10 класс

Степенная функция

$$y = x^p,$$

Вы знакомы с функциями $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ и т. д.

$$\boxed{y = x^p,}$$

- степенная функция

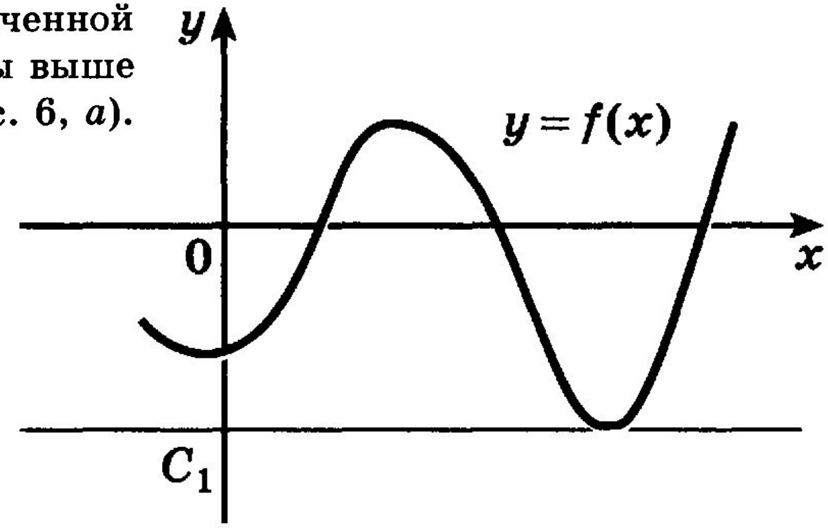
где p — заданное действительное число.

Познакомимся с некоторыми свойствами функций, которыми обладают, в частности, отдельные степенные функции.

Ограниченность функции

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной снизу* на множестве X, если существует число C_1 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant C_1$.

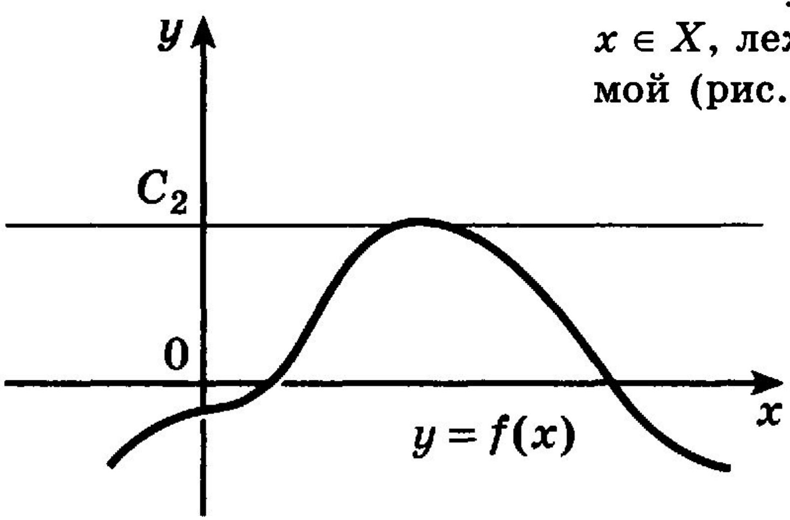
Это означает, что все точки графика ограниченной снизу функции $y = f(x)$, $x \in X$ расположены выше прямой $y = C_1$ или на этой прямой (рис. 6, *а*).



а)

Рис. 6

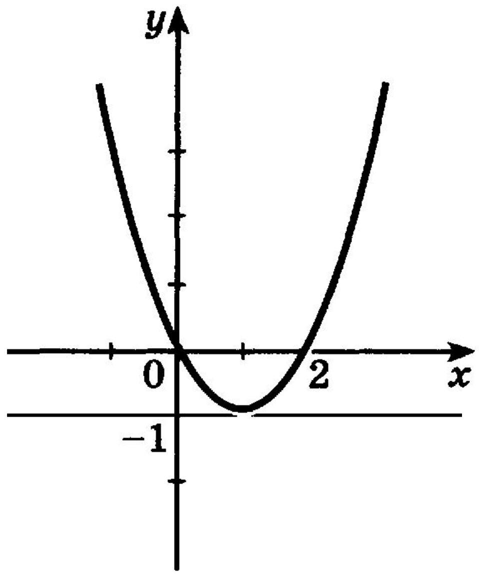
Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной сверху* на множестве X, если существует число C_2 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant C_2$.



б)

В этом случае все точки графика функции $y = f(x)$, $x \in X$, лежат ниже прямой $y = C_2$ или на этой прямой (рис. 6, *б*).

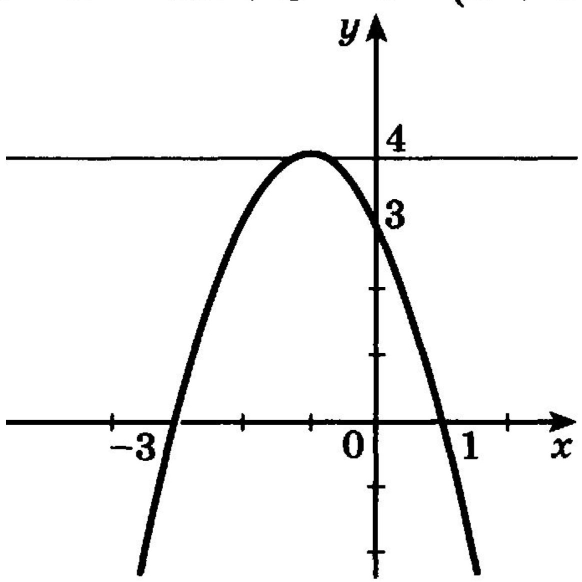
Например: 1) функция $y = x^2 - 2x$ является ограниченной снизу, так как $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geqslant -1$



а)

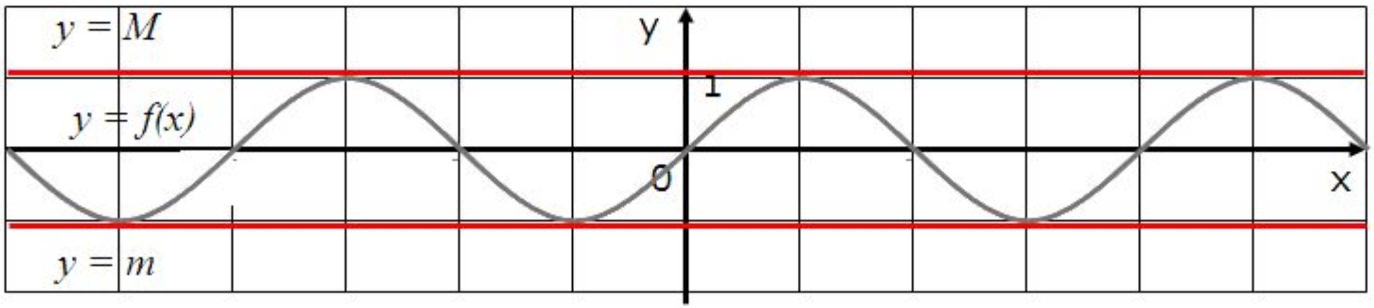
Рис. 7

2) функция $y = -x^2 - 2x + 3$ ограничена сверху, так как $-x^2 - 2x + 3 = 4 - (x + 1)^2 \leqslant 4$



б)

Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве X, называют *ограниченной* на этом множестве.



$$m < f(x) < M$$

f(x) –ограниченная функция

Наименьшее и наибольшее значение функции

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого x из этой области справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

1. Показатель $p = 2n$ — чётное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — все действительные числа, т. е. множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — неотрицательные числа, т. е. $y \geqslant 0$;
— функция $y = x^{2n}$ чётная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;
— функция является убывающей на промежутке $x \leqslant 0$ и возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;
— функция ограничена снизу;
— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

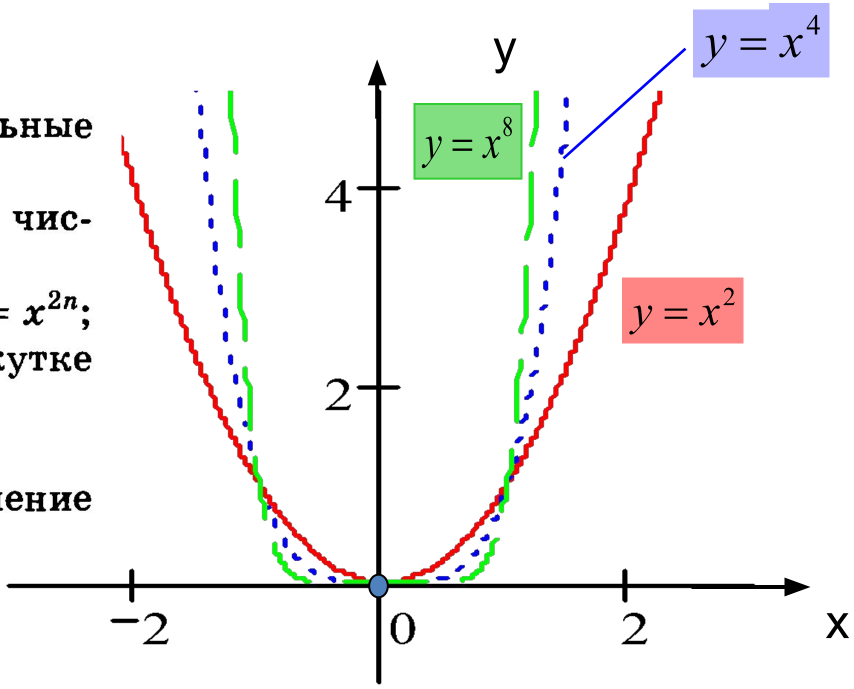
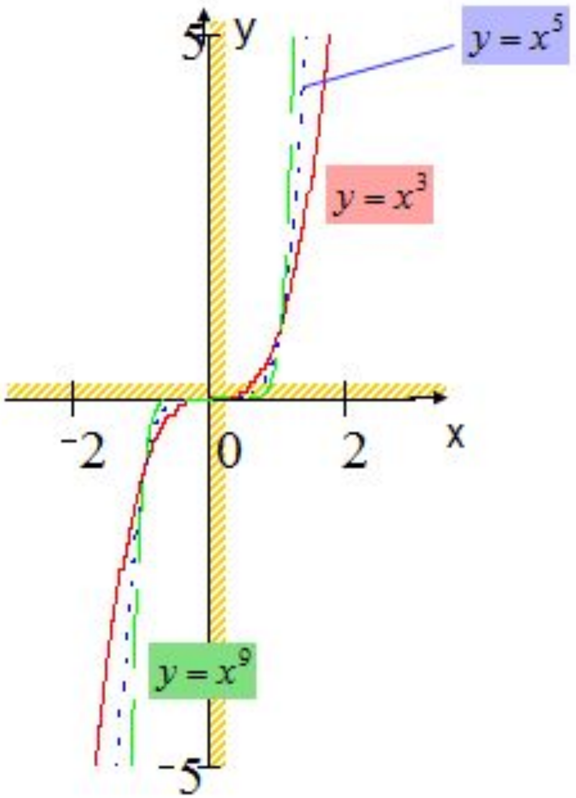


График функции $y = x^{2n}$

2. Показатель $p = 2n - 1$ — нечётное натуральное число.

График функции $y = x^{2n-1}$



В этом случае степенная функция $y = x^{2n-1}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

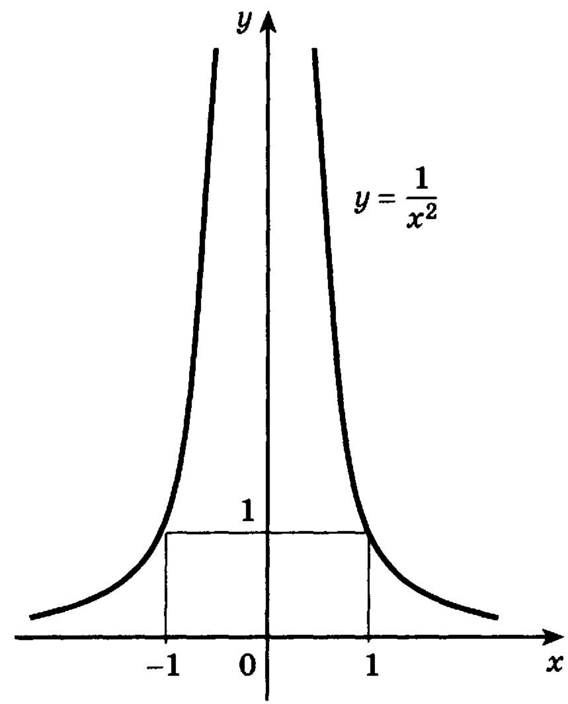
— область определения — множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — множество $\boldsymbol{R}$;
— функция $y = x^{2n-1}$ нечётная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$;
— функция является возрастающей на всей действительной оси;
— функция не является ограниченной;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

3. Показатель $p = -2n$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$

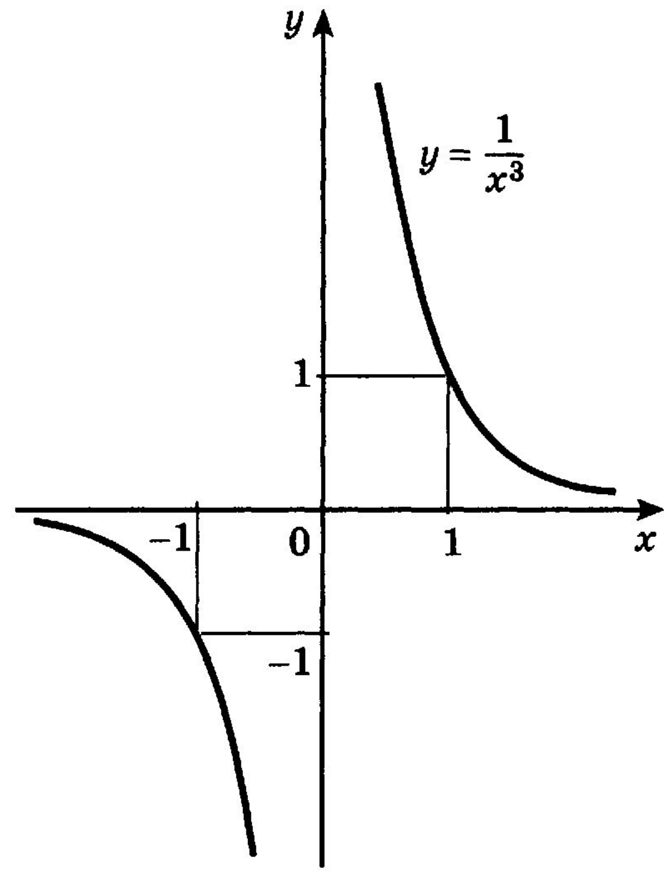
обладает следующими свойствами:

— область определения — множество $\boldsymbol{R}$, кроме $x = 0$;
— множество значений — положительные числа $y > 0$;
— функция $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$ чётная, так как $\dfrac{1}{(-x)^{2n}} = \dfrac{1}{x^{2n}}$;
— функция является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$;
— функция ограничена снизу;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.



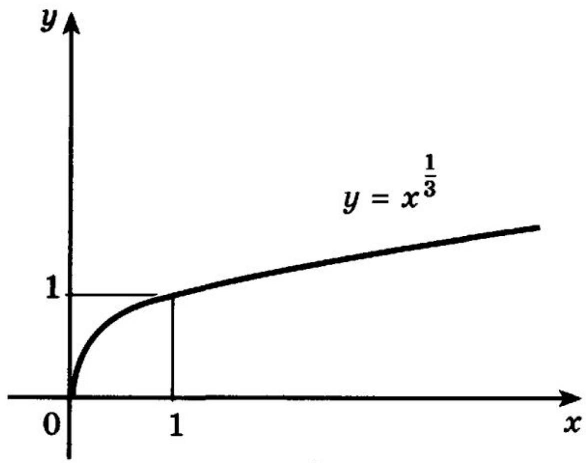
4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, где $n \in N$, обладает следующими свойствами:

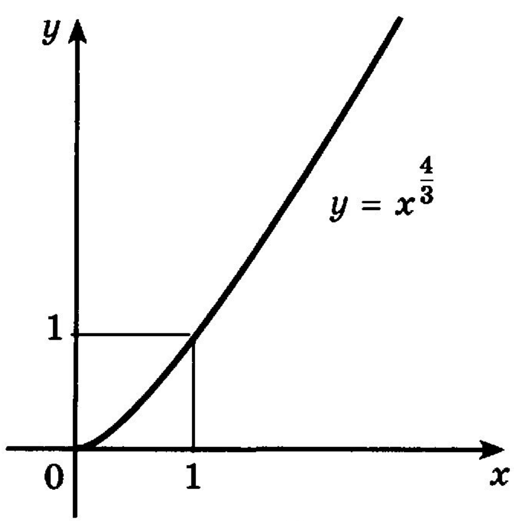


— область определения — множество R, кроме $x = 0$;
— множество значений — множество R, кроме $y = 0$;
— функция $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ нечётная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-1}}$;
— функция является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

5*. Показатель p — положительное действительное нецелое число.



а)



б)

Рис. 11

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество неотрицательных чисел $x \geqslant 0$;

— множество значений — множество неотрицательных чисел $y \geqslant 0$;

— функция является возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;

— функция не является ни чётной, ни нечётной;

— функция ограничена снизу;

— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

6*. Показатель p — отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

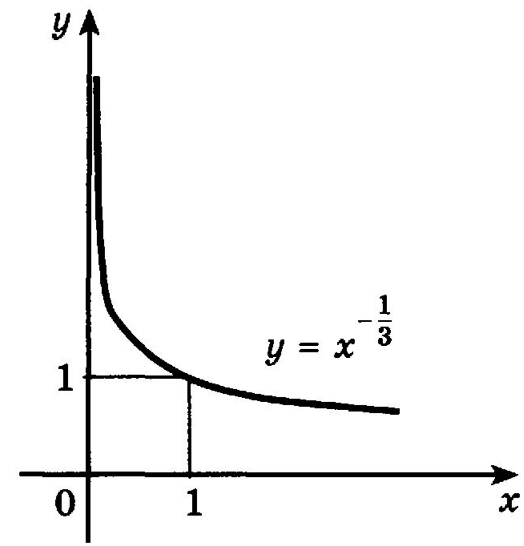


Рис. 12

— область определения — множество положительных чисел $x > 0$;
— множество значений — множество положительных чисел $y > 0$;
— функция является убывающей на промежутке $x > 0$;
— функция не является ни чётной, ни нечётной;
— функция ограничена снизу.

№ 119.

Изобразить схематически график функции и указать её область определения и множество значений; выяснить, является ли функция ограниченной сверху (снизу):

1) $y = x^6$; 2) $y = x^5$; 3) $y = x^7$;

4) $y = x^{-2}$; 5) $y = x^{-3}$; 6) $y = x^6$.

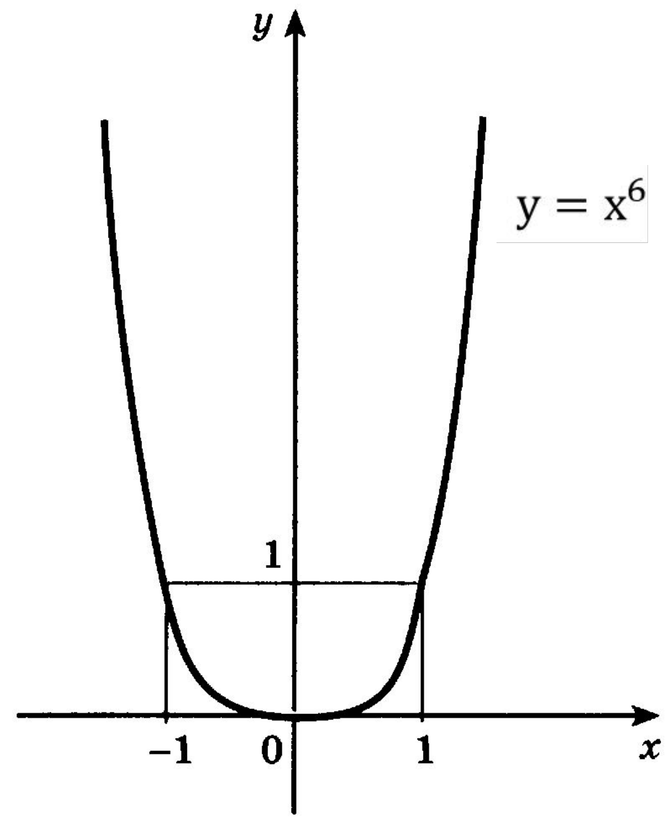
№ 120.

(Устно.) Выяснить, является ли функция $y = x^p$ возрастающей (убывающей) при $x > 0$, если:

1) $p = 7$; 2) $p = 16$; 3) $p = -3$;
4) $p = -7$; 5) $p = -4$; 6) $p = -10$?

Уроки 2,3.

Задача 1 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^6$ на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.



▶ Функция $y = x^6$ на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ убывает при $x \in [-2; 0]$, возрастает при $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, следовательно, она принимает наименьшее значение, равное нулю, при $x = 0$. Наибольшее значение этой функции — наибольшее из чисел $y(-2)$ и $y\left(\frac{1}{2}\right)$. Так как

$y(-2) = (-2)^6 = 64$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$,

то $y(-2) > y\left(\frac{1}{2}\right)$ и наибольшее значение равно 64. ◁

Ответ: $y_{наим} = y(0) = 0$

$y_{наиб} = y(-2) = 64$

Задача 2 Построить график функции $y = -(x-1)^5 + 2$.

▶ Областью определения функции является множество действительных чисел.

1) Строим $y = x^5$

x	-2	-1	0	1	2
y	-32	-1	0	1	32

2) Симметрия относительно оси y
3) Сдвиг на 1 ед. вправо
4) Сдвиг на 2 ед. вверх

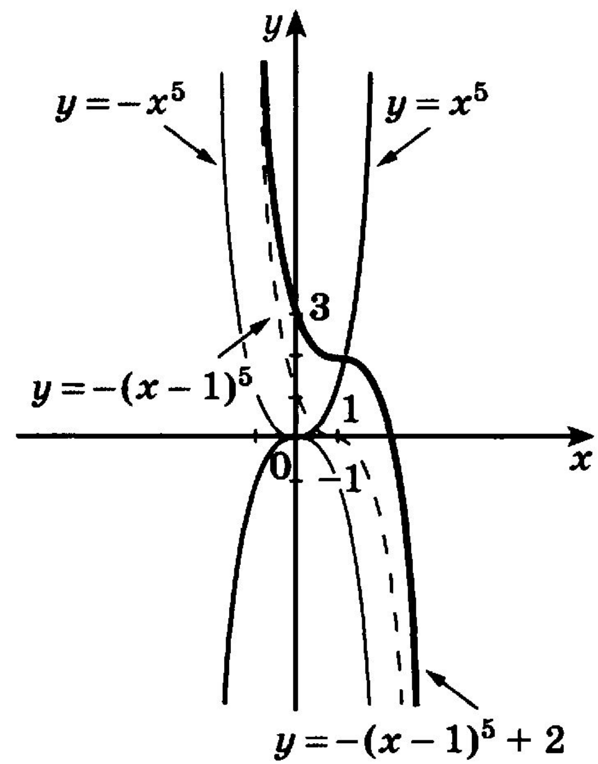


Рис. 13

Задача 3* Найти точки пересечения графиков функций

$$y=\sqrt[3]{x} \quad \text{и} \quad y=x^{\frac{4}{3}}.$$

▶ Для нахождения точек пересечения этих графиков решим уравнение $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{4}{3}}$. Левая часть этого уравнения имеет смысл при всех x, а правая — только при $x \geqslant 0$.

При $x \geqslant 0$ функция $y=\sqrt[3]{x}$ совпадает с функцией $y=x^{\frac{1}{3}}$, поэтому уравнение можно записать так: $x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{3}}$. Возводя это уравнение (при $x \geqslant 0$) в куб, получаем $x=x^4$, откуда $x(x^3-1)=0$, $x_1=0$, $x_2=1$.

Ответ (0; 0), (1; 1). ◁

Решаем из учебника:

121 Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

1) $y = x^4$, $x \in [-1;\ 2]$; 2) $y = x^7$, $x \in [-2;\ 3]$;

3) $y = x^{-1}$, $x \in [-3;\ -1]$; 4) $y = x^{-2}$, $x \in [1;\ 4]$.

122 Пользуясь свойствами степенной функции, сравнить с единицей:

1) $4{,}1^{12}$; 2) $0{,}2^3$; 3) $0{,}7^9$; 4) $(\sqrt{3})^{22}$; 5) $1{,}3^{-2}$; 6) $0{,}8^{-1}$.

123 Построить график функции, указать её область определения и множество значений. Выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей), является ли функция ограниченной, принимает ли она наибольшее (наименьшее) значение:

1) $y = -(x-2)^3 - 1$; 2) $y = (x+3)^4 + 2$.

124 Сравнить значения выражений:

1) $3{,}1^7$ и $4{,}3^7$;

2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^3$;

3) $0{,}3^8$ и $0{,}2^8$;

4) $2{,}5^2$ и $2{,}6^2$;

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$;

6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{-6}$;

7) $(4\sqrt{3})^{-3}$ и $(3\sqrt{4})^{-3}$;

8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5}$ и $(6\sqrt[3]{2})^{-5}$.

!

Таким образом, при возведении неравенства с положительной левой и положительной правой частями в положительную степень знак неравенства не меняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

124 Сравнить значения выражений:

1) $3{,}1^7 < 4{,}3^7$;

2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3 < \left(\frac{12}{11}\right)^3$;

3) $0{,}3^8 > 0{,}2^8$;

4) $2{,}5^2 < 2{,}6^2$;

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2} > \left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$;

6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6} > \left(\frac{15}{16}\right)^{-6}$;

7) $(4\sqrt{3})^{-3} < (3\sqrt{4})^{-3}$;

8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5} > (6\sqrt[3]{2})^{-5}$.

125 В одной системе координат построить графики функций, находя сначала их области определения и множества значений:

1) $y = x^3$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$;   2) $y = x^4$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$;

3) $y = x^2$ и $y = x^{-2}$;   4) $y = x^5$ и $y = x^{-5}$.

126 Найти промежутки, на которых график функции:

1) $y = x^8$; 2) $y = x^{\frac{1}{3}}$ — лежит выше (ниже) графика функции $y = x$.

130 Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = \sqrt[5]{x}$ и $y = x^{\frac{3}{5}}$; 2) $y = \sqrt[7]{x}$ и $y = x^{\frac{5}{7}}$.