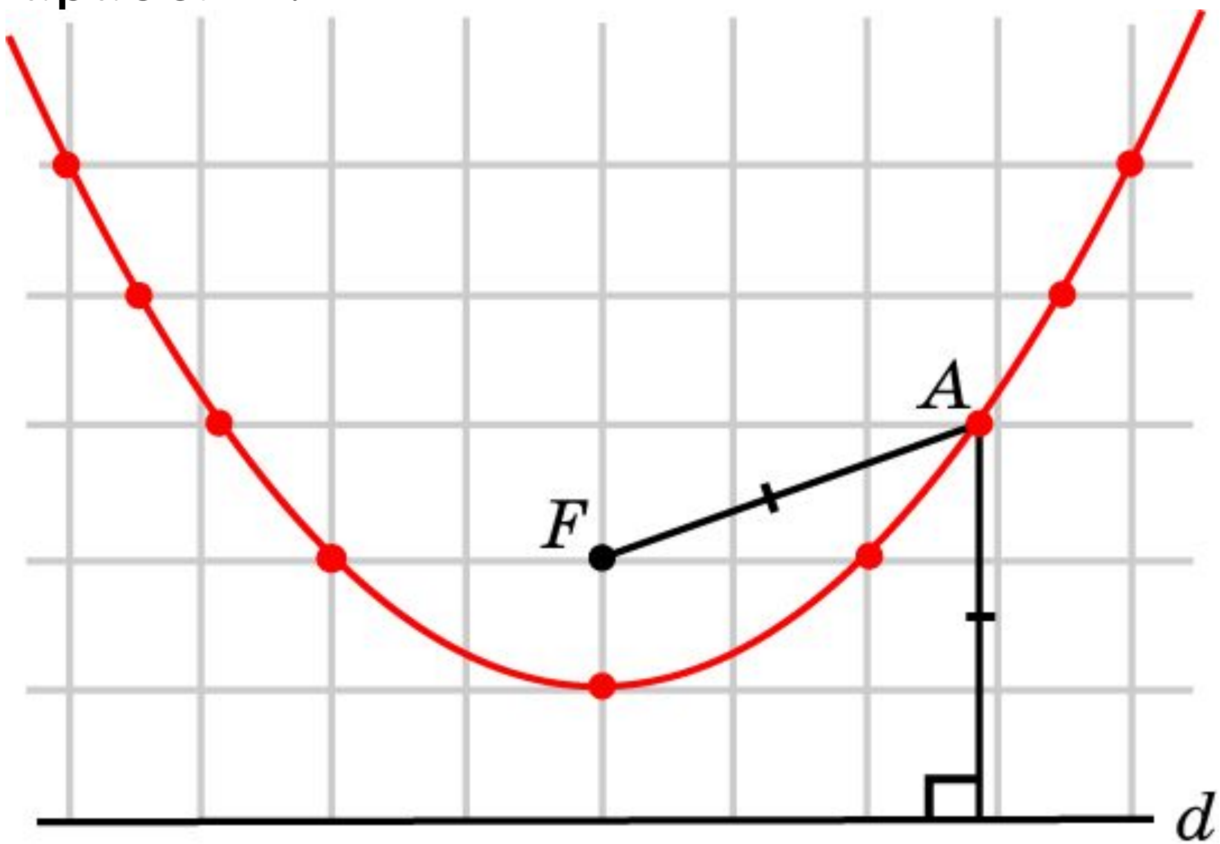
Параграф 21*

На клетчатой бумаге постройте несколько точек, равноудаленных от данной точки F и данной прямой d. Соедините их плавной кривой.



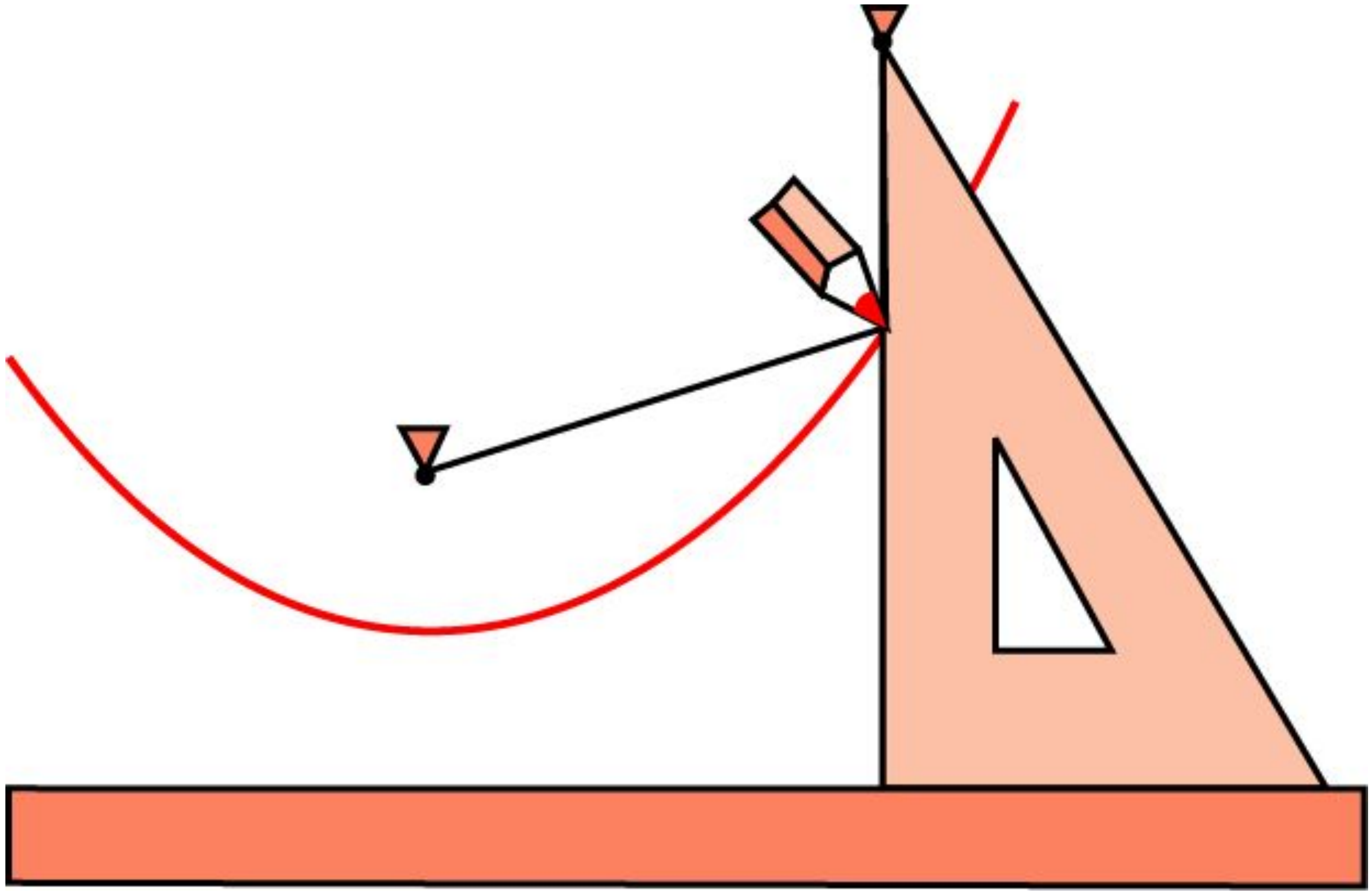
Определение параболы

Пусть на плоскости задана прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой d и точки F, называется параболой. Прямая d называется директрисой, а точка F - фокусом параболы.

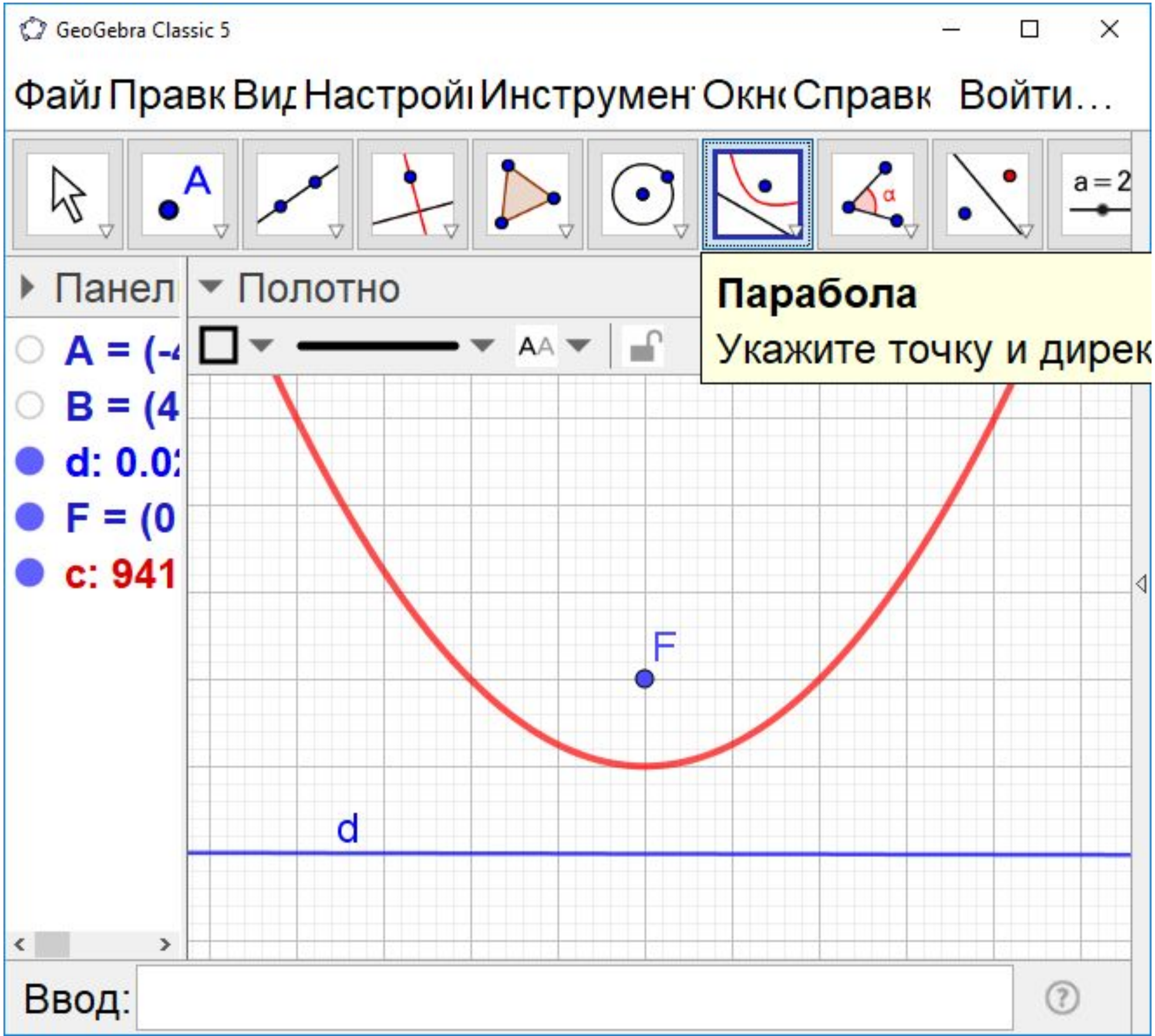


Рисуем параболу

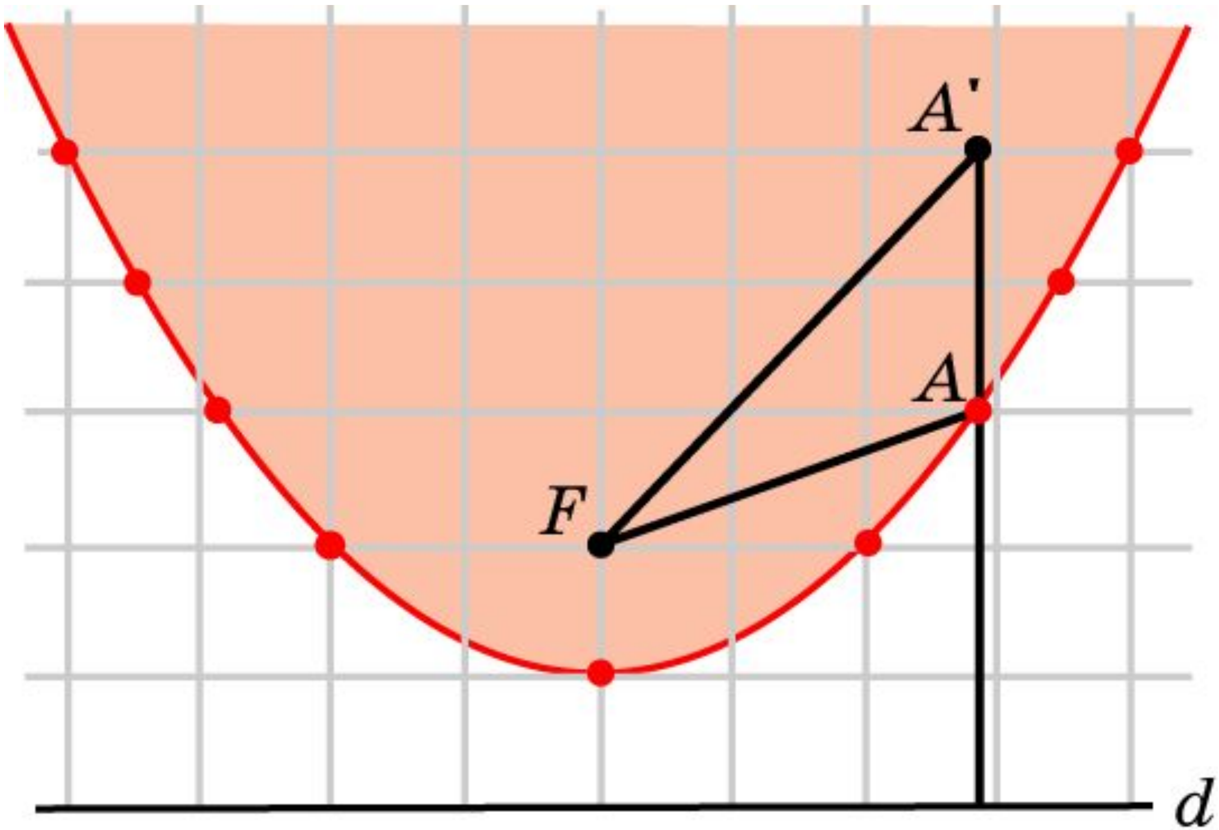
Параболу можно нарисовать с помощью линейки, угольника, кнопок, нитки и карандаша.



Построение параболы с использованием программы GeoGebra

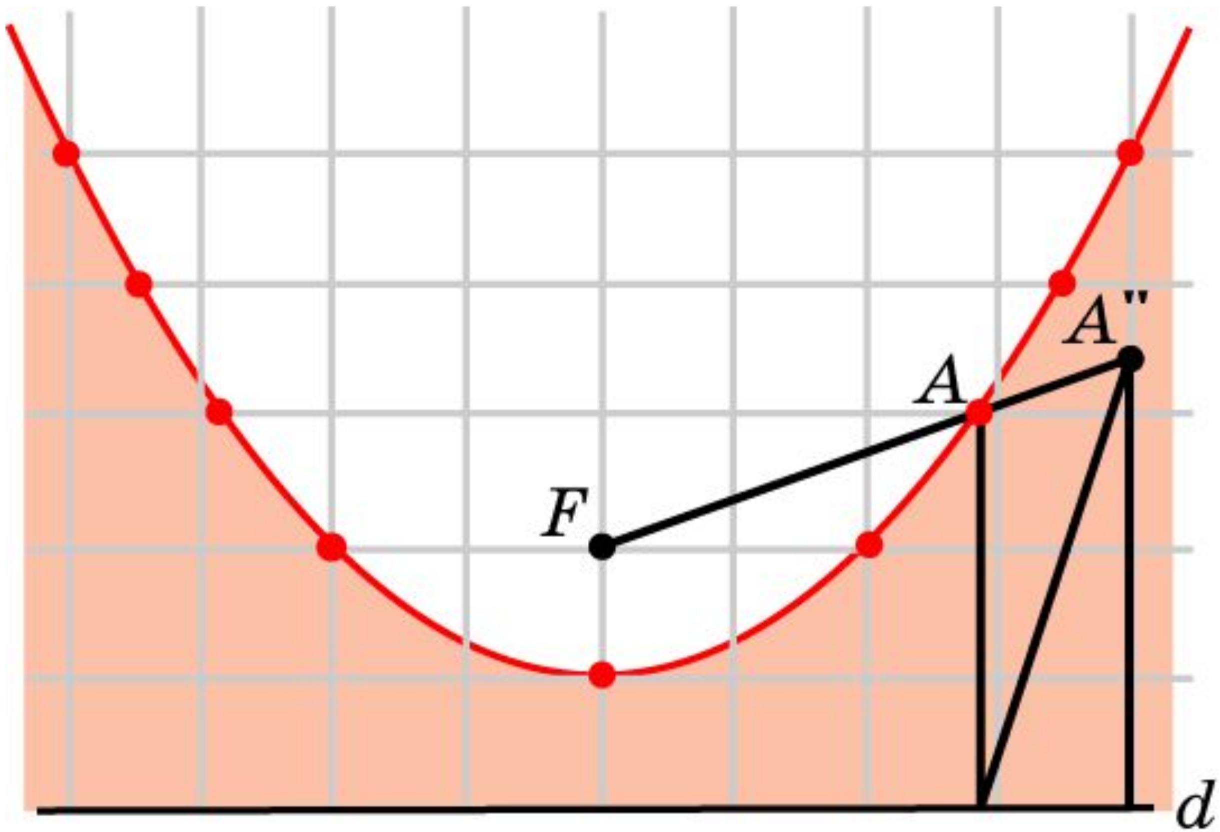


Изобразите ГМТ *A'*, для которых расстояние до фокуса меньше расстояния до директрисы.



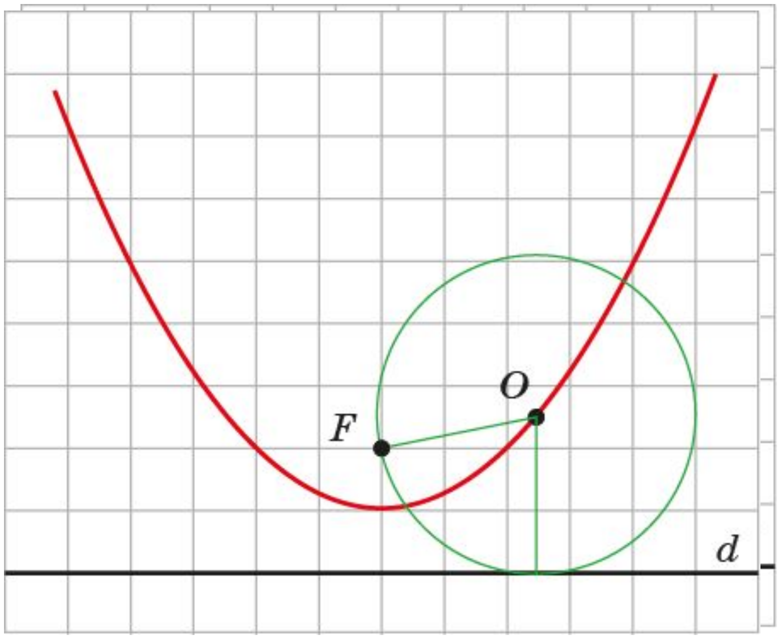
Ответ: Точки *A'*, расположенные выше параболы.

Изобразите ГМТ *A''*, для которых расстояние до фокуса больше расстояния до директрисы.



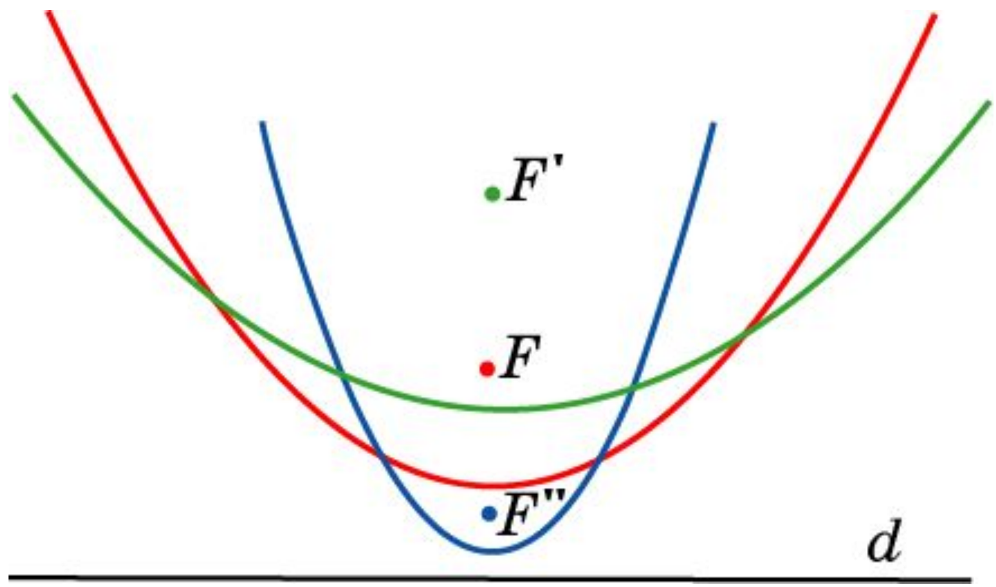
Ответ: Точки *A''*, расположенные ниже параболы.

Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку F, и касающуюся данной прямой d.



Ответ. Искомым ГМТ является парабола с фокусом F и директрисой d.

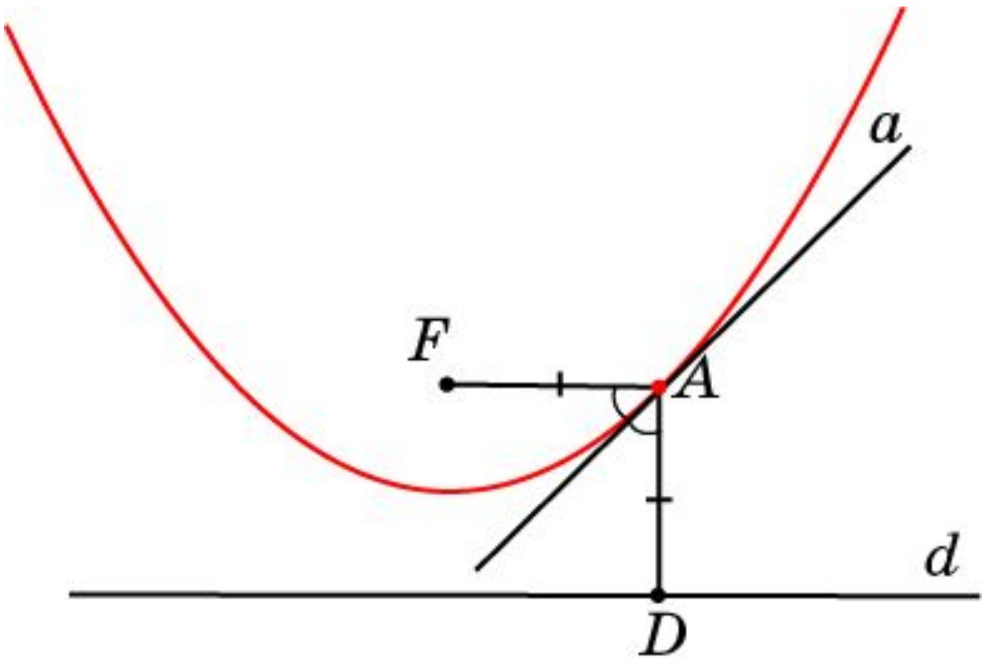
Что будет происходить с параболой, если фокус: а) удаляется от директрисы; б) приближается к директрисе?



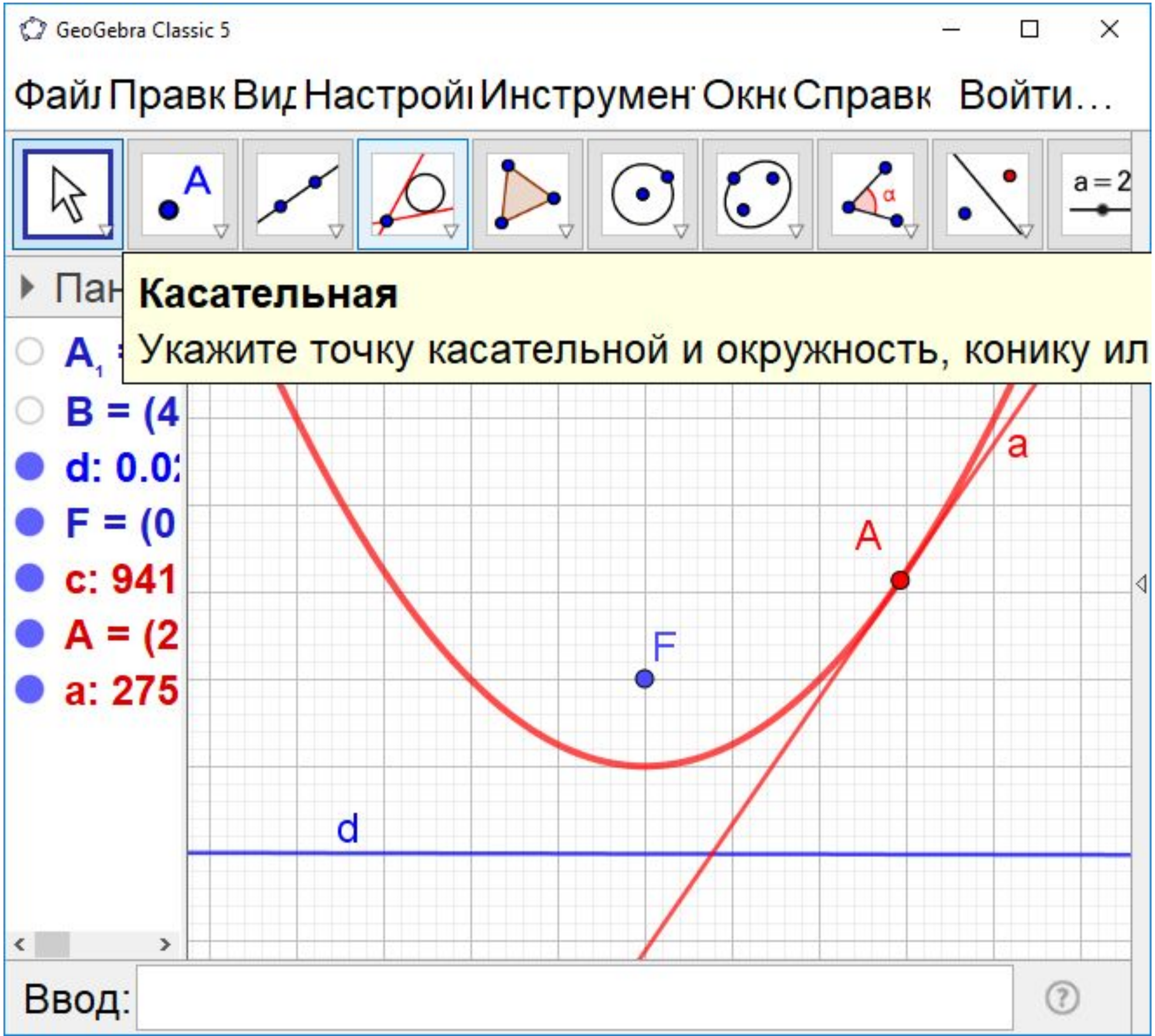
Ответ: а) Ветви параболы разжимаются; б) ветви параболы сжимаются.

Касательная к параболе

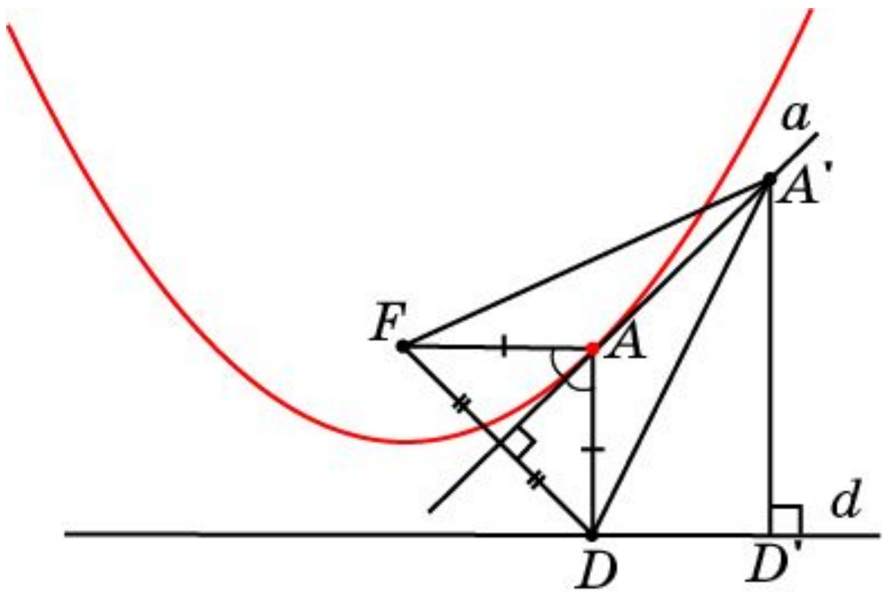
Прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная ее директрисе, называется касательной к параболе. Общая точка называется точкой касания.



Построение касательной к параболе с использованием программы GeoGebra



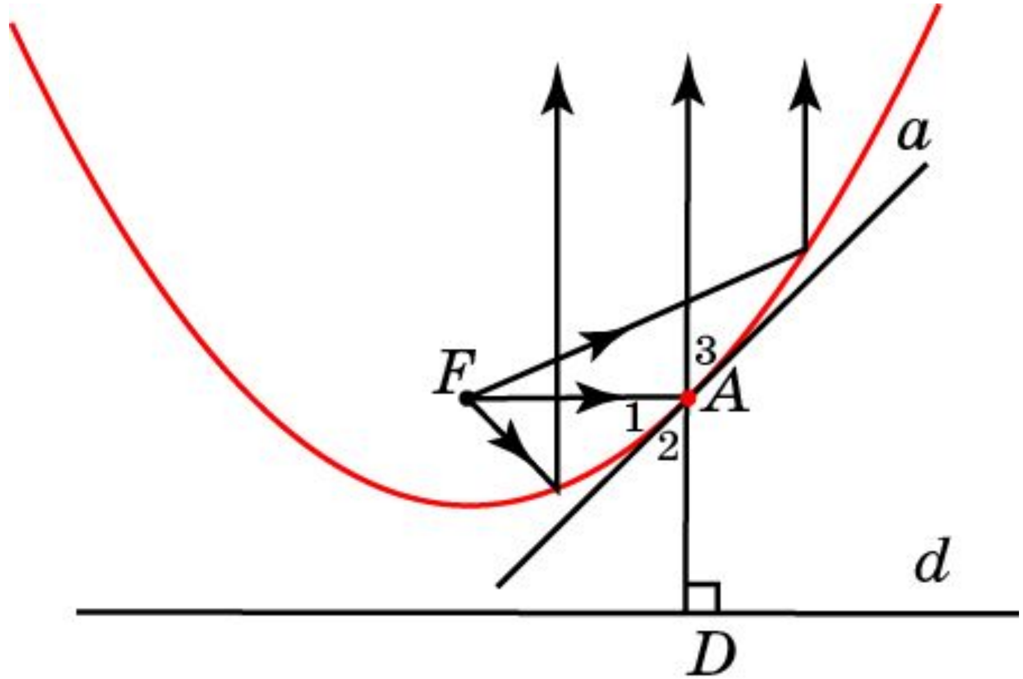
Теорема. Пусть A – точка на параболе с фокусом F и директрисой d, AD – перпендикуляр, опущенный на директрису. Тогда касательной к параболе, проходящей через точку A, будет прямая, содержащая биссектрису угла FAD.



Проведите доказательство теоремы, используя рисунок.

Фокальное свойство параболы

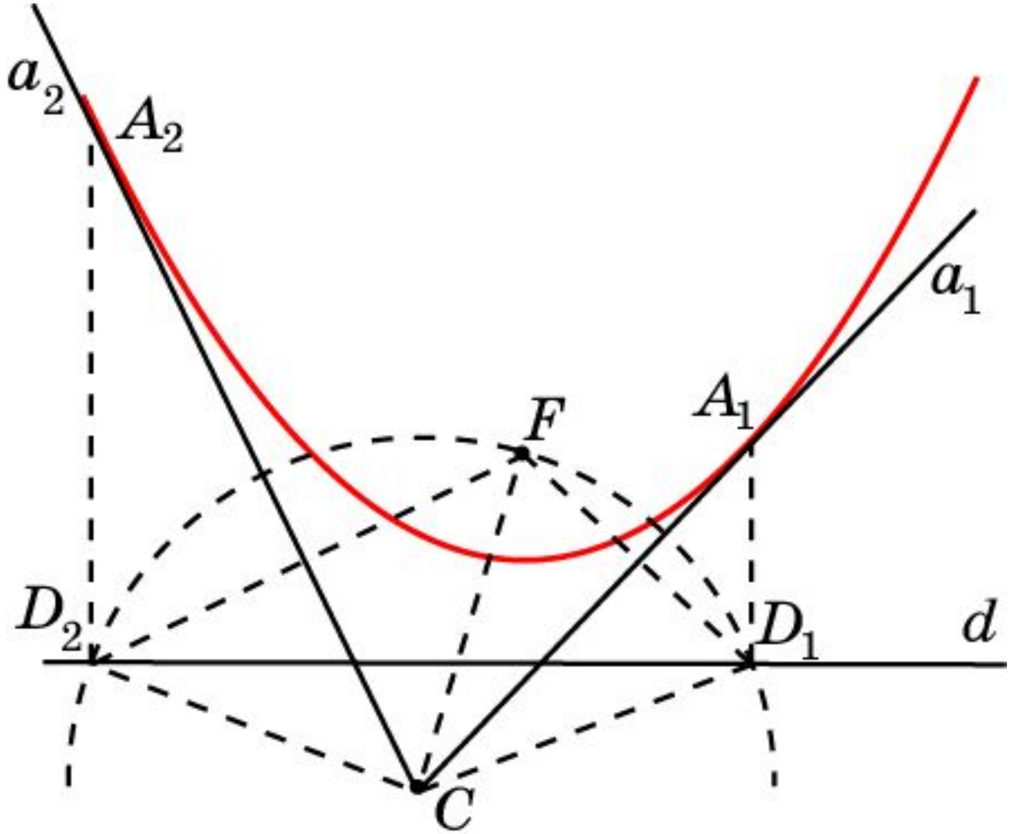
Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.



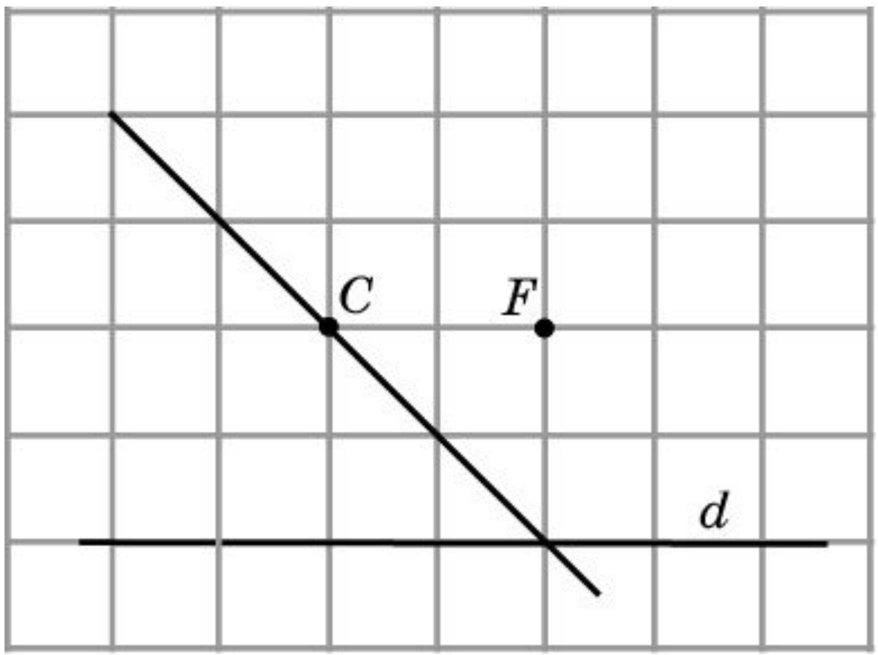
Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т. д.

Построение касательной

По данному рисунку укажите способ построения касательной к параболе, заданной фокусом F и директрисой d, проходящей через точку C, с помощью циркуля и линейки.



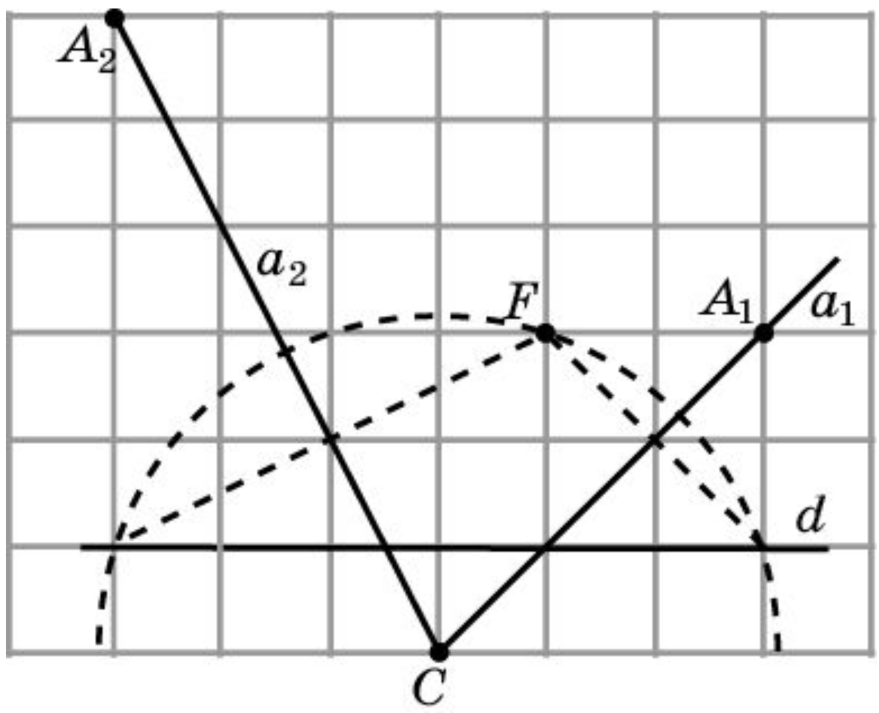
Через точку C проведите касательную к параболе, с заданным фокусом F и директрисой d.



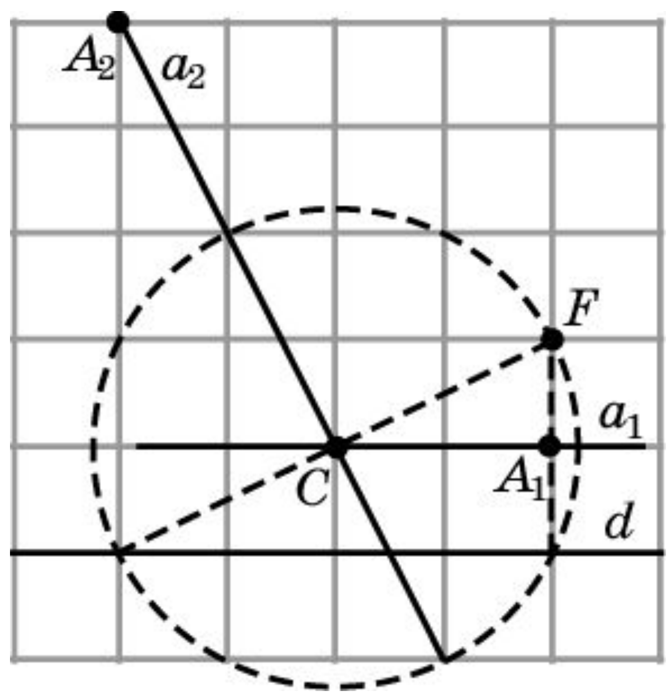
Ответ:

Через точку C проведите касательные к параболе, с заданным фокусом F и директрисой d. Отметьте точки касания.

Ответ:



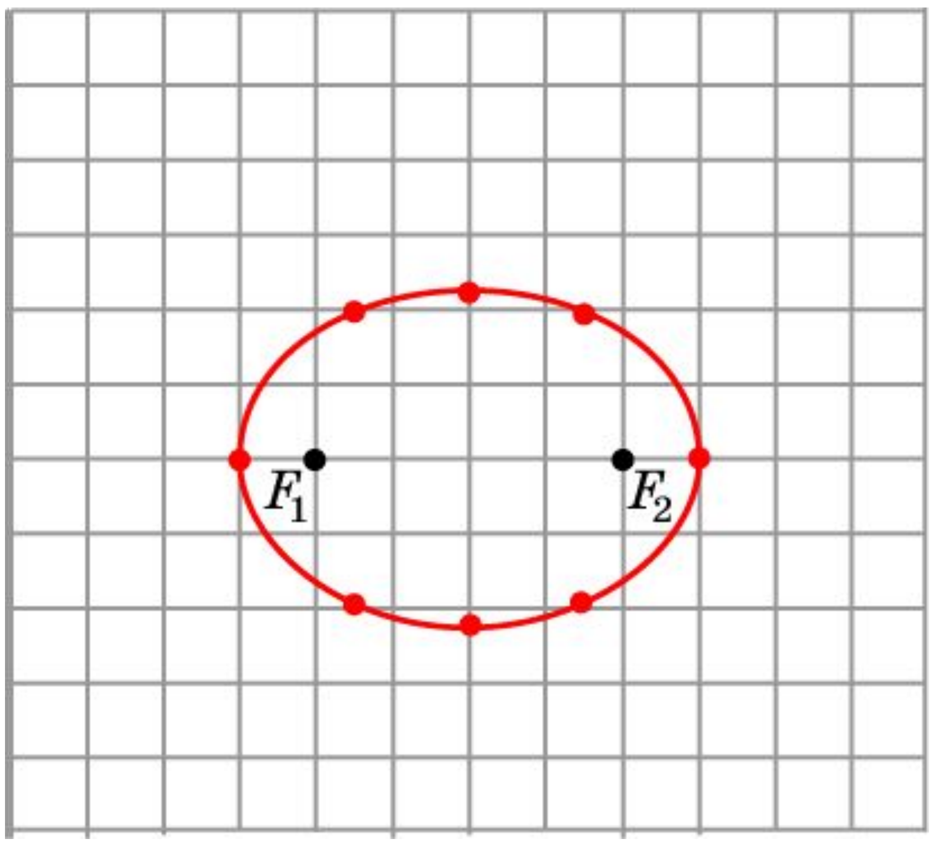
Через точку C проведите касательные к параболе, с заданным фокусом F и директрисой d. Отметьте точки касания.



Ответ:

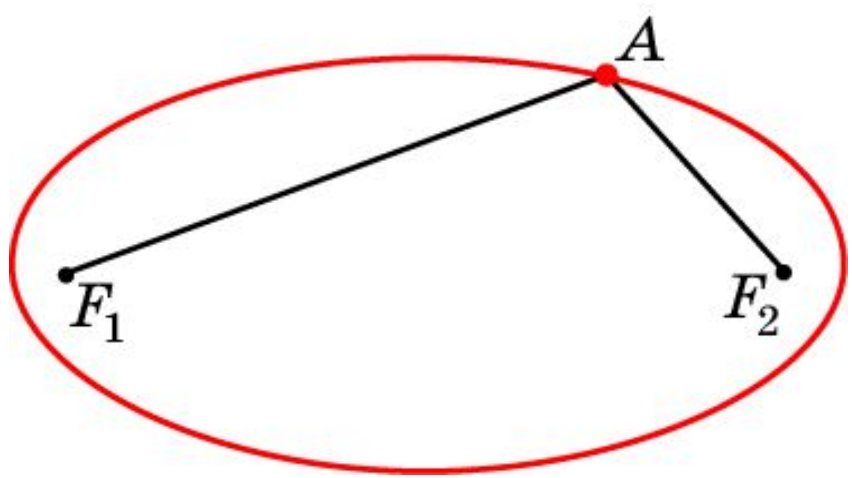
Параграф 22*

На клетчатой бумаге постройте несколько точек, расположенных в узлах сетки, сумма расстояний от которых до точек F_1 и F_2 равна 6 (стороны клеток равны 1). Соедините их плавной кривой.



Определение эллипса

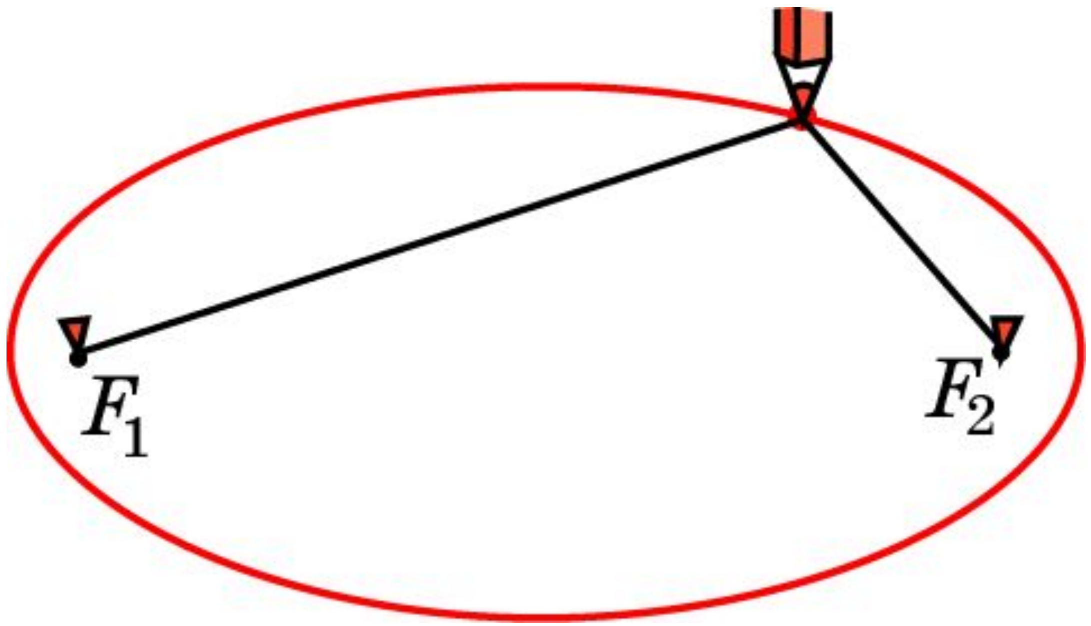
Геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется эллипсом. Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса.



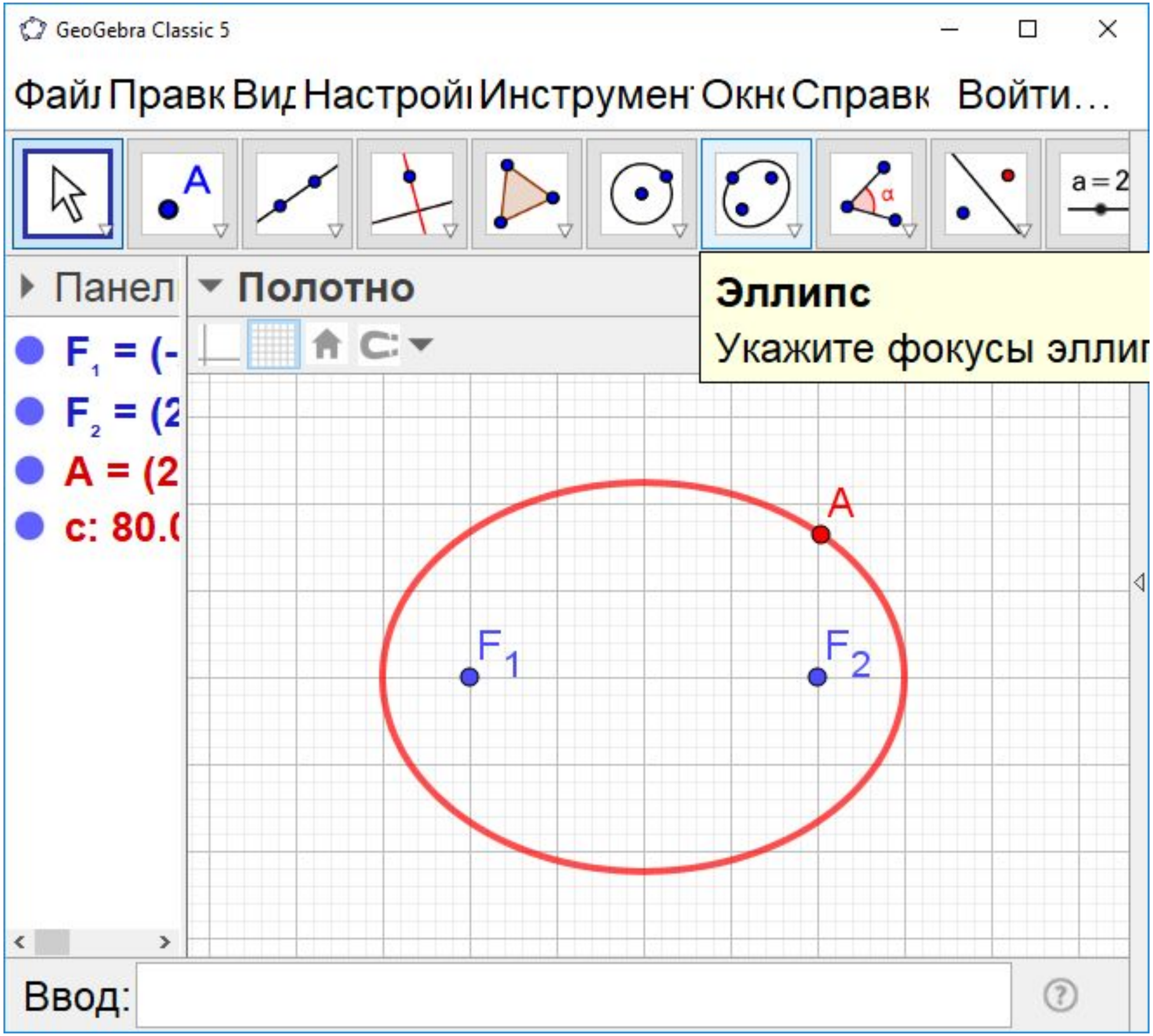
Таким образом, для точек A эллипса с фокусами F_1 и F_2 сумма $AF_1 + AF_2$ постоянна и равна некоторому заданному отрезку c, большему F_1F_2.

Рисуем эллипс

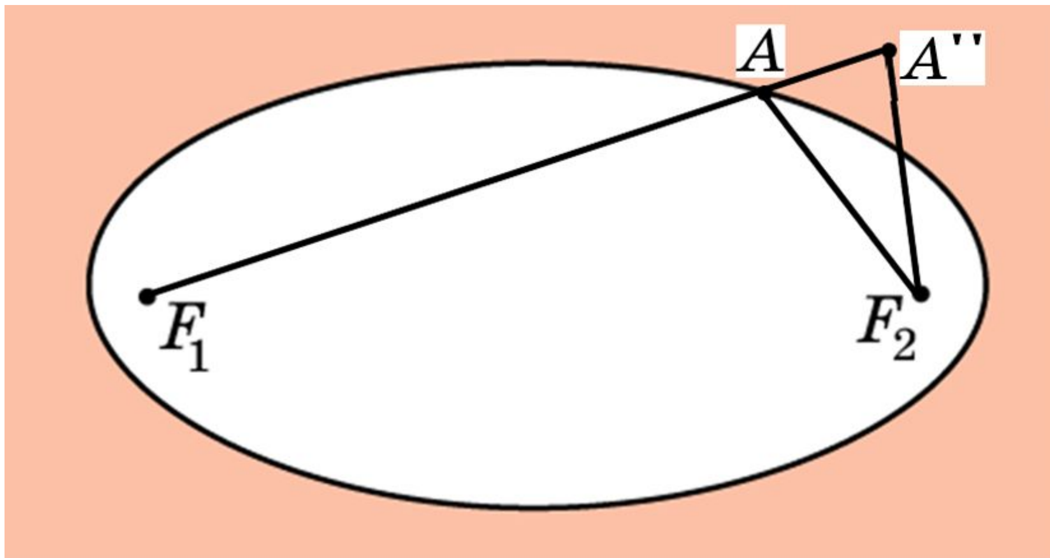
По данному рисунку укажите способ построения эллипса с помощью кнопок, нитки и карандаша.



Построение эллипса с использованием программы GeoGebra



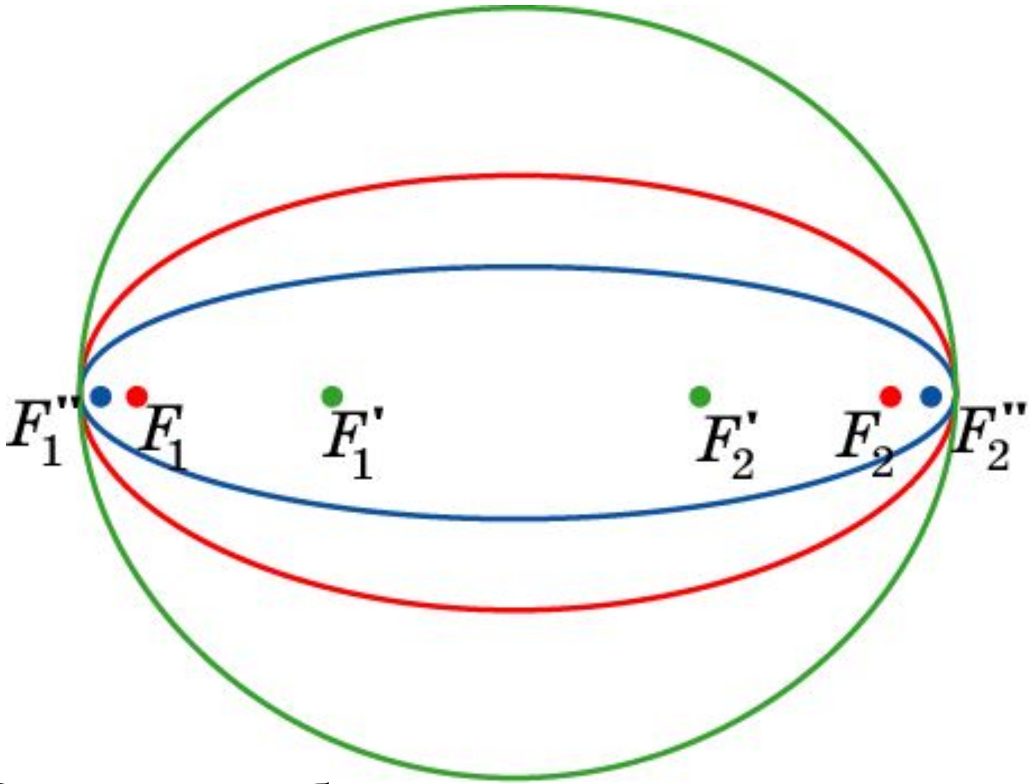
Для точек F_1, F_2 найдите геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до точек F_1, F_2 а) меньше c; б) больше c.



Ответ: а) Точки A', расположенные внутри эллипса;

б) точки A'', расположенные вне эллипса.

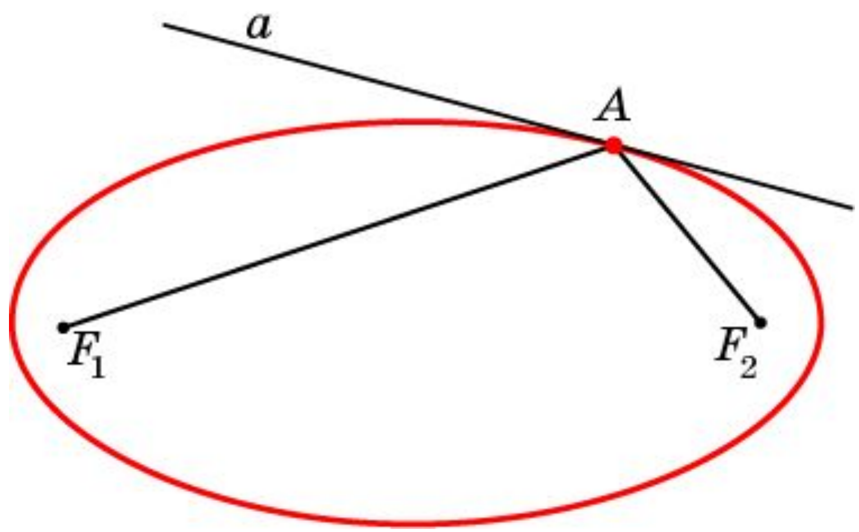
Что будет происходить с эллипсом, если константа c не изменяется, а фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?



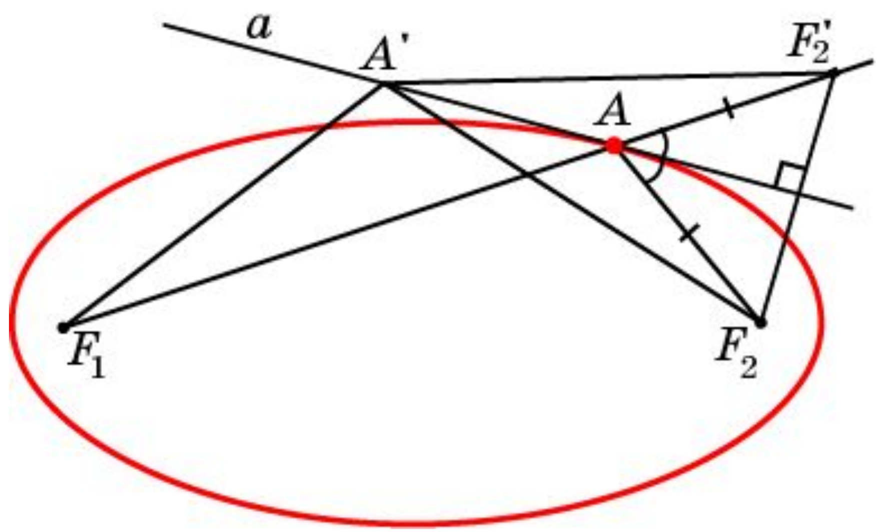
Ответ: а) Эллипс приближается к окружности радиуса $c/2$; б) эллипс приближается к отрезку длины c.

Касательная к эллипсу

Прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку, называется касательной к эллипсу. Общая точка называется точкой касания.



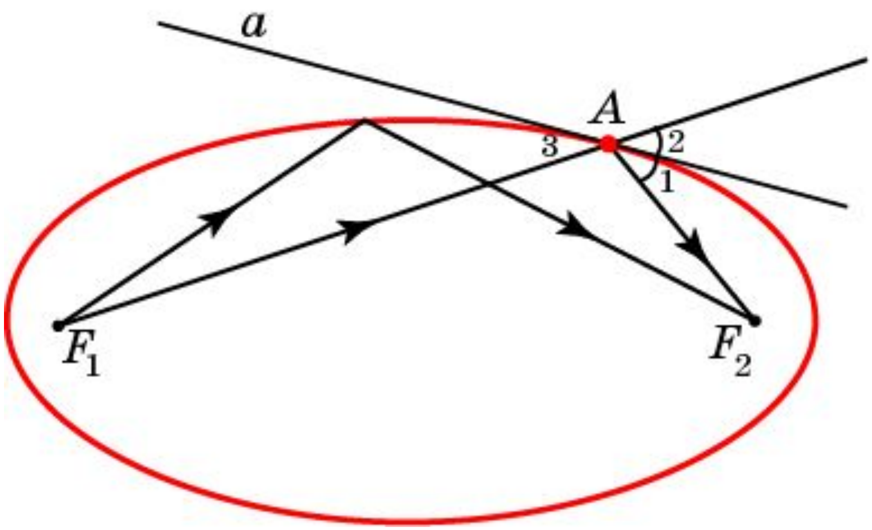
Теорема. Пусть A - произвольная точка эллипса с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к эллипсу, проходящей через точку A является прямая, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2.



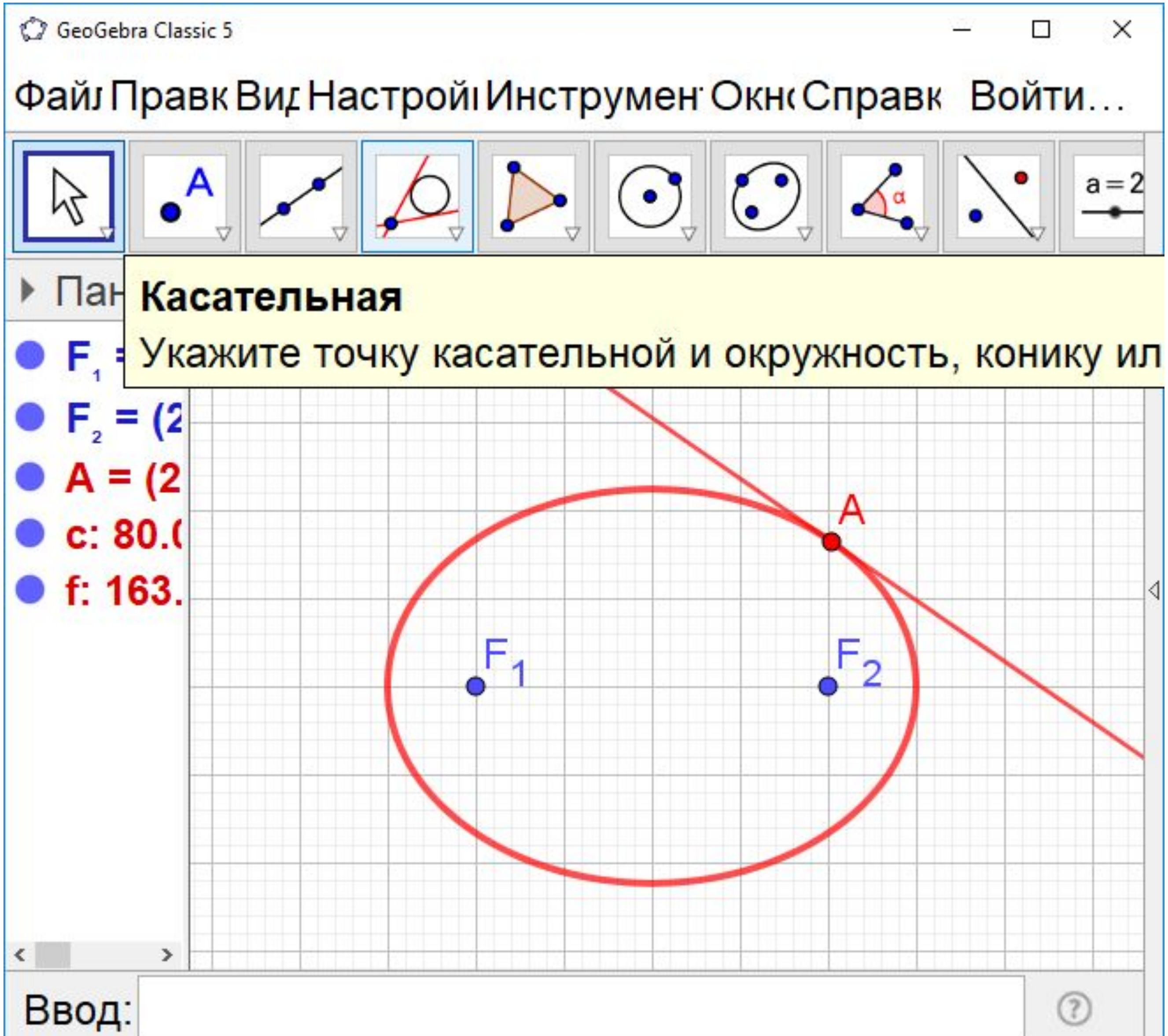
Проведите доказательство теоремы, используя рисунок.

Фокальное свойство эллипса

Если источник света поместить в фокус эллипса, то то лучи, отразившись от эллипса, соберутся в другом фокусе.

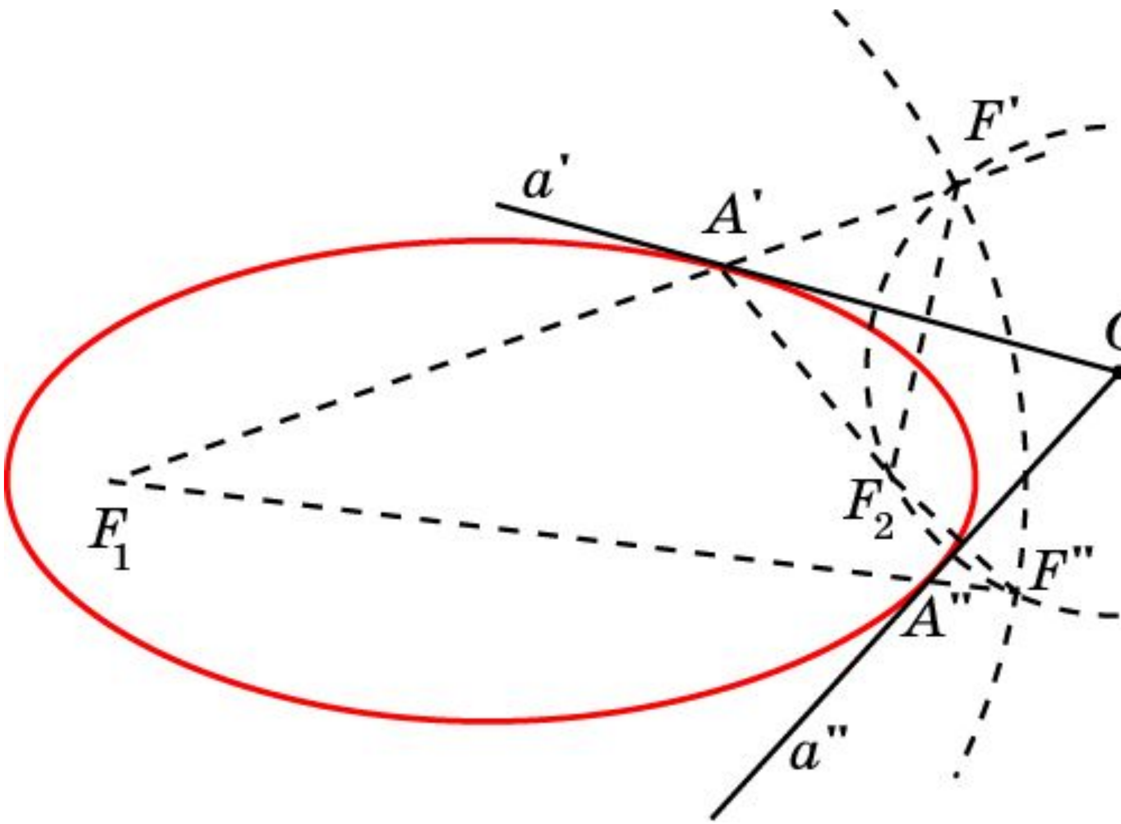


Построение касательной к эллипсу с использованием программы GeoGebra

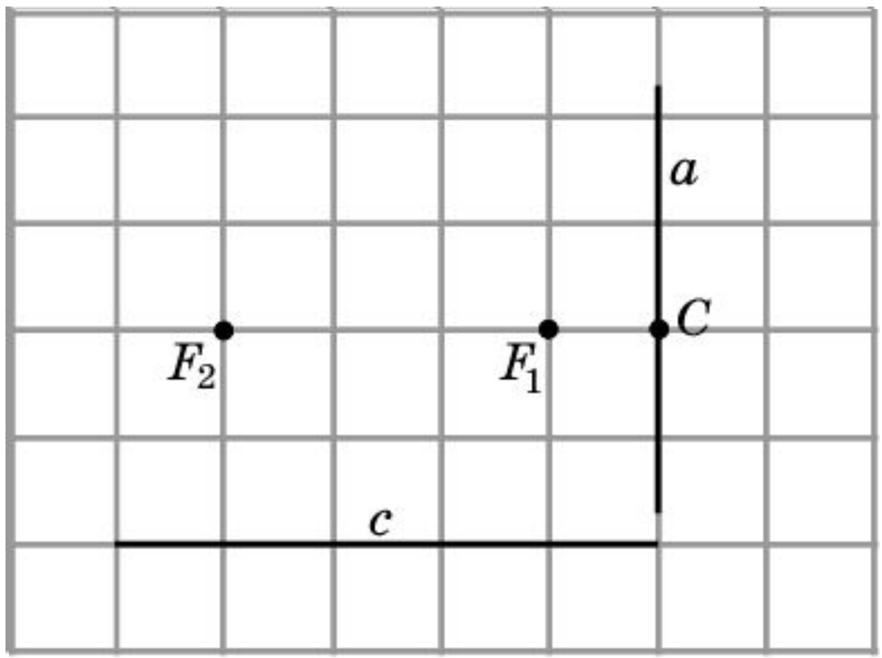


Построение касательной

По данному рисунку укажите способ построения касательной к эллипсу, заданному фокусами F_1, F_2, проходящей через точку C, с помощью циркуля и линейки.



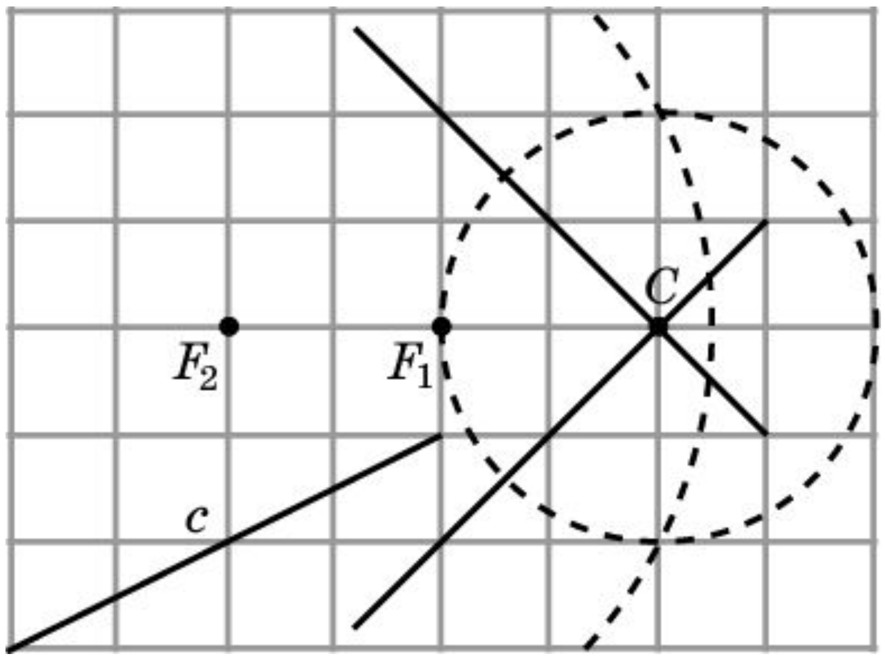
Через точку C проведите касательную к эллипсу, с заданными фокусами F_1, F_2 и константой c.



Ответ:

Через точку C проведите касательные к эллипсу, с заданными фокусами F_1, F_2 и константой c.

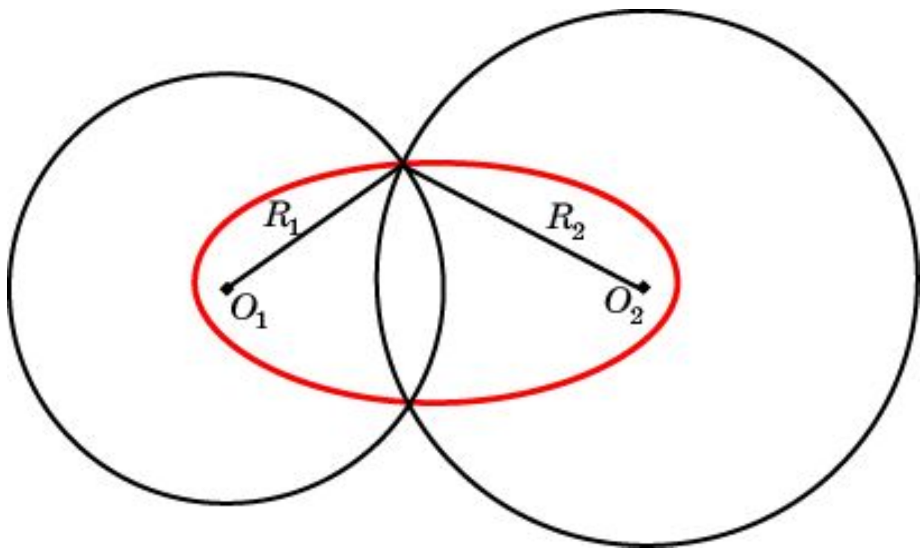
Ответ:



Для заданных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых периметр треугольника ABC равен постоянной величине c.

Ответ: Эллипс без двух точек.

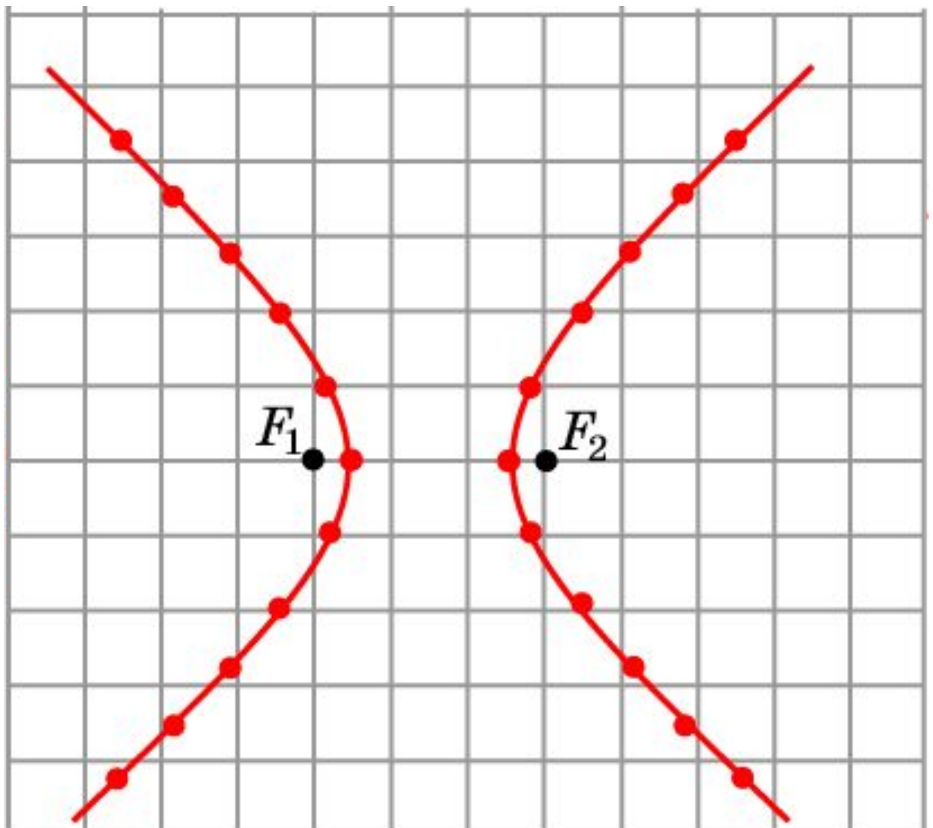
Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами O_1, O_2 и суммой радиусов $c = R_1 + R_2$ ($c > O_1O_2$).



Ответ: Эллипс.

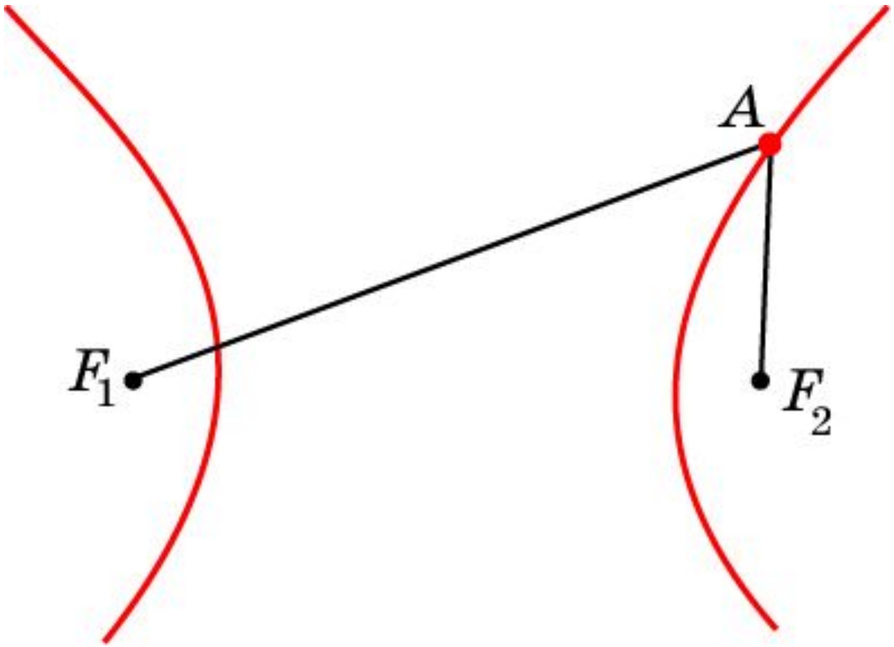
Параграф 23*

На клетчатой бумаге постройте несколько точек, расположенных в узлах сетки, модуль разности расстояний от которых до точек F_1 и F_2 равен 2 (стороны клеток равны 1). Соедините их плавной кривой.



Гипербола

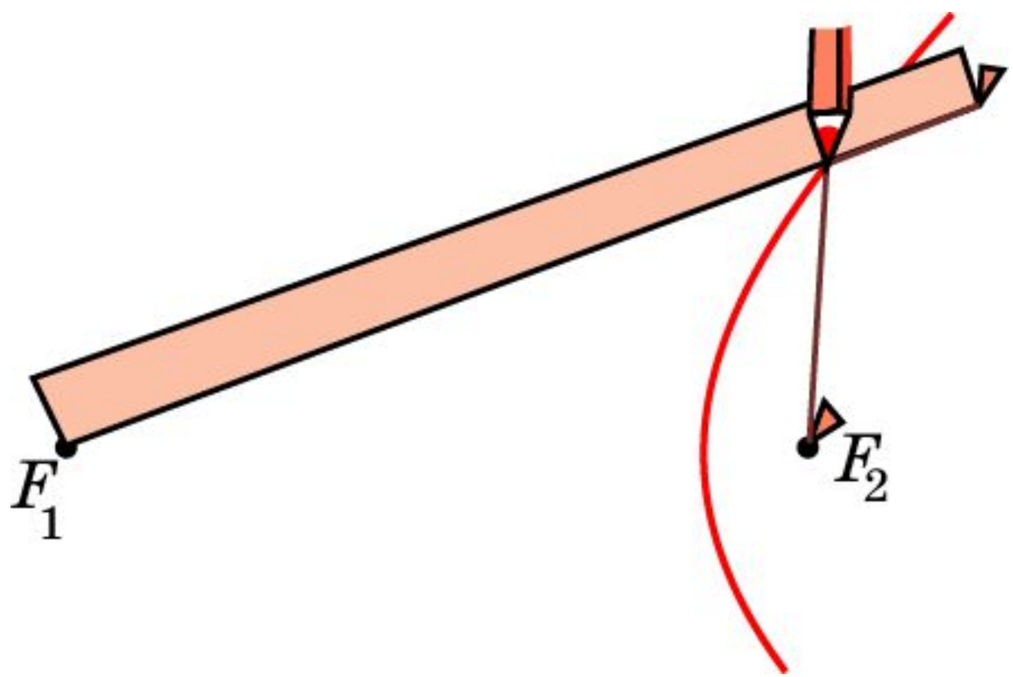
Геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется гиперболой. Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы.



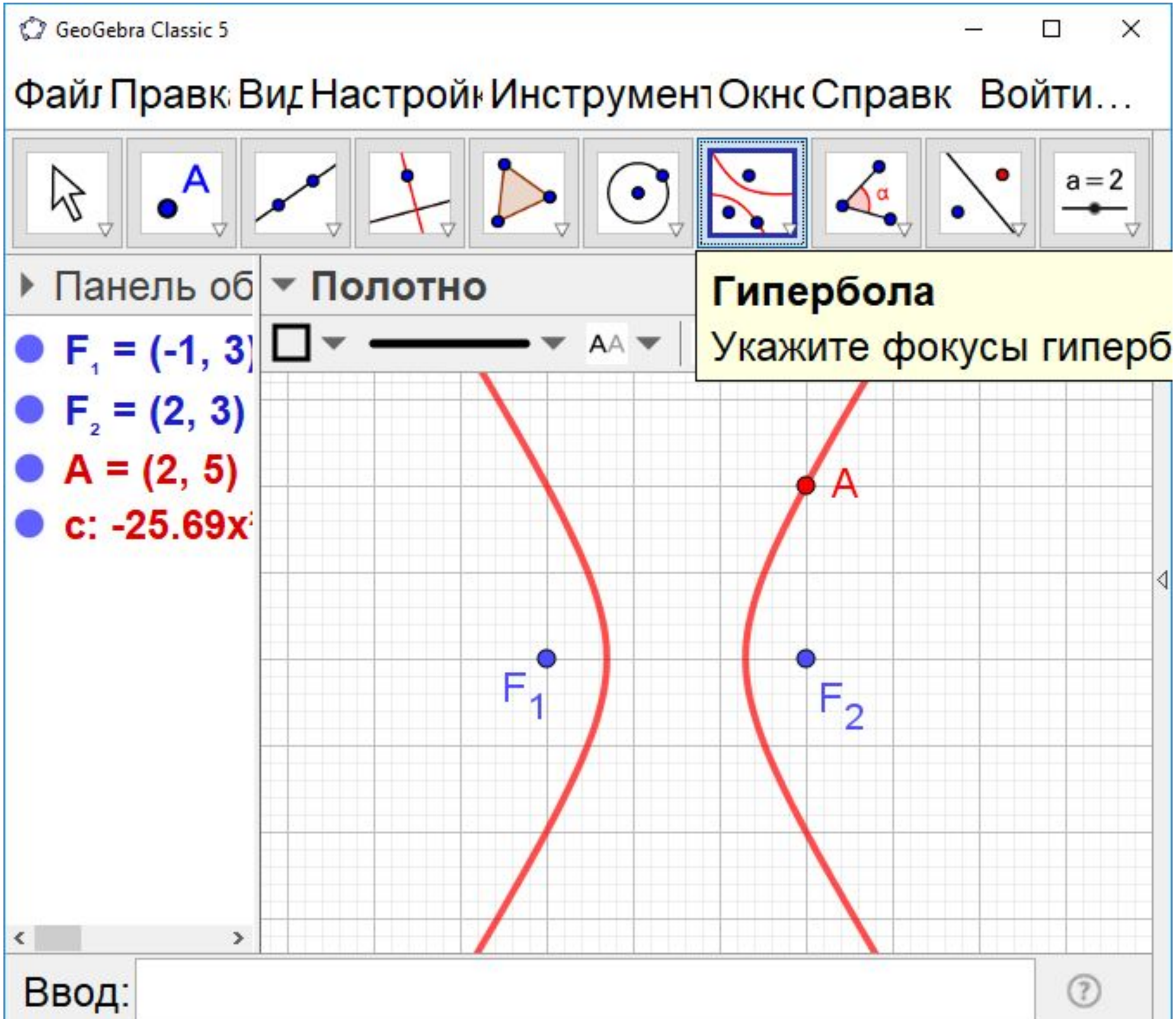
Таким образом, для точек A гиперболы с фокусами F_1, F_2 выполняется равенство: $|AF_1 - AF_2| = c$, где c – некоторое положительное число.

Рисуем гиперболу

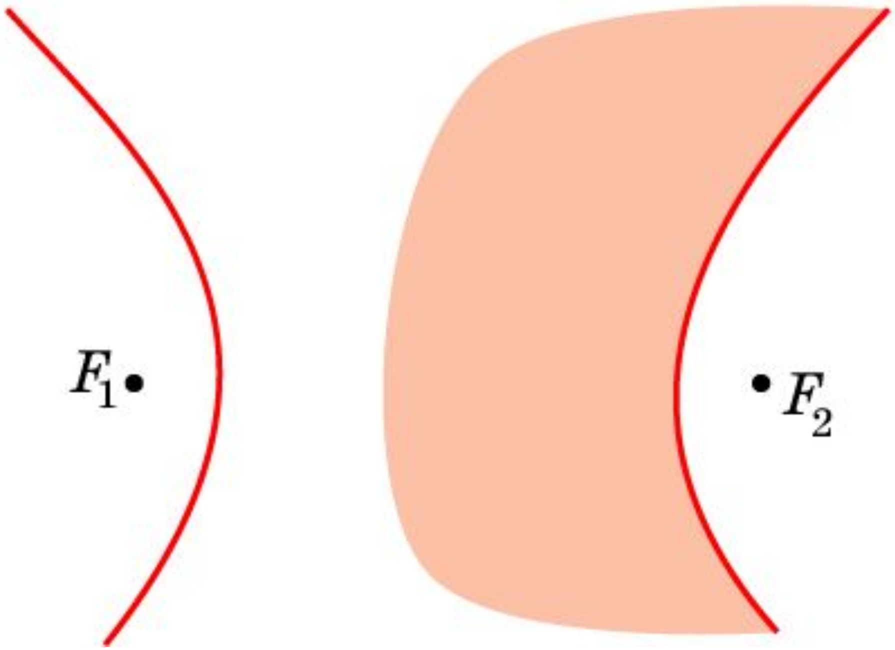
По данному рисунку укажите способ построения гиперболы с помощью линейки, кнопок, нитки и карандаша.



Построение гиперболы с использованием программы GeoGebra



Найдите геометрическое место точек A, для которых разность $AF_1 - AF_2$ расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) больше заданной величины c; б) меньше заданной величины c.

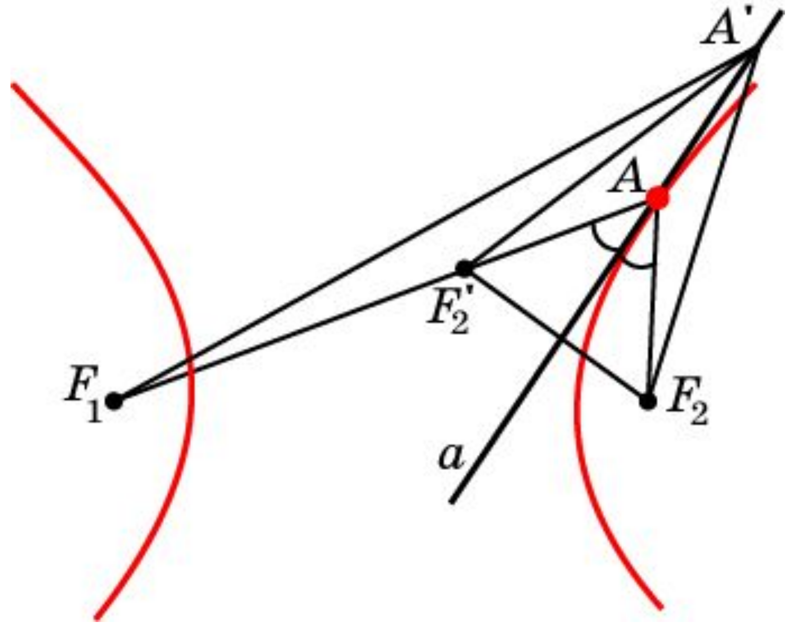


Ответ: а) Точки A', расположенные внутри ветви гиперболы;

б) точки A'', расположенные вне ветви гиперболы.

Касательная к гиперболе

Прямая, проходящая через точку A гиперболы, остальные точки A' которой лежат во внешней области, т. е. удовлетворяют неравенству $A'F_1 - A'F_2 < c$, называется касательной к гиперболе. Точка A называется точкой касания.

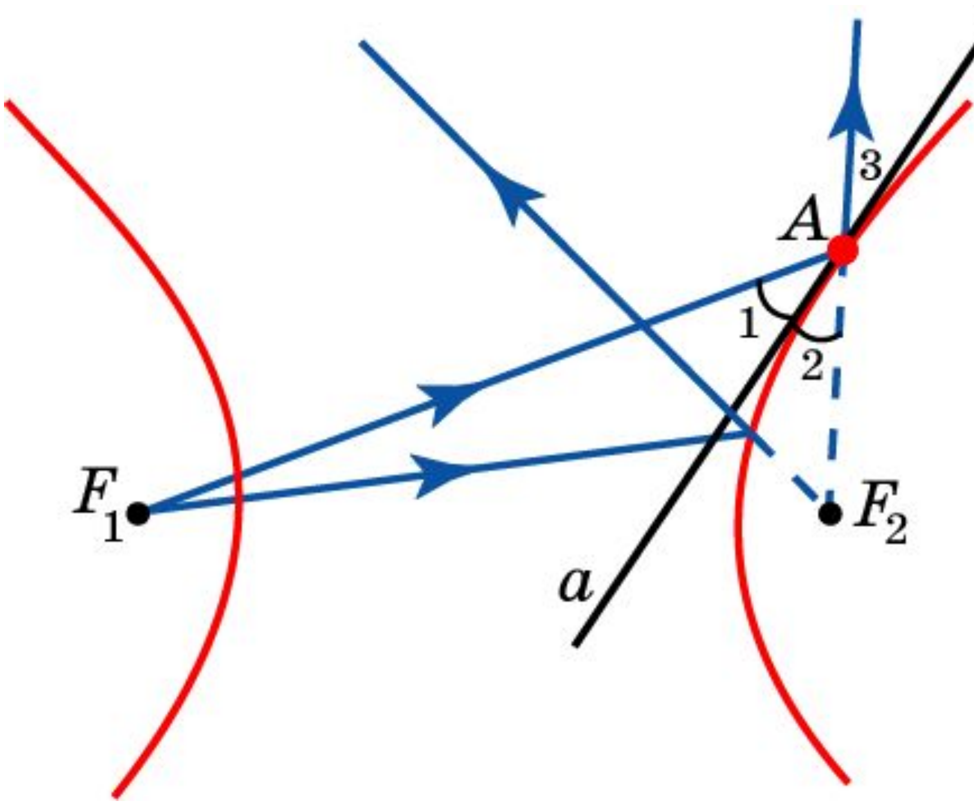


Теорема. Пусть A - точка гиперболы с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к гиперболе, проходящей через точку A, является прямая, содержащая биссектрису угла F_1AF_2.

Проведите доказательство теоремы, используя рисунок.

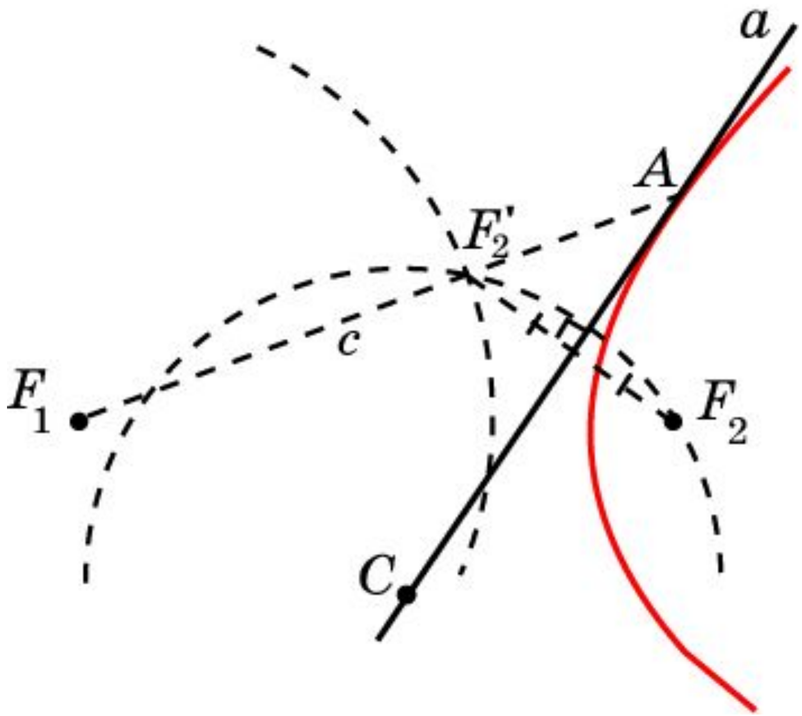
Фокальное свойство гиперболы

Если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от нее, пойдут так, как будто бы они исходят из другого фокуса.

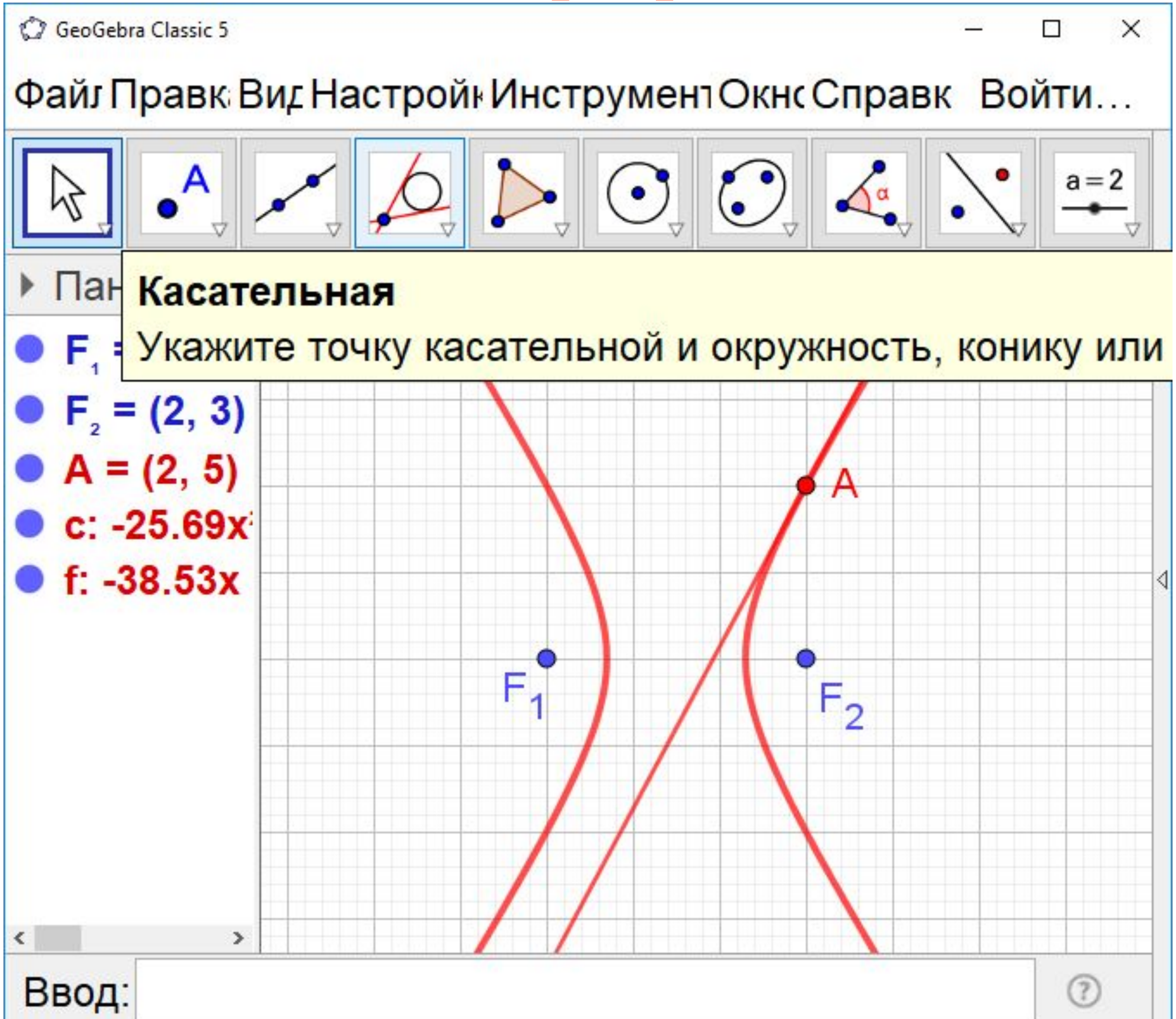


Построение касательной

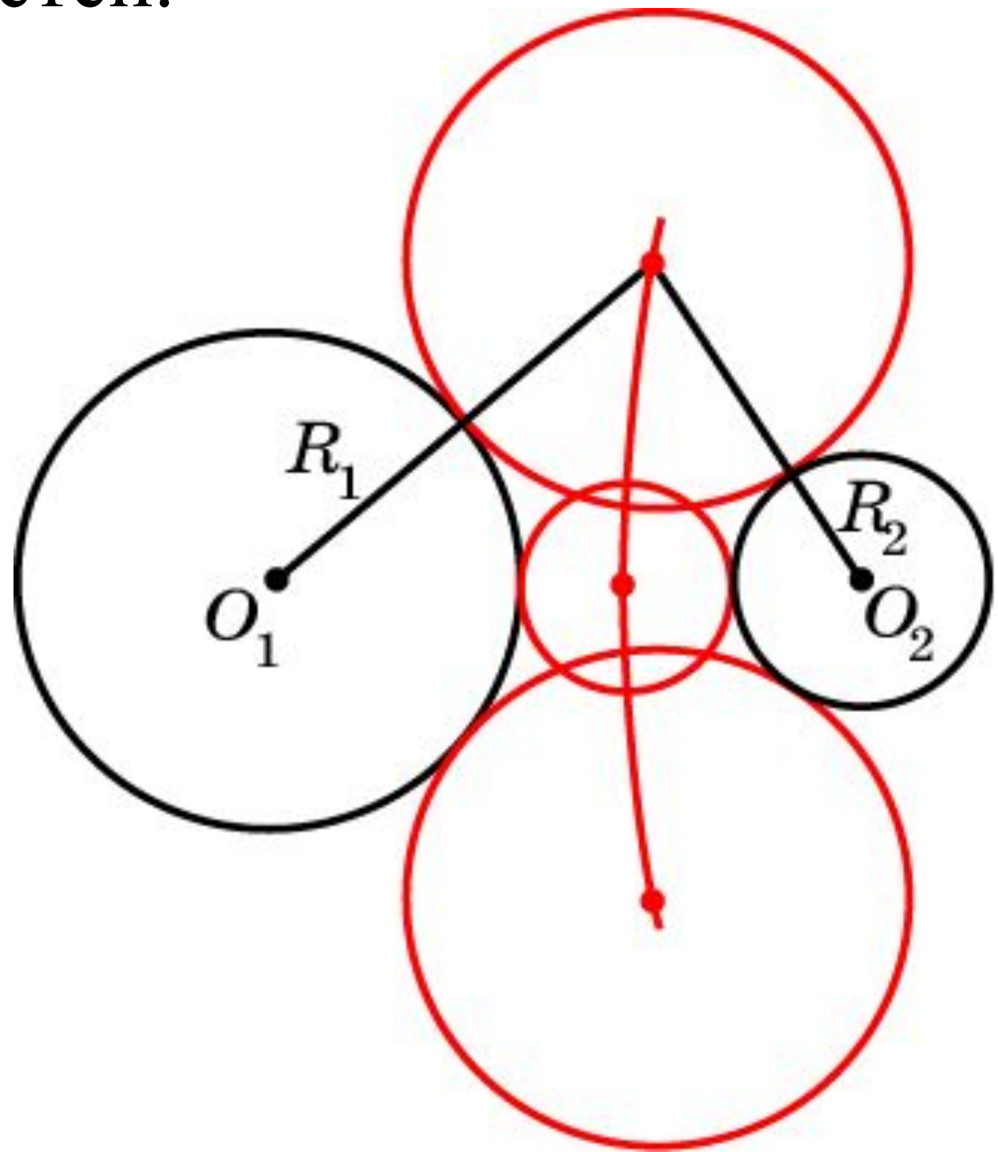
По данному рисунку укажите способ построения касательной, проходящей через точку C, к гиперболе, заданной фокусами F_1, F_2 и константой c, с помощью циркуля и линейки.



Построение касательной к гиперболе с использованием программы GeoGebra

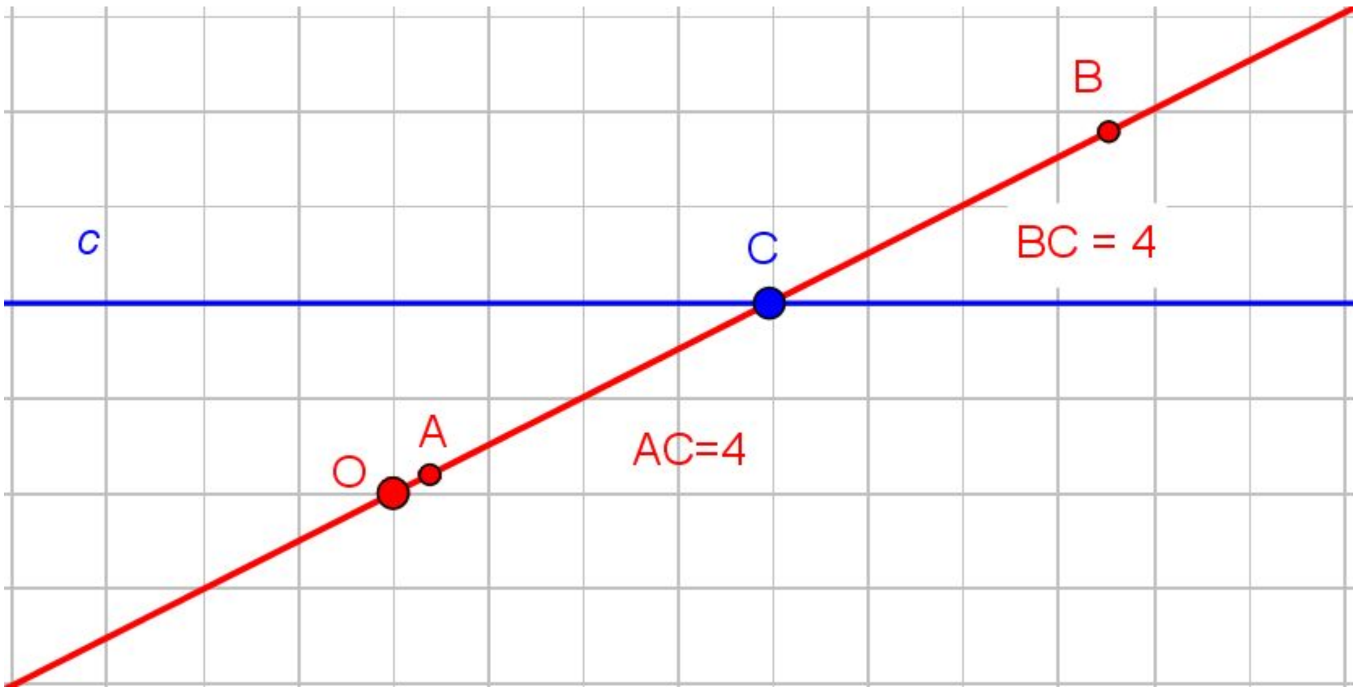


Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся внешним образом двух заданных окружностей.

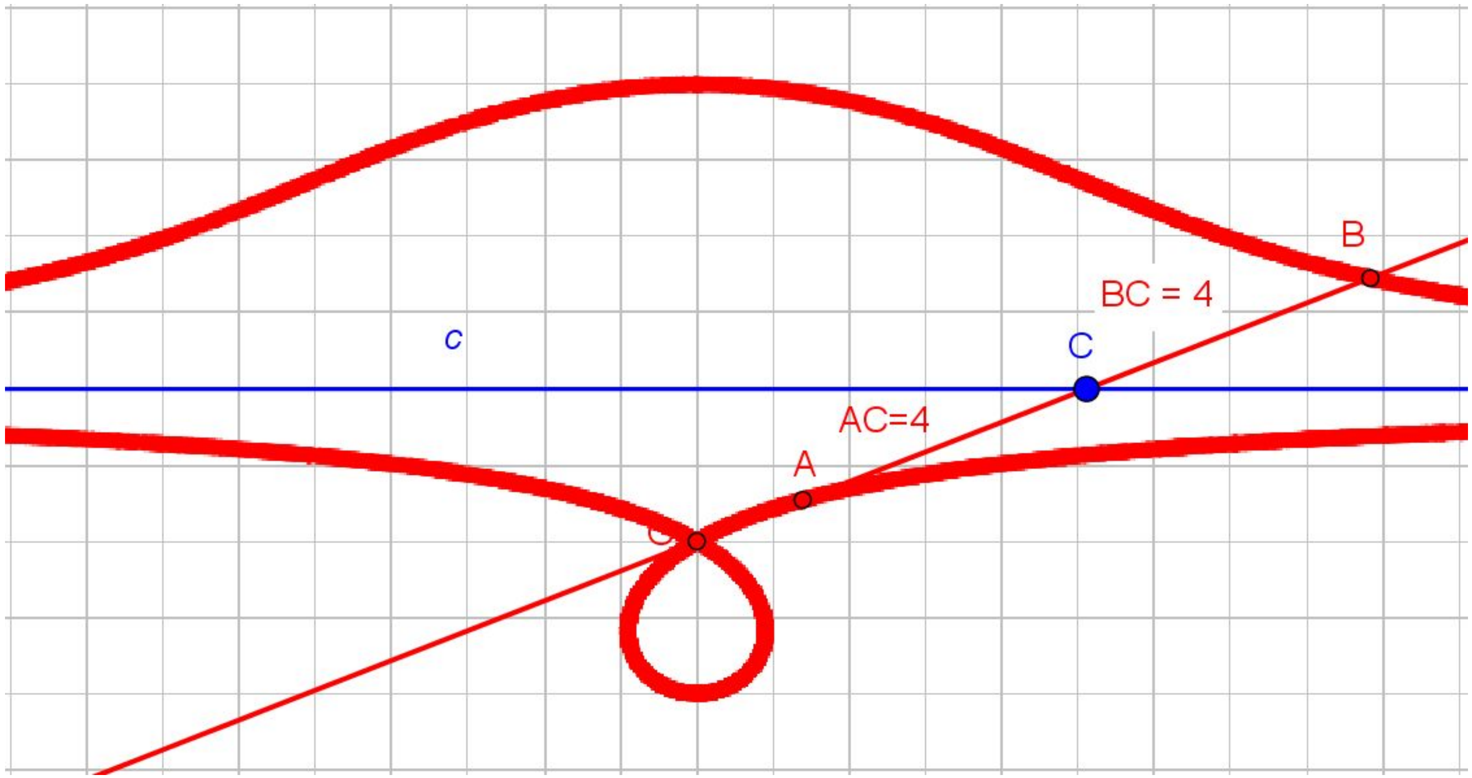


Ответ: Гипербола.

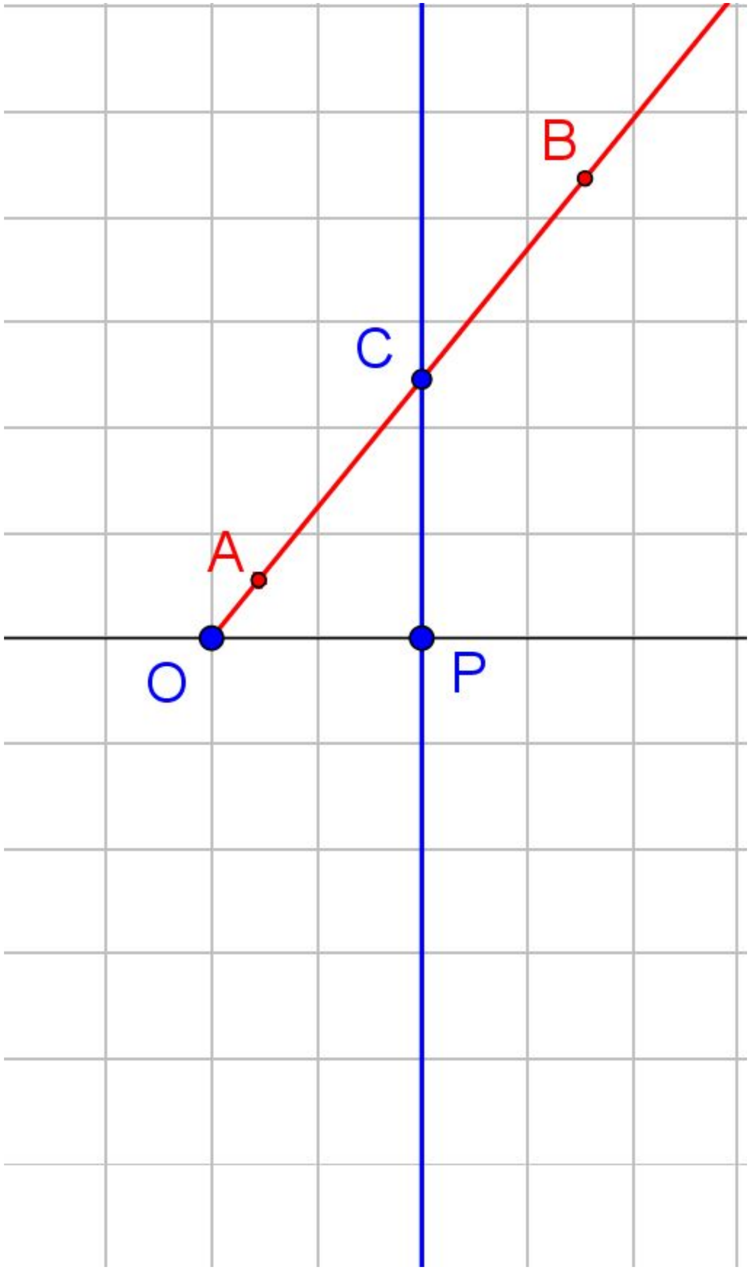
Дана прямая c и точка O на расстоянии 2 от этой прямой. Через точку O проводятся прямые, пересекающие прямую c в точках C. От точек C на этих прямых откладываются отрезки $CA = CB = 4$. Изобразите кривую, которую при этом описывают точки A и B. Она называется конхоидой.



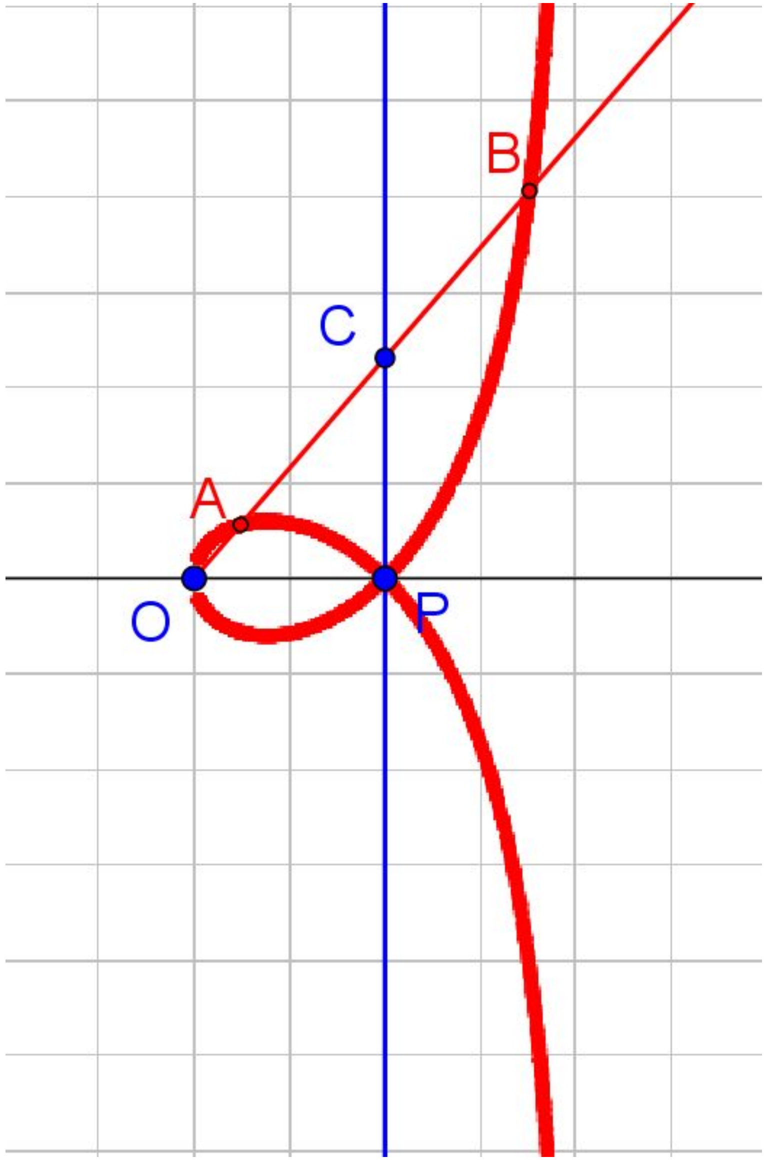
Ответ.



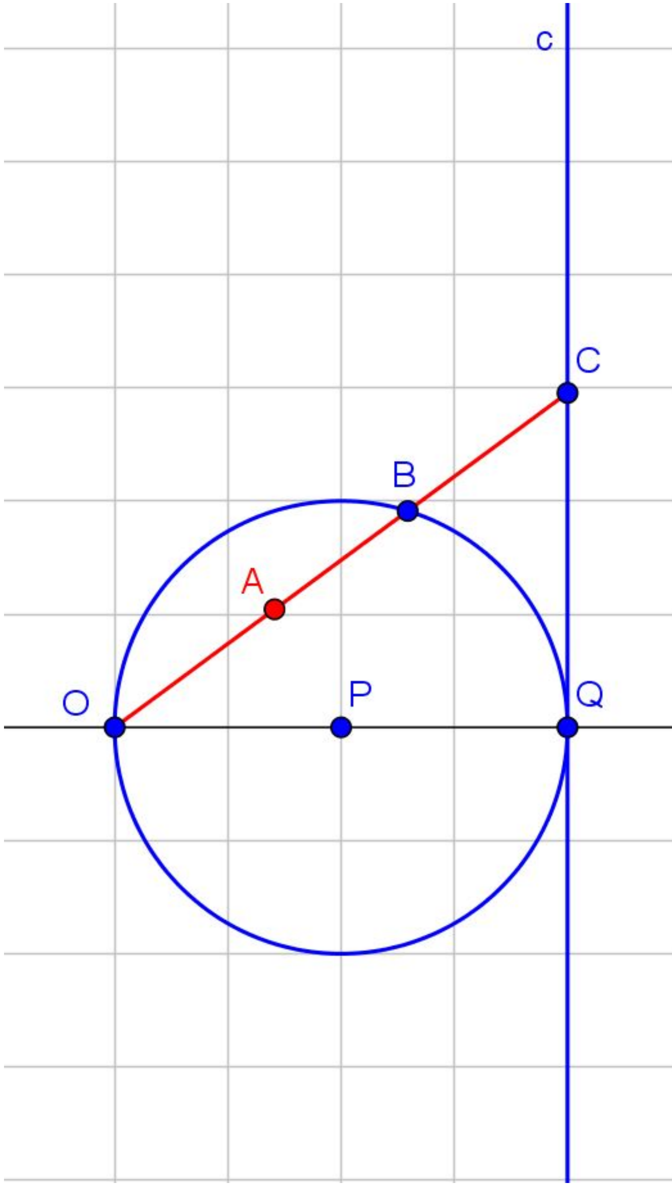
Дана прямая и точка O на расстоянии $OP = 2$ от этой прямой. Через точку O проводятся прямые, пересекающие прямую c в точках C. От точек C на этих прямых откладываются отрезки $CA = CB = CP$. Изобразите кривую, которую при этом описывают точки A и B. Она называется строфоидой.



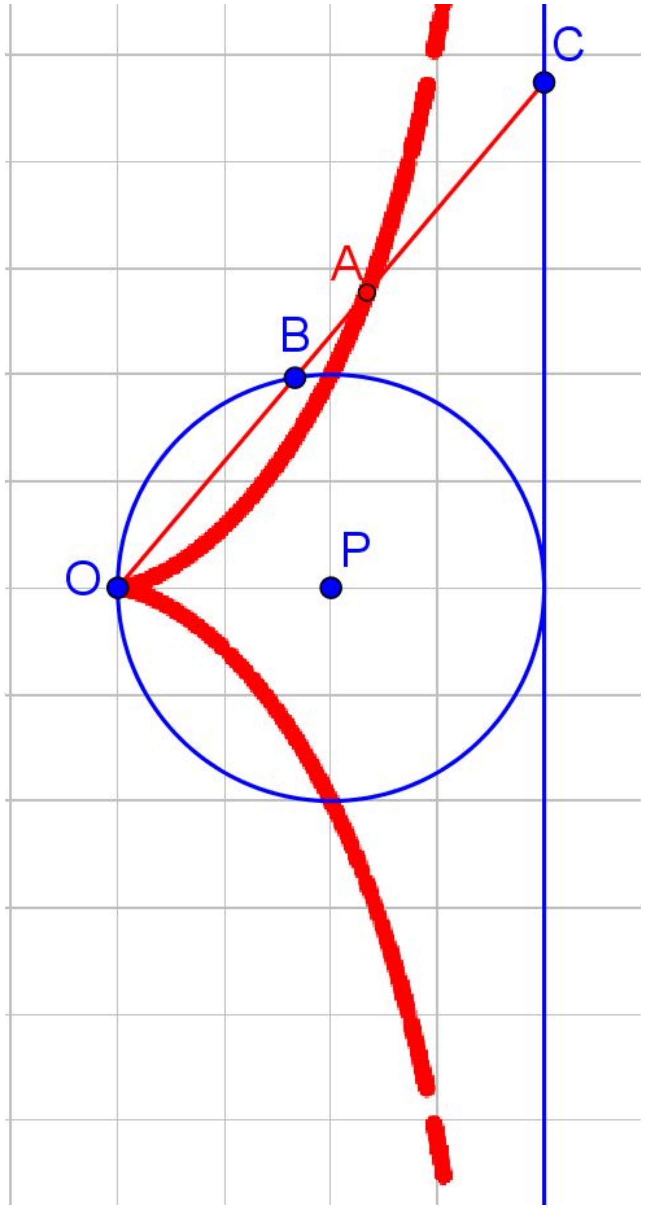
Ответ.



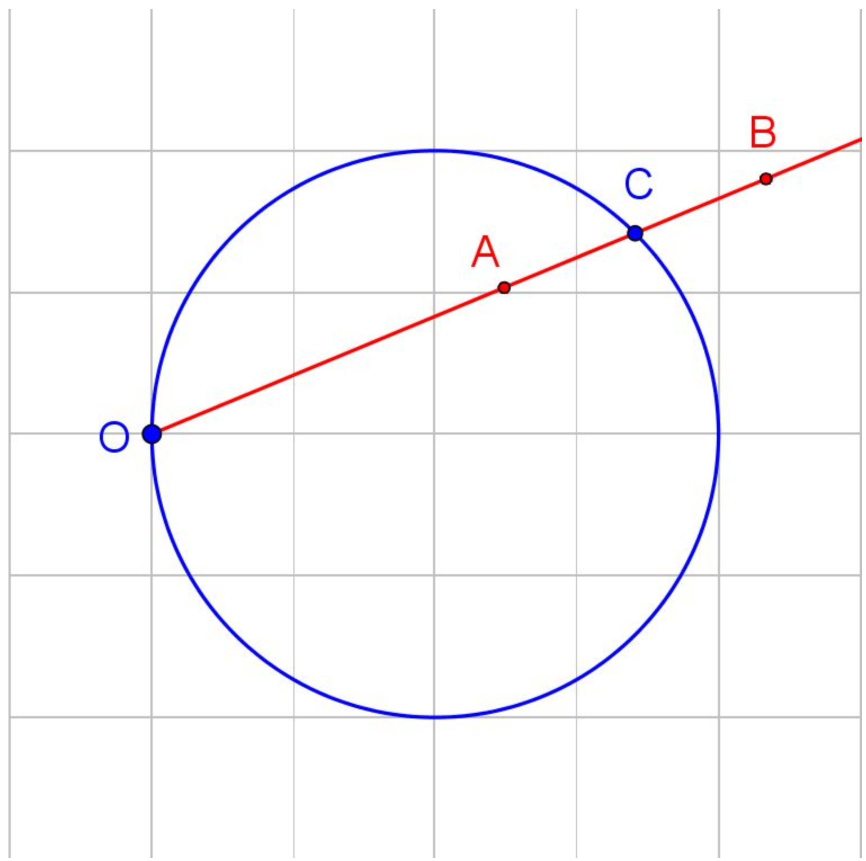
Дана прямая и точка O на расстоянии $OQ = 4$ от этой прямой. С диаметром OQ проведена окружность. Через точку O проводятся прямые, пересекающие окружность в точках B и прямую c в точках C. От точек O на этих прямых откладываются отрезки $OA = BC$. Изобразите кривую, которую при этом описывают точки A и B. Она называется циссоидой.



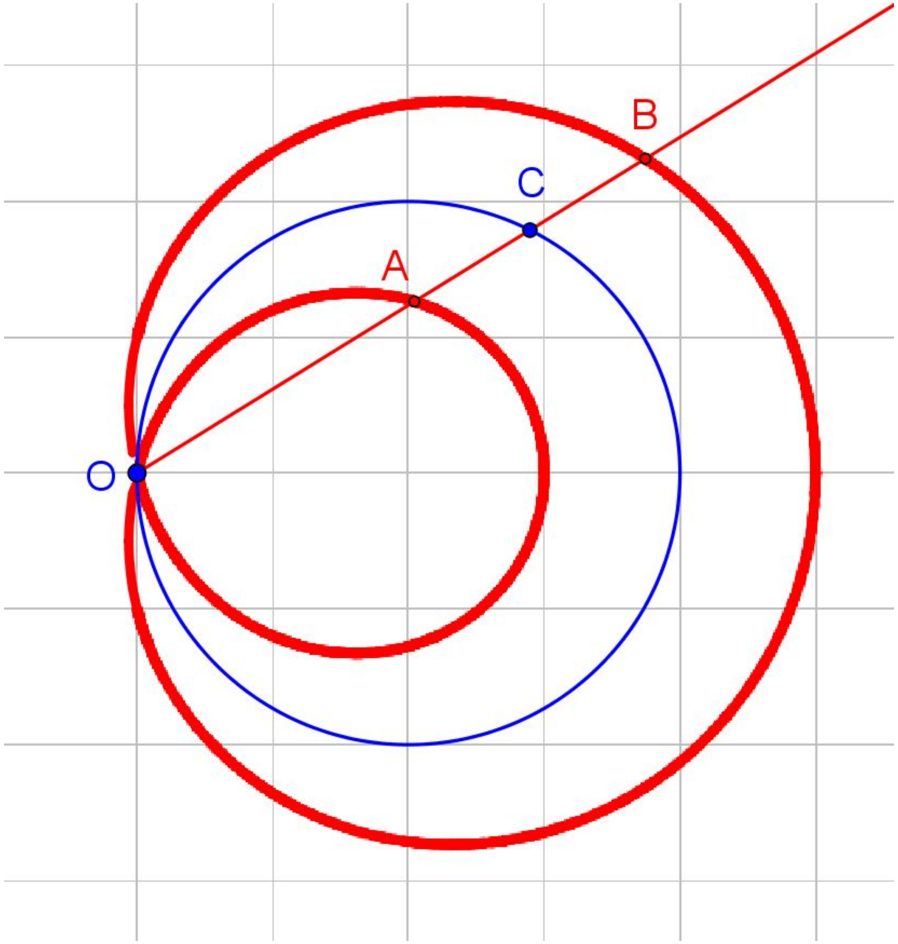
Ответ.



Дана окружность радиусом 2 и точка O, ей принадлежащая. Через точку O проводятся прямые, пересекающие окружность в точках C. От точек C на этих прямых откладываются отрезки $CA = CB = 1$. Изобразите кривую, которую при этом описывают точки A и B. Она называется улиткой Паскаля.



Ответ.



Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, д. 29 Б
Тел.: 8 (499) 367–67–81
E-mail: ioc@mnemozina.ru
Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:
E-mail: td@mnemozina.ru
Тел.: 8 (495) 644–20–26

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте **«Школа в кармане»**:
http://pocketschool.ru