

Лекция № 6

Электрическое поле

Алексей Викторович
Гуденко

16/10/2014

План лекции

1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля.
2. Электростатический потенциал.
3. Поле точечного диполя
4. Диполь в поле
5. Теорема Гаусса. Электрические поля в простейших случаях.

Демонстрации



Определения

- **Электромагнитное взаимодействие** – фундаментальное взаимодействие, которое осуществляется на расстоянии посредством электромагнитного поля.
- Электромагнитное поле создаётся **электрическими зарядами** и действует на заряды
- Заряд – мера взаимодействия заряженного тела с полем. Заряды бывают **положительные** и **отрицательные**
- Носителями заряда являются элементарные частицы – протон (положительный заряд) и электрон (отрицательный заряд).
- **Элементарный заряд** – заряд элементарных частиц
 $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ = $1,601 \cdot 10^{-19}$ Кл (СИ)
- Суммарный электрический заряд замкнутой системы сохраняется.
- Заряд тела, системы тел – релятивистский инвариант: при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой заряд не изменяется.

Электростатика

- **Электростатика** занимается изучением полей *неподвижных зарядов*.
- неподвижные заряды создают неизменное во времени **электростатическое поле**.
- **Точечный заряд** – это заряд, размером и формой которого в рассматриваемых условиях можно пренебречь
- **Пробный заряд** – небольшой по величине точечный заряд, который не вызывает перераспределения электрических зарядов в окружающих телах.

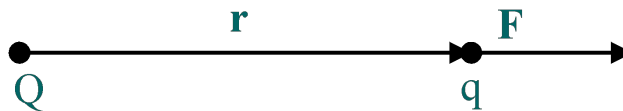
Закон Кулона (1875 г)

- Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величинам q и Q и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r . Одноимённые заряды отталкиваются; заряды разных знаков притягиваются.

$$F = Qq/r^2$$

- Закон Кулона в векторной форме:

$$\mathbf{F} = Qq\mathbf{r}/r^3$$



Напряжённость электрического поля

- Напряжённостью электрического поля называется сила, действующий на единичный заряд:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

- Поле точечного заряда Q :

$$\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3$$

- **Принцип суперпозиции:**

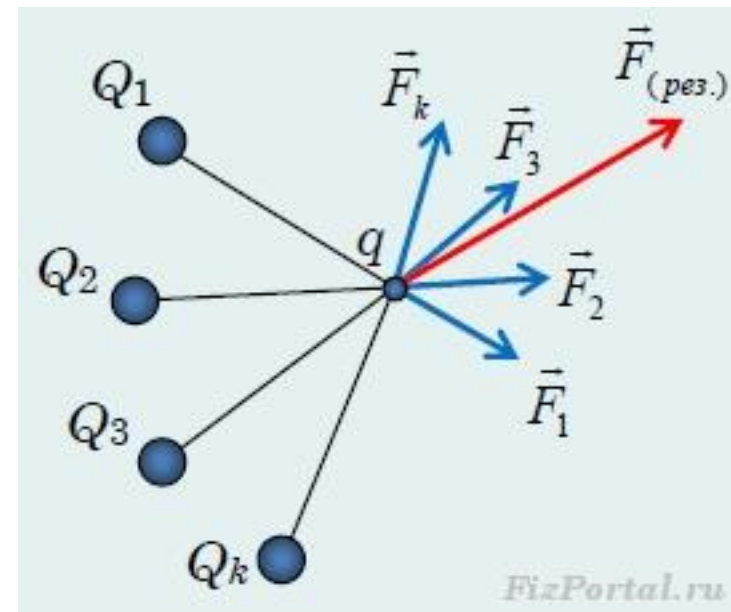
напряжённость электрического поля \mathbf{E} нескольких неподвижных точечных зарядов равна векторной сумме напряжённостей полей, которое создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствие остальных:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$$

Принцип суперпозиции для электростатических полей

- Электрическое взаимодействие между двумя зарядами не зависит от присутствия третьего заряда
- напряжённость электрического поля \mathbf{E} нескольких неподвижных точечных зарядов равна векторной сумме напряжённостей полей, которое создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствие остальных:

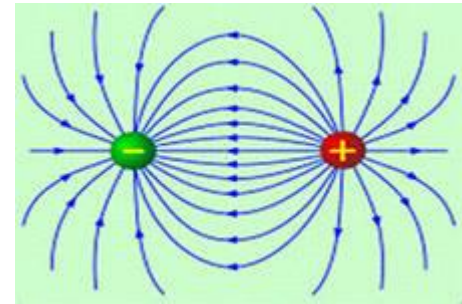
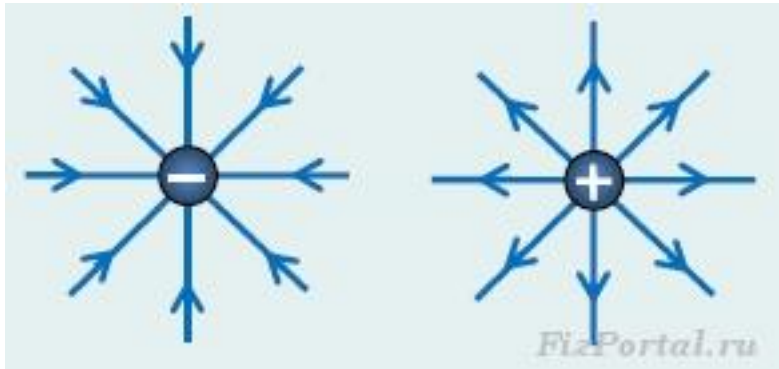
$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$$



Потенциал электростатического поля

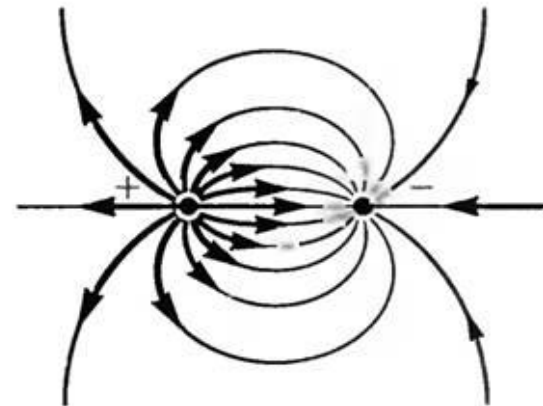
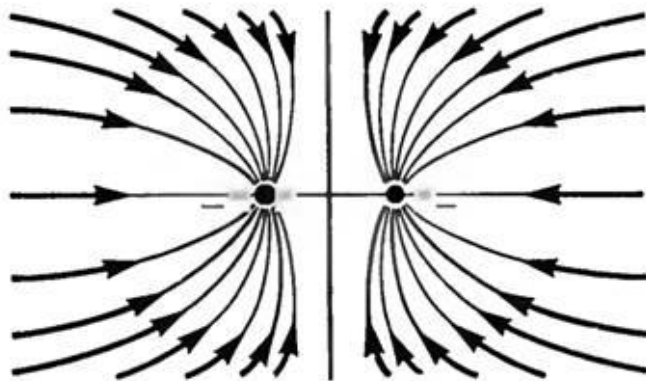
- Электростатическое поле потенциально, как всякое стационарное центральное поле \Rightarrow работа поля не зависит от траектории и равна убыли потенциальной энергии взаимодействия:
 $dU = -(qQ/r^2)dr \Rightarrow$
 $U = qQ/r; U(\infty) = 0$
- Потенциал электрического поля – это потенциальная энергия единичного заряда. Потенциал точечного заряда $\varphi(r) = Q/r$
- Принцип суперпозиции для потенциала: потенциал поля системы зарядов равен сумме потенциалов полей отдельных зарядов
 $\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) + \dots$
- Энергия заряда в поле $U = q\varphi$

Графическое изображение полей



a

б



Как устроены силовые линии.

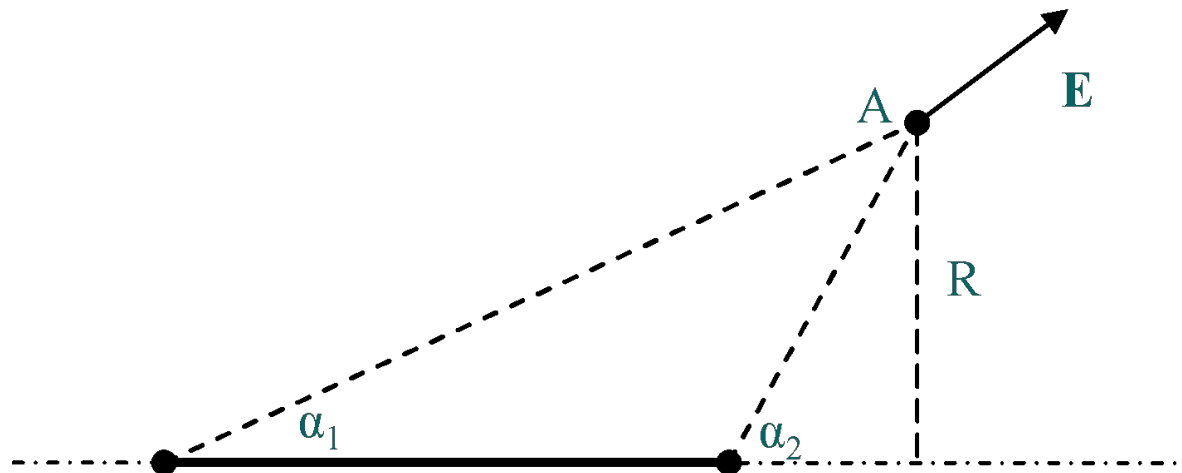
- Направление касательной в каждой точке *силовой линии* совпадает с вектором **E**
- Силовые линии не пересекаются в пространстве, не содержащих заряды
- Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми – это противоречило бы закону сохранения энергии
- один конец силовой линии – всегда заряд; другой конец - либо заряд противоположного знака, либо бесконечность.

Поле на оси равномерно заряженного диска

- Поле на оси равномерно заряженного диска с поверхностной плотностью $\sigma = Q/\pi R^2$ на расстоянии z от поверхности диска
- $dE = dE_z = \sigma \cos\theta r dr d\varphi / r^2 = \sigma dS_{\perp} / r^2 = \sigma d\Omega \Leftrightarrow$
 $E = \sigma \Omega$
 - $R \gg z$ (заряженная плоскость) $\Omega = 2\pi \Leftrightarrow E = 2\pi\sigma$
 - $Z \gg R$ (точечный заряд) $\Omega = S/z^2 \Leftrightarrow E = \sigma S/z^2 = Q/z^2$
- В общем случае: $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \Leftrightarrow$
 $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta) = 2\pi(1 - z/(z^2 + R^2)^{1/2})$
 $E = \sigma\Omega = 2\pi\sigma(1 - z/(z^2 + R^2)^{1/2})$

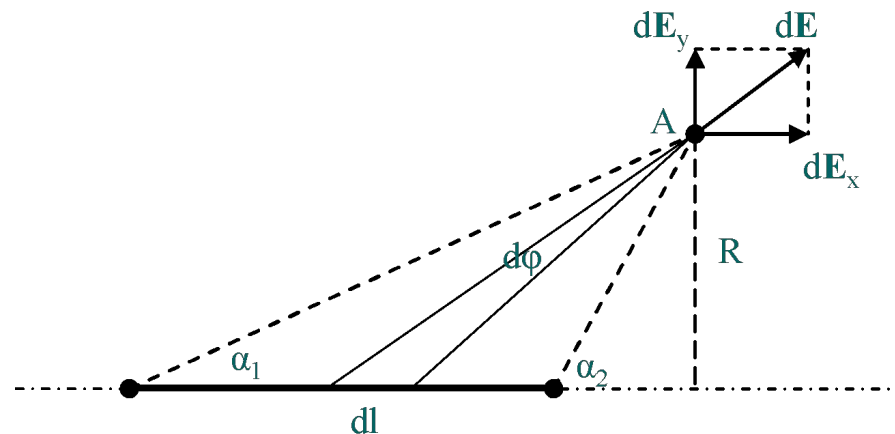
Поле короткой заряженной нити

- Заряд равномерно распределён по отрезку прямой нити с линейной плотностью λ . Найти \mathbf{E} в точке A , расположенной на расстоянии R от провода.



Поле короткого провода

- $E_y = \int dE_y = \int \lambda dl \sin \alpha / r^2 = \int \lambda d\varphi / r = \int \lambda \cos \varphi d\varphi / R = \lambda / R (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) = \lambda (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) / R$
- $E_x = \int dE_x = \int \lambda dl \cos \alpha / r^2 = \int \lambda \sin \varphi d\varphi / R = \lambda / R (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) = \lambda (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) / R$
- Бесконечный провод: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 180^\circ \Rightarrow E = E_y = 2\lambda / R$; $E_x = 0$
- Полубесконечный провод: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 90^\circ \Rightarrow E_x = E_y = \lambda / R$



Электрический диполь

- Простейший **электрический диполь** – это система равных по величине, но противоположных по знаку двух точечных зарядов $-q$ и $+q$, сдвинутых друг относительно друга на расстояние l .
- Плечо диполя – это вектор l , проведённый от отрицательного к положительному заряду
- Вектор $p = ql$ называется **дипольным моментом**
- Диполь называется точечным, если l значительно меньше расстояния r до точки наблюдения: $l \ll r$
- Диполь называется **жёстким**, если расстояние между зарядами l неизменно.
- Диполь называется **упругим**, если расстояние между зарядами l меняется под действием внешних сил.

Диполь во внешнем поле

- В однородном электрическом поле на диполь действует момент сил
 $\mathbf{M} = [\boldsymbol{\ell} \mathbf{F}] = q[\boldsymbol{\ell} \mathbf{E}] = [\mathbf{p} \mathbf{E}]$, $M = - pE \sin\theta$ – в электрическом поле диполь ориентируется вдоль вектора напряжённости \mathbf{E}
- Энергия точечного диполя: $W = q\varphi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\ell}) + q\varphi(\mathbf{r}) = q(\text{grad}\varphi, \boldsymbol{\ell}) = -(\mathbf{p}, \mathbf{E})$
- В неоднородном поле на диполь действует сила: $F_x = qE_x(\mathbf{r} + \boldsymbol{\ell}) - qE_x(\mathbf{r}) = q\ell_x \partial E_x / \partial x + q\ell_y \partial E_x / \partial y + q\ell_z \partial E_x / \partial z = (\mathbf{p}, \text{grad} E_x) \Rightarrow \mathbf{F} = p_x \partial \mathbf{E} / \partial x + p_y \partial \mathbf{E} / \partial y + p_z \partial \mathbf{E} / \partial z = (\mathbf{p}, \text{grad}) \mathbf{E}$
 - Диполь выстраивается вдоль поля $\mathbf{p} \uparrow \uparrow \mathbf{E}$;
 - Ориентированный вдоль поля диполь втягивается в область более сильного электрического поля.

Потенциал диполя: $(\mathbf{p}\mathbf{r})/r^3$

Поле диполя: $\mathbf{E} = 3 (\mathbf{p}\mathbf{r})r/r^5 - \mathbf{p}/r^3$

- Потенциал точечного диполя:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = q/r_1 - q/r_2 = q(r_2 - r_1)/r_1 r_2 = q\ell \cos\theta / r^2 = (\mathbf{p}\mathbf{r})/r^3$$

- $\varphi = (\mathbf{p}\mathbf{r})/r^3$

- Поле точечного диполя:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi = -\mathbf{grad} (\mathbf{p}\mathbf{r})/r^3 = 3 (\mathbf{p}\mathbf{r})r/r^5 - \mathbf{p}/r^3$$

- $\mathbf{grad}(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5;$

- $\mathbf{grad}(\mathbf{p}\mathbf{r}) = \mathbf{p}$

- $\mathbf{grad}(r) = \mathbf{r}/r$

Оператор Гамильтона (набла-оператор):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

- $\text{grad } U = \nabla U$

- Приращение функции:

$$dU = (\text{grad } U, d\mathbf{r}) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

- СВОЙСТВА:

- $\text{grad}(uv) = u \text{grad } v + v \text{grad } u$ (“производная произведения”)
- $\text{grad} f(u) = (df/du) \text{grad } u$ (“производная сложной функции”)

- Полезные формулы:

- $\text{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}$
- $\text{grad } r = \mathbf{r}/r$ – (поле единичных векторов)
- $\text{grad } 1/r = (-1/r^2) (\mathbf{r}/r) = -\mathbf{r}/r^3$

Теорема Гаусса (интегральная форма)

- Поток вектора \mathbf{E} сквозь замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, умноженной на 4π :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$$

- Теорема Гаусса в дифференциальной форме:
 $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho$

Теорема Гаусса (дифференциальная форма)

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\text{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} - \text{дивергенция вектора } \vec{E}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) - \text{векторный оператор "набла"}$$

дивергенция – это поток вектора из единичного объёма

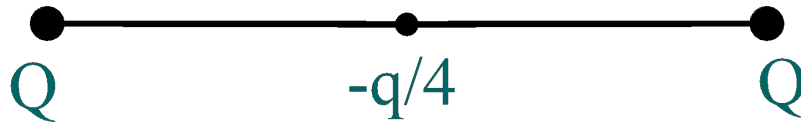
$$\text{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

в сферически симметричном случае

(вектор \vec{E} направлен радиально и зависит только от r):

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E)$$

Теорема Ирншоу – следствие теоремы Гаусса

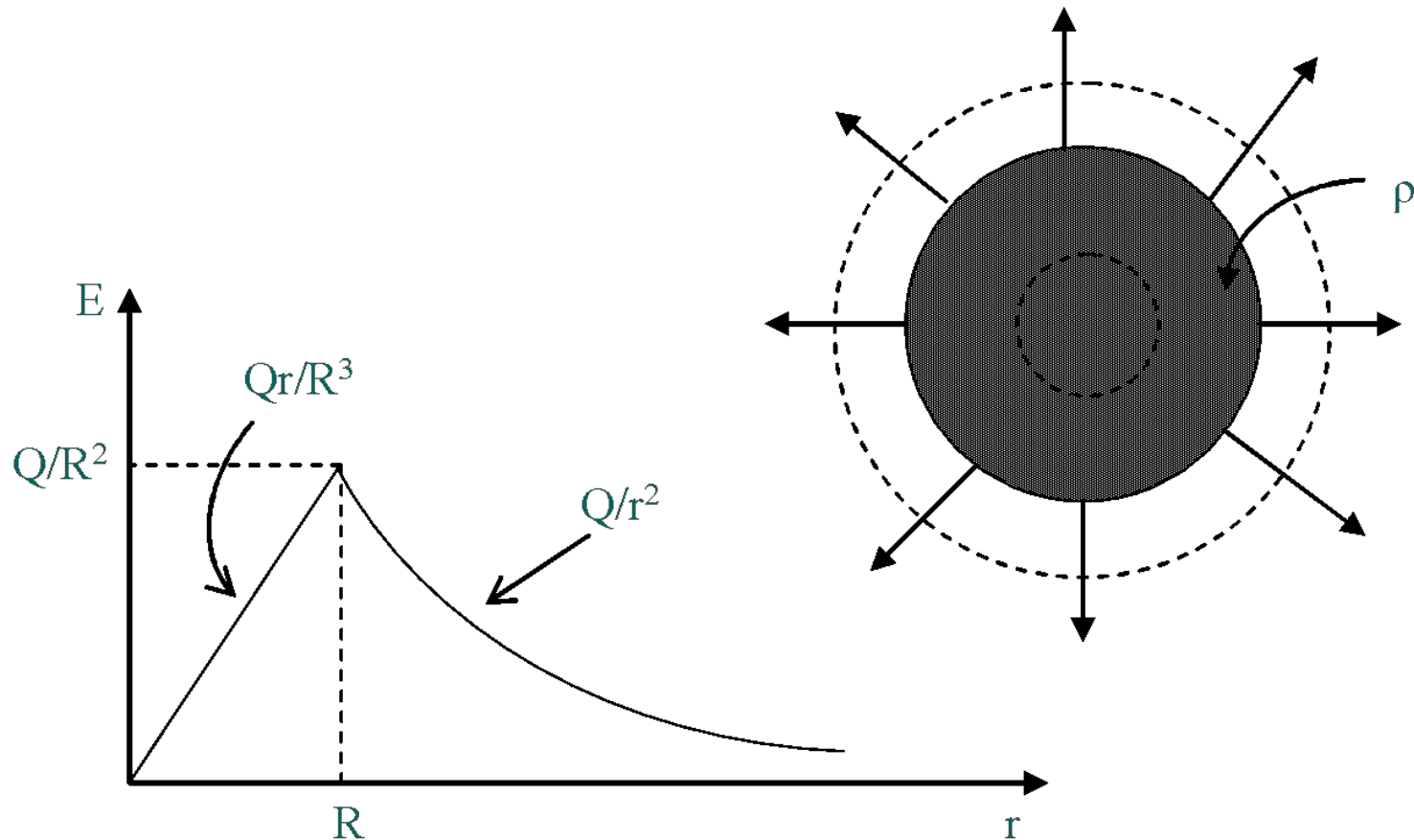


- Невозможно создать **устойчивую** систему только из покоящихся точечных кулоновских зарядов.

Применение теоремы Гаусса

- Поле заряженной нити:
 $E \cdot 2\pi r \cdot L = 4\pi q \Rightarrow E = 2q/Lr = 2\epsilon/r$
- Поле заряженной плоскости:
 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = E\Delta S + E\Delta S = 2E\Delta S = 4\pi\Delta q \Rightarrow E = 2\pi\Delta q/\Delta S = 2\pi\sigma$
- Поле равномерно заряженного шара:
 1. Вне шара $r > R$: $E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi Q \Rightarrow E = Q/r^2$
 2. Внутри шара $r < R$: $E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q(r) = 4\pi Q(r/R)^3 \Rightarrow E = Qr/R^3 = 4/3 \pi r$
в векторном виде:
 $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3, r > R$
 $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/R^3 = 4/3 \pi r, r < R$

Поле равномерно заряженного шара



Связь потенциала с напряжённостью поля

- Убыль потенциала равна работе поля:

$$\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{E}d\mathbf{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \Rightarrow$$

$$E_x = -\partial\varphi/\partial x; E_y = -\partial\varphi/\partial y; E_z = -\partial\varphi/\partial z \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$$

$$\boxtimes \mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

Соотношения между электрическими единицами СИ и СГСЭ

- Заряд:
 $1 \text{ Кулон} = 1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ единиц СГСЭ}$
- Потенциал:
 $1 \text{ Вольт} = 1 \text{ В} = 1/300 \text{ единиц СГСЭ}$

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл} = 10^7 \text{ эрг} / 3 \cdot 10^9 = 1/300 \text{ единиц СГСЭ потенциала}$$