Лекция № 6
Электрическое поле

Алексей Викторович
Гуденко

16/10/2014

План лекции

1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля.
2. Электростатический потенциал.
3. Поле точечного диполя
4. Диполь в поле
5. Теорема Гаусса. Электрические поля в простейших случаях.

Демонстрации

Определения

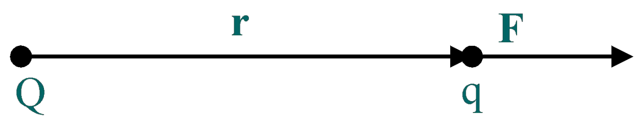
- ***Электромагнитное взаимодействие*** – фундаментальное взаимодействие, которое осуществляется на расстоянии посредством электромагнитного поля.
- Электромагнитное поле создаётся ***электрическими зарядами*** и действует на заряды
- Заряд – мера взаимодействия заряженного тела с полем. Заряды бывают ***положительные*** и ***отрицательные***
- Носителями заряда являются элементарные частицы – протон (положительный заряд) и электрон (отрицательный заряд).
- ***Элементарный заряд*** – заряд элементарных частиц $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ $= 1{,}601 \cdot 10^{-19}$ Кл (СИ)
- Суммарный электрический заряд замкнутой системы сохраняется.
- Заряд тела, системы тел – релятивистский инвариант: при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой заряд не изменяется.

Электростатика

- ***Электростатика*** занимается изучением полей *неподвижных зарядов.*
- Неподвижные заряды создают неизменное во времени ***электростатическое поле***.
- ***Точечный заряд*** – это заряд, размером и формой которого в рассматриваемых условиях можно пренебречь
- ***Пробный заряд*** – небольшой по величине точечный заряд, который не вызывает перераспределения электрических зарядов в окружающих телах.

Закон Кулона (1875 г)

- Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величинам q и Q и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r. Одноимённые заряды отталкиваются; заряды разных знаков притягиваются.
  $F = Qq/r^2$
- Закон Кулона в векторной форме:
  $\mathbf{F} = Qq\mathbf{r}/r^3$



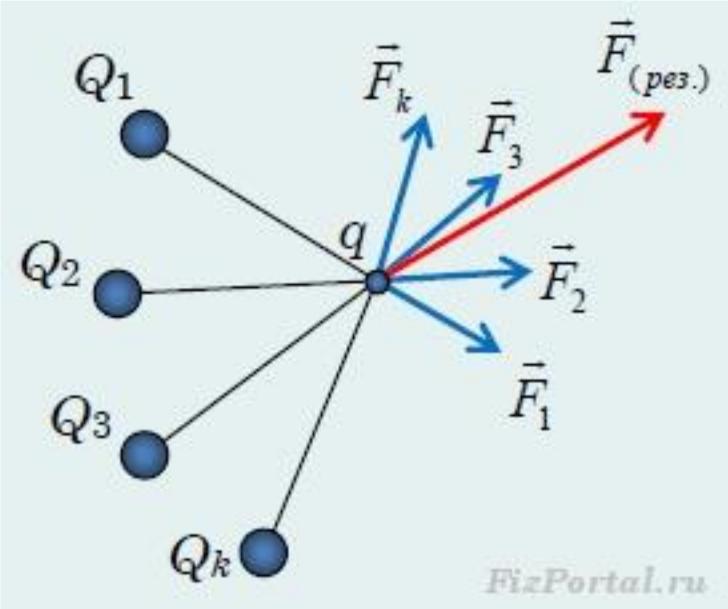
Напряжённость электрического поля

- Напряжённостью электрического поля называется сила, действующий на единичный заряд:
  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
- Поле точечного заряда Q:
  $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3$
- **Принцип суперпозиции**:
  напряжённость электрического поля **E** нескольких неподвижных точечных зарядов равна векторной сумме напряжённостей полей, которое создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствие остальных:
  $\mathbf{E} = \Sigma\mathbf{E}_i$

Принцип суперпозиции для электростатических полей

- Электрическое взаимодействие между двумя зарядами не зависит от присутствия третьего заряда

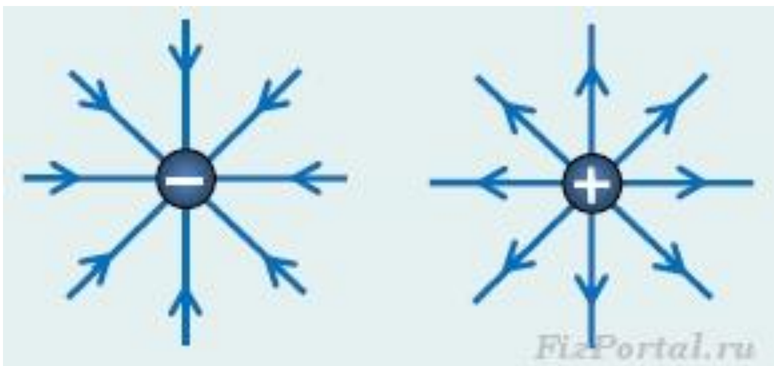
- напряжённость электрического поля **E** нескольких неподвижных точечных зарядов равна векторной сумме напряжённостей полей, которое создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствие остальных:
E = Σ**E**$_i$

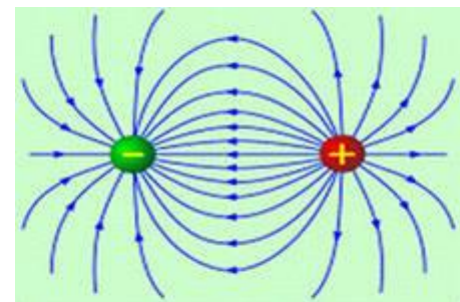


Потенциал электростатического поля

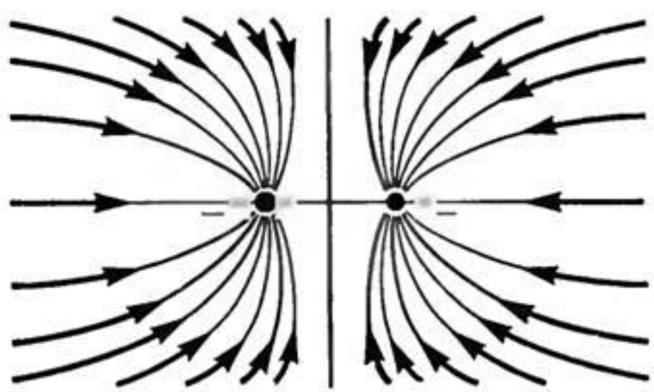
- Электростатическое поле потенциально, как всякое стационарное центральное поле ⇨ работа поля не зависит от траектории и равна убыли потенциальной энергии взаимодействия:
  $dU = -(qQ/r^2)dr$ ⇨
  $U = qQ/r$; $U(\infty) = 0$
- Потенциал электрического поля – это потенциальная энергия единичного заряда. Потенциал точечного заряда $\varphi(r) = Q/r$
- Принцип суперпозиции для потенциала: потенциал поля системы зарядов равен сумме потенциалов полей отдельных зарядов
  $\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) + \ldots$
- Энергия заряда в поле $U = q\varphi$

Графическое изображение полей

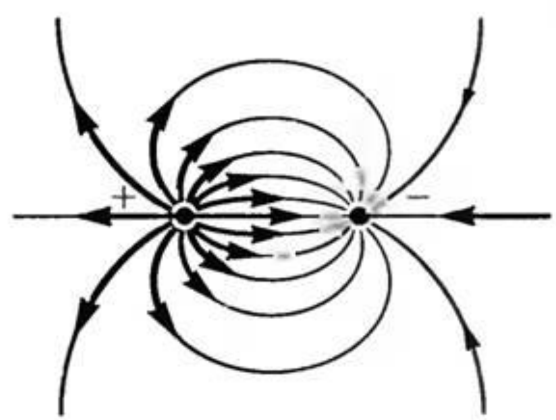




а



б



Как устроены силовые линии.

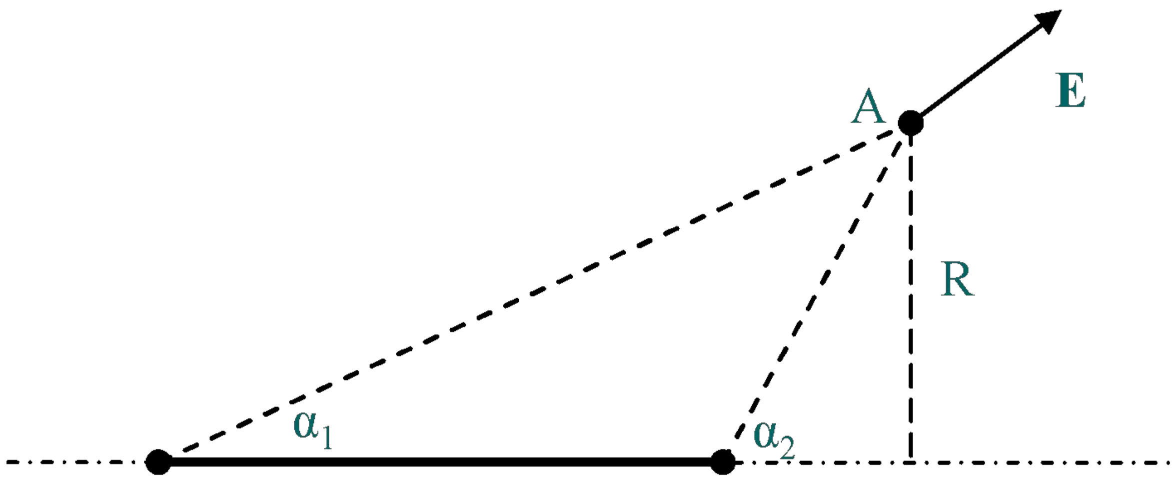
- Направление касательной в каждой точке *силовой линии* совпадает с вектором **E**
- Силовые линии не пересекаются в пространстве, не содержащих заряды
- Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми – это противоречило бы закону сохранения энергии
- один конец силовой линии – всегда заряд; другой конец - либо заряд противоположного знака, либо бесконечность.

Поле на оси равномерно заряженного диска

- Поле на оси равномерно заряженного диска с поверхностной плотностью $\sigma = Q/\pi R^2$ на расстоянии z от поверхности диска
- $dE = dE_z = \sigma\cos\theta\rho d\rho d\varphi/r^2 = \sigma dS_\perp/r^2 = \sigma d\Omega \Rightarrow$
  $E = \sigma\Omega$
  - R >> z (заряженная плоскость) $\Omega = 2\pi \Rightarrow E = 2\pi\sigma$
  - Z >> R (точечный заряд) $\Omega = S/z^2 \Rightarrow E = \sigma S/z^2 = Q/z^2$
- В общем случае: $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow$
  $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta) = 2\pi(1 - z/(z^2 + R^2)^{1/2})$
  $E = \sigma\Omega = 2\pi\sigma(1 - z/(z^2 + R^2)^{1/2})$

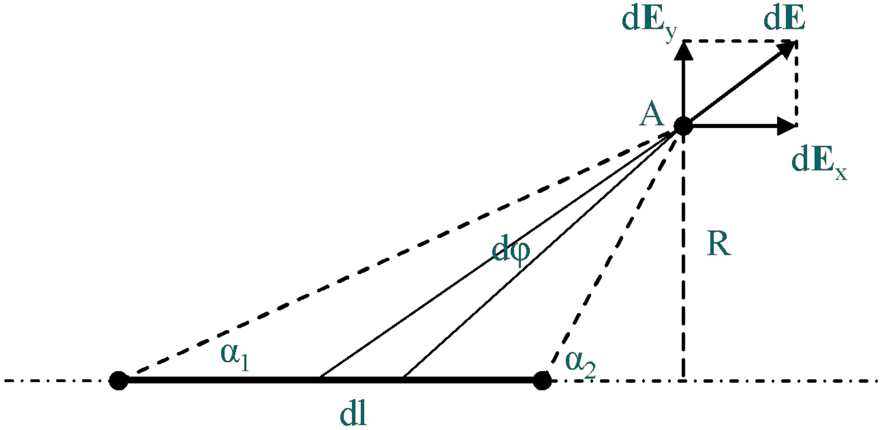
Поле короткой заряженной нити

- Заряд равномерно распределён по отрезку прямой нити с линейной плотностью æ . Найти **E** в точке A, расположенной на расстоянии R от провода.



Поле короткого провода

- $E_y = \int dE_y = \int æ dl \sin\alpha / r^2 = \int æ d\varphi / r = \int æ \cos\varphi d\varphi / R =$
  $æ/R\,(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) = æ(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)/R$
- $E_x = \int dE_x = \int æ dl \cos\alpha / r^2 = \int æ \sin\varphi d\varphi / R =$
  $æ/R\,(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1) = æ(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)/R$
- Бесконечный провод: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 180^0 \Rightarrow E = E_y = 2æ/R$; $E_x = 0$
- Полубесконечный провод: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 90^0 \Rightarrow E_x = E_y = æ/R$



Электрический диполь

- Простейший **электрический диполь** – эта система равных по величине, но противоположных по знаку двух точечных зарядов –q и +q, сдвинутых друг относительно друга на рассстояние ℓ.
- Плечо диполя – это вектор **ℓ**, проведённый от отрицательного к положительному заряду
- Вектор **p** = q**ℓ** называется **дипольным моментом**
- Диполь называется точечным, если ℓ значительно меньше расстояния r до точки наблюдения: ℓ << r
- Диполь называется ***жёстким***, если расстояние между зарядами ℓ неизменно.
- Диполь называется ***упругим***, если расстояние между зарядами ℓ меняется под действием внешних сил.

Диполь во внешнем поле

- В однородном электрическом поле на диполь действует момент сил
M = [**ℓ F**] = q[**ℓ E**] = [**p E**], M = - pE sinθ – в электрическом поле диполь ориентируется вдоль вектора напряжённости **E**
- Энергия точечного диполя: W = qφ(**r** +**ℓ**) + qφ(r) = q (gradφ,**ℓ**) = - (**p**,**E**)
- В неоднородном поле на диполь действует сила: $F_x = qE_x(\mathbf{r} + \boldsymbol{\ell}) - qE_x(\mathbf{r}) = q\ell_x \partial E_x/\partial x + q\ell_y \partial E_x/\partial y + q\ell_z \partial E_x/\partial z = (\mathbf{p}, \mathrm{grad} E_x)$ ⇨ $\mathbf{F} = p_x \partial \mathbf{E}/\partial x + p_y \partial \mathbf{E}/\partial y + p_z \partial \mathbf{E}/\partial z = (\mathbf{p}, \mathrm{grad})\mathbf{E}$
  - **Диполь выстраивается вдоль поля p ↑↑ E;**
  - **Ориентированный вдоль поля диполь втягивается в область более сильного электрического поля.**

Потенциал диполя: $(\mathbf{pr})/r^3$
Поле диполя: $\mathbf{E} = 3\,(\mathbf{pr})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{p}/r^3$

- Потенциал точечного диполя:
  $\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = q/r_1 - q/r_2 = q(r_2 - r_1)/r_1 r_2 = q\ell\cos\theta/r^2 = (\mathbf{pr})/r^3$
- $\varphi = (\mathbf{pr})/r^3$
- Поле точечного диполя:
  $\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,\varphi = -\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{pr})/r^3 = 3\,(\mathbf{pr})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{p}/r^3$

  - $\mathrm{grad}(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$;
  - $\mathrm{grad}(\mathbf{pr}) = \mathbf{p}$
  - $\mathrm{grad}(r) = \mathbf{r}/r$

Оператор Гамильтона (набла-оператор):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- grad U = $\vec{\nabla} U$
- Приращение функции:

$$dU = (gradU, d\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

- свойства:
  - grad(uv) = ugradv + vgradv (“производная произведения”)
  - gradf(u) = (df/du) gradu (“производная сложной функции”)
- Полезные формулы:
  - grad(**p**,**r**) = **p**
  - grad r = **r**/r – (поле единичных векторов)
  - grad 1/r = (-1/r^2) (**r**/r) = - **r**/r^3

Теорема Гаусса (интегральная форма)

- Поток вектора **E** сквозь замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, умноженной на 4π:

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = 4\pi q$$

- Теорема Гаусса в дифференциальной форме:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$$

Теорема Гаусса (дифференциальная форма)

$$div\vec{E} = 4\pi\rho$$

$$div\vec{E} = \nabla\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} - \textit{дивергенция вектора } \vec{E}$$

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}) - \textit{векторный оператор "набла"}$$

дивергенция – это поток вектора из единичного объёма

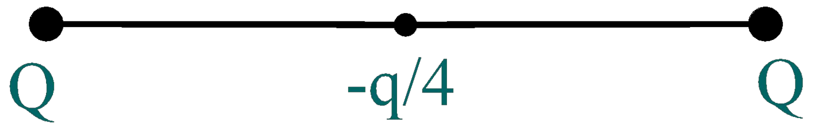
$$div\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{E} d\vec{S}$$

в сферически симметричном случае

(вектор $\vec{E}$ направлен радиально и зависит только от r):

$$div\vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 E)$$

Теорема Ирншоу – следствие теоремы Гаусса

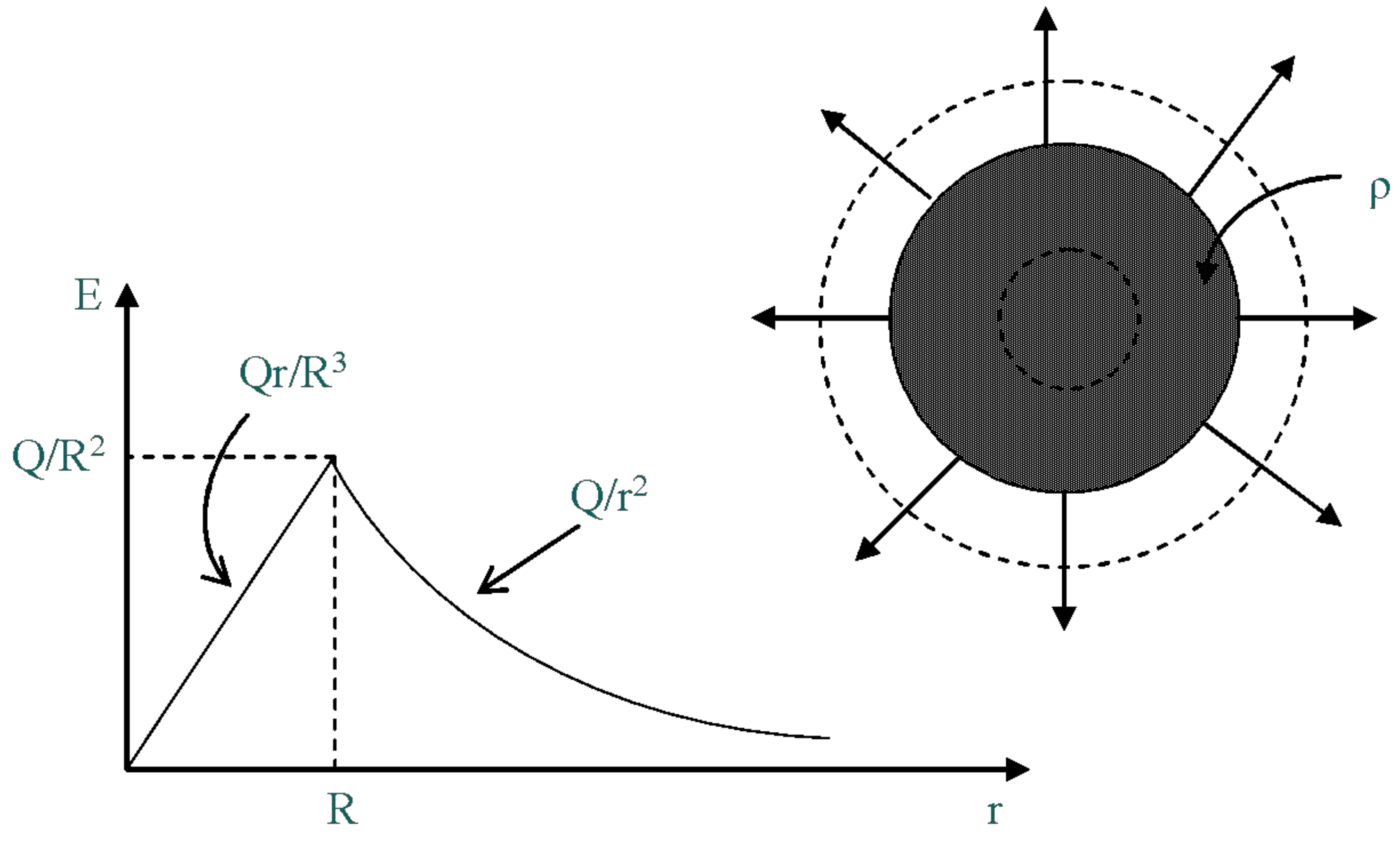


- Невозможно создать **устойчивую** систему только из покоящихся точечных кулоновских зарядов.

Применение теоремы Гаусса

- Поле заряженной нити:
  $E \cdot 2\pi r \cdot L = 4\pi q \Rightarrow E = 2q/Lr = 2æ/r$
- Поле заряженной плоскости:
  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = E\Delta S + E\Delta S = 2E\Delta S = 4\pi\Delta q \Rightarrow E = 2\pi\Delta q/\Delta S = 2\pi\sigma$
- Поле равномерно заряженного шара:
  1. Вне шара $r > R$: $E\, 4\pi r^2 = 4\pi Q \Rightarrow E = Q/r^2$
  2. Внутри шара $r < R$: $E\, 4\pi r^2 = 4\pi q(r) = 4\pi Q(r/R)^3 \Rightarrow$
     $E = Qr/R^3 = 4/3\ \pi\rho r$
     в векторном виде:
     $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3$, $r > R$
     $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/R^3 = 4/3\ \pi\rho\mathbf{r}$, $r < R$

Поле равномерно заряженного шара



Связь потенциала с напряжённостью поля

- Убыль потенциала равна работе поля:

  $\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{E}d\mathbf{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \Rightarrow$

  $E_x = -\partial\varphi/\partial x;\ E_y = -\partial\varphi/\partial y;\ E_z = -\partial\varphi/\partial z \Rightarrow$

  $\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi$

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

Соотношения между электрическими единицами СИ и СГСЭ

- Заряд:
  1 Кулон = 1 Кл = $3 \cdot 10^9$ единиц СГСЭ
- Потенциал:
  1 Вольт = 1 В = 1/300 единиц СГСЭ

1 В = 1 Дж /1 Кл = 10^7 эрг/3 10^9 = 1/300 единиц СГСЭ потенциала